MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

10

Ion Achiri Petru Efros Valentin Garit Nicolae Prodan

Matematică

Manual pentru clasa a X-a

EDITURA PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Petru Efros Valentin Garit Nicolae Prodan

Matematică

Manual pentru clasa a X-a

EDITURA PRUT

Acest manual este proprietate publică, editat din sursele financiare ale Fondului special pentru manuale.

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 1867 din 20 decembrie 2024 ca urmare a evaluării calităţii metodico-ştiinţifice.

____

(Denumirea instituţiei de învăţământ)

EVIDENŢA UTILIZĂRII MANUALULUI:

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului	Anul de studii	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele verifică dacă numele şi prenumele elevului sunt scrise corect.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia cu unul dintre următoarele calificative: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferenţiar universitar, UPS „Ion Creangă” (modulele 5, 7, 8)
Petru Efros, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 4, 9)
Valentin Garit, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 4, 9)
Nicolae Prodan, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 1, 2, 3, 5, 6)

Redactor: Vitalie Puţuntică
Corector: Tatiana Luchian
Copertă: Irina Cuzin
Machetare computerizată: Valentina Stratu

Editura Prut Internaţional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii
Achiri, Ion
Matematică: Manual pentru clasa a X-a / Ion Achiri, Petru Efros, Valentin Garit, Nicolae Prodan; Ministerul Educaţiei şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internaţional, 2025 (Blitz Poligraf). – 224 p.
ISBN 978-9975-54-836-6
51(075.3)
M 47

Imprimat la Tipografia Blitz Poligraf

Cuvânt-înainte

Prezentul manual este elaborat conform curriculumului la matematică pentru liceu, ediția 2019. Structura şi baza conceptuală ale manualului fac posibilă realizarea prevederilor curriculumului liceal pentru clasa a X-a.

Manualul este structurat pe module. Pentru orientare, la începutul fiecărui modul sunt formulate obiectivele prioritare, care pot fi realizate studiind modulul în cauză. Obiectivele marcate cu asterisc (*) sunt preconizate doar pentru profilul real. Menționăm că manualul include compartimente ce țin de algebră, analiză matematică, geometrie, logică matematică, teoria mulțimilor, trigonometrie.

Acest manual permite realizarea principiilor constructiv şi formativ, pe care se axează învățământul matematic. În acest scop, s-a acordat o atenție deosebită atât corelării conceptelor (noțiunilor) din diverse compartimente, cât şi revenirii sistematice la acelaşi concept, dezvăluindu-i diferite aspecte. Pentru înțelegerea şi conştientizarea conceptelor, sunt propuse exemple motivaționale, exemple de utilizare a acestora în alte domenii, inclusiv în viața cotidiană. În acelaşi scop, la finalul unor module sunt oferite hărți conceptuale (tabele de sinteză) cu ajutorul cărora se va realiza o sistematizare a celor studiate, se vor elucida legăturile principale dintre concepte sau dintre diferite componente ale aceluiaşi concept.

Manualul este astfel structurat, încât să poată fi utilizat la predarea matematicii atât la profilul real, cât şi la profilurile umanistic, artă şi sport. De reținut că **materialul (textul) marcat în partea stângă cu o bară verticală este prevăzut pentru profilul real. Pentru profilurile umanistic, artă şi sport, aceste texte sunt propuse ca extinderi**. În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exercițiile şi problemele propuse la sfârşitul fiecărui paragraf (eventual, pentru unele secvențe), precum şi la sfârşitul fiecărui modul, sunt clasificate pe niveluri:

a) profilurile umanistic, artă, sport: **A** – cunoaştere şi înțelegere, **B** – aplicare, **C** – integrare.

b) profilul real: $\mathbf{A_1}$ – cunoaştere şi înțelegere, $\mathbf{B_1}$ – aplicare, $\mathbf{C_1}$ – integrare.

Exercițiile şi problemele destinate profilurilor umanistic, arte, sport pot fi propuse şi elevilor de la profilul real.

Unele prevederi sunt destinate să faciliteze organizarea lucrului de sine stătător al elevilor. Sistemele de exemple motivaționale, de consolidare şi de utilizare a conceptelor sunt menite să ajute elevul să înțeleagă aceste concepte, să însuşească atât conceptele noi, cât şi unele aspecte ale conceptelor deja cunoscute (de exemplu, monotonia şi extremele funcției, ecuații şi inecuații de noi tipuri ş.a.). Recomandăm, în scopul formării competențelor respective, să se insiste asupra examinării exemplelor şi rezolvării exercițiilor propuse în manual. Exercițiile şi problemele recapitulative de la fiecare modul prezintă, de regulă, un nivel mai avansat de integrare intra- şi interdisciplinară. Rezolvarea acestora, de asemenea, va contribui eficient la formarea competențelor specifice matematicii.

Manualul le oferă elevilor pasionați de matematică posibilități pentru a-şi extinde cunoştințele, atât prin unele noțiuni teoretice suplimentare, cât şi prin probleme mai complicate, notate cu asterisc (*) .

Autorii

MODULUL 1

Numere reale. Recapitulare şi completări

Numerele guvernează lumea.
Pitagora

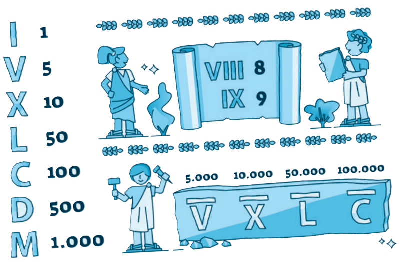
Obiective

- recunoaşterea elementelor mulţimilor numerice studiate ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) şi scrierea numerelor reale sub diverse forme;
- utilizarea terminologiei aferente noţiunii de număr;
- trecerea de la o formă de scriere a numerelor reale la alta;
- reprezentarea geometrică a numerelor reale;
- efectuarea operaţiilor studiate cu numere reale;
- aplicarea proprietăţilor operaţiilor cu numere reale pentru simplificarea calculelor;
- compararea numerelor reale prin metode diverse;
- aproximarea prin lipsă sau prin adaos a numerelor reale cu eroarea dată;
- utilizarea modulului numărului real şi a proprietăţilor modulului în contexte variate;
- utilizarea proporţiilor, procentelor în diverse contexte.

§1 Numere raţionale, iraţionale, reale

Din istorie

Ştiinţa, tehnica au avut nevoie de o cale lungă de evoluţie până la apariţia computerului şi a internetului ca mijloc de comunicare. La fel, omenirea a parcurs multe trepte de ascendenţă până la apariţia noţiunii de număr. Diferite civilizaţii, culturi (babiloniană, egipteană, chineză, cea de pe Valea Indului...) au mers pe căi diferite. În Antichitate au apărut simbolurile romane: I, II, III, IV, V, X, L, C, M, $\overline{\text{V}}$, $\overline{\text{M}}$, iar apoi au intrat în uz (inclusiv la hinduşi) cifrele arabe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



Este cunoscută corelaţia dintre cifrele arabe şi cele romane:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

Sistemul bazat pe simbolurile romane nu era comod pentru efectuarea calculelor (cifra 0 nu se conţine în acest sistem). Sistemul bazat pe cifrele arabe a apărut în Europa acum 1500 de ani.

Dezvoltarea conceptului de număr totdeauna a fost corelată cu efectuarea operaţiilor aritmetice între numere şi a permis evidenţierea unor proprietăţi calitative ale acestora.

Amintim mulţimile de numere studiate anterior:

- $\mathbb{N}=\{0, 1, 2,..., n,...\}$ – mulţimea numerelor naturale,
- $\mathbb{Z}=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2,...\}$ – mulţimea numerelor întregi,
- $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} \mid m, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$ – mulţimea numerelor raţionale,
- **I** – mulţimea numerelor iraţionale (numere care nu sunt raţionale),
- $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbf{I}$ – mulţimea numerelor reale.

Dacă K este una dintre mulţimile de mai sus, atunci prin K^*, K_+, K_- se notează, respectiv, mulţimea numerelor nenule, mulţimea numerelor nenegative, mulţimea numerelor nepozitive din mulţimea numerică K.

Un număr rațional poate fi reprezentat:

1. sub formă de fracție $\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
2. ca fracție zecimală (finită sau infinită periodică).

Procedeul de trecere de la o formă la alta este reprezentat prin exemplele:

Exemple

a) $\frac{23}{1000} = 0{,}023$; b) $\frac{1}{3} = 0{,}33... = 0,(3)$; c) $\frac{1046}{495} = 2{,}1(13)$; d) $0{,}023 = \frac{23}{1000}$;

e) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; f) $2{,}1(13) = 2 + 0{,}1(13) = 2 + \frac{113-1}{990} = 2 + \frac{112}{990} = 2 + \frac{56}{495} = \frac{1046}{495}$.

Mulțimile numerice studiate $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ permit rezolvarea unui şir de probleme. Există însă situații care nu pot fi depăşite utilizând doar aceste mulțimi numerice.

Problemă

Să se determine lungimea diagonalei unui dreptunghi cu laturile de lungimile 1 cm şi 2 cm.

Rezolvare:

Fie a lungimea diagonalei dreptunghiului. Atunci, conform teoremei lui Pitagora, $a^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Încercăm să rezolvăm problema în mulțimea numerelor raționale. Fie $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ o fracție ireductibilă. Atunci $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$, de unde rezultă că $m^2 = 5n^2$ şi $m^2 \vdots 5$, adică $m \vdots 5$ şi $m = 5t$, $t \in \mathbb{N}$. După substituție în $m^2 = 5n^2$, obținem $25t^2 = 5n^2 \Leftrightarrow 5t^2 = n^2$, adică $n \vdots 5$, de unde rezultă că fracția $\frac{m}{n}$ este reductibilă cu 5, contrar presupunerii. Contradicția obținută demonstrează că problema formulată nu are soluție în mulțimea $\mathbb{Q}$.

Astfel, lungimea diagonalei trebuie să fie un număr (nerațional) al cărui pătrat este 5, deci care poate fi scris sub forma $\sqrt{5}$.

Pentru a scrie numărul $\sqrt{5}$ ca număr zecimal, vom calcula valorile lui aproximative, folosind *aproximările zecimale prin lipsă* şi *aproximările zecimale prin adaos*. Deoarece $2^2 < 5 < 3^2$, rezultă că $2 < \sqrt{5} < 3$. Numerele 2 şi 3 sunt aproximările zecimale prin lipsă şi, respectiv, prin adaos, cu o eroare mai mică decât 1 (sau cu o unitate) ale numărului $\sqrt{5}$. Divizăm intervalul $[2, 3]$ în 10 părți egale şi alegem numerele 2,2 şi 2,3, care satisfac inegalitatea dublă $(2{,}2)^2 < 5 < (2{,}3)^2$. Numerele 2,2 şi 2,3 sunt aproximările zecimale prin lipsă şi, respectiv, prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-1} (sau cu o zecime) ale numărului $\sqrt{5}$. În mod analog se determină aproximările zecimale 2,23 şi 2,24 prin lipsă şi, respectiv, prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-2} (sau cu o sutime) ale numărului $\sqrt{5}$. Acest procedeu poate fi continuat la infinit, deoarece pătratul niciunuia din numerele obținute nu va fi egal cu 5. (S-a demonstrat că $\sqrt{5}$ nu este număr rațional.) Numărul zecimal obținut 2,23... are un număr infinit de zecimale şi nu este (din acelaşi motiv) nici număr zecimal periodic.

Cunoaştem că numerele care pot fi reprezentate ca numere zecimale neperiodice cu un număr infinit de zecimale se numesc ***numere iraționale***. De exemplu, numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\pi = 3{,}1415...$ (π este valoarea raportului dintre lungimea cercului şi diametrul lui) sunt numere iraționale.

Ne amintim că reuniunea mulțimii numerelor raționale ($\mathbb{Q}$) cu mulțimea numerelor iraționale ($\mathbf{I}$) formează ***mulțimea numerelor reale***, care se notează cu $\mathbb{R}$. Prin urmare, $\mathbb{R}$ este mulțimea tuturor numerelor care pot fi scrise ca numere zecimale cu un număr finit de zecimale, ca numere zecimale periodice sau ca numere zecimale neperiodice cu un număr infinit de zecimale.

Între mulțimile numerice studiate au loc relațiile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$.

În general, numerele zecimale α_n şi α_n' cu n cifre după virgulă se numesc ***aproximări zecimale prin lipsă*** şi, respectiv, ***aproximări zecimale prin adaos***, cu o eroare mai mică decât 10^{-n} ale numărului irațional α, dacă: ① $\alpha_n < \alpha < \alpha_n'$ şi ② $\alpha_n' - \alpha_n = 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Astfel, *fiecărui număr iraţional* α *sau fiecărei fracţii zecimale periodice i se asociază două şiruri infinite de numere zecimale (raţionale)* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\alpha'_n)_{n\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, care satisfac proprietăţile ① şi ②.

Pentru comoditate şi uniformitate, convenim să examinăm şi şiruri similare de aproximări zecimale ale numărului raţional α, considerând că $\alpha_n = \alpha'_n = \alpha$, începând cu un oarecare indice n_k. De exemplu, pentru $\alpha = 2{,}719$, elementele acestor şiruri sunt:

$$\alpha_0 = 2,\ \alpha'_0 = 3;\ \alpha_1 = 2{,}7,\ \alpha'_1 = 2{,}8;\ \alpha_2 = 2{,}71,\ \alpha'_2 = 2{,}72;$$
$$\alpha_3 = 2{,}719 = \alpha'_3 = \alpha_4 = \alpha'_4 = \ldots = \alpha_n = \alpha'_n = \alpha\ \ (n_k = 3).$$

Aceste şiruri se folosesc pentru a defini operaţii cu numere reale.

§2 Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor. Compararea numerelor reale

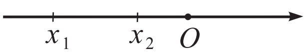
Ne amintim

Oricărui număr real a îi corespunde un unic punct M pe axa numerelor Ox, astfel încât $OM = |a|$: dacă $a > 0$, atunci punctul M aparţine semiaxei pozitive; dacă $a < 0$, atunci M aparţine semiaxei negative, iar dacă $a = 0$, atunci M coincide cu punctul O. Respectiv, fiind dat un punct M de pe axa Ox, lui îi va corespunde un număr a cu $|OM| = |a|$, respectând regula semnului. Numărul a se numeşte ***coordonata*** punctului M. Folosind această corespondenţă, numerele reale pot fi reprezentate geometric. Din acest motiv, e comod să notăm punctul de pe axă chiar cu numărul în cauză.

În funcţie de forma în care sunt reprezentate numerele reale, se aplică diferite *modalităţi de comparare* a acestora.

1. Dintre două numere reale reprezentate pe axa numerelor, este mai mare numărul situat la dreapta (spre sensul pozitiv) celuilalt.

2. Orice număr pozitiv este mai mare decât orice număr negativ (indiferent de reprezentarea lor).



3. Dintre două numere negative este mai mare numărul al cărui modul este mai mic.
4. Fie ambele numere pozitive.
   a) Dacă ambele numere sunt prezentate ca fracţii ordinare cu acelaşi numitor, atunci este mai mare numărul al cărui numărător este mai mare.
   b) Dacă ele sunt prezentate ca fracţii zecimale, atunci se compară cifrele ce ocupă acelaşi loc faţă de virgulă: este mai mare numărul al cărui primă cifră necoincidentă de la stânga este mai mare (cifrele la stânga de prima semnificativă se consideră 0). $(12{,}97 > 9{,}99 = 09{,}99;\ 2{,}1\underline{9}3 > 2{,}1\underline{8}3)$
5. Dacă ambele numere se reprezintă ca valori ale unei funcţii, atunci se aplică (pentru comparare) proprietăţile de monotonie ale acestei funcţii.
6. Dacă numerele sunt scrise în formă mixtă, atunci se face o presupunere (de exemplu, $a > b$) şi se aplică proprietăţile inegalităţilor până se obţine o inegalitate echivalentă, dar evidentă sau se estimează semnul diferenţei lor.
7. În cazuri mai complicate se recurge la determinarea valorilor aproximative ale numerelor.

Exerciţiu rezolvat

Să se compare: a) $3\sqrt{5}$ cu $5\sqrt{3}$; b) 3 cu $6-\sqrt{5}$.

Rezolvare:

a) $3\sqrt{5} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{45};\ 5\sqrt{3} = \sqrt{25\cdot 3} = \sqrt{75}.$

Deoarece $45 < 75$, rezultă că $\sqrt{45} < \sqrt{75}$. Deci, $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$.

b) $3-(6-\sqrt{5}) = -3+\sqrt{5}$. Aşa cum $-3+\sqrt{5}$ este negativ ($\sqrt{5} < 3$), obţinem: $3 < 6-\sqrt{5}$.

§3 Operații aritmetice cu numere reale

Fie şirurile $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ şi $(\alpha'_n)_{n\geq 0}$, $(\beta'_n)_{n\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$, aproximări zecimale prin lipsă şi respectiv prin adaos ale numerelor reale α şi β.

Suma numerelor reale α şi β este numărul real $\gamma=\alpha+\beta$, care satisface inegalitățile duble $\alpha_n+\beta_n\leq\gamma\leq\alpha'_n+\beta'_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Diferența numerelor reale α şi β este numărul real $\delta=\alpha-\beta$, care satisface inegalitățile duble $\alpha_n-\beta'_n\leq\delta\leq\alpha'_n-\beta_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Produsul numerelor reale pozitive α şi β este numărul real pozitiv $\eta=\alpha\cdot\beta$, care satisface inegalitățile duble $\alpha_n\cdot\beta_n\leq\eta\leq\alpha'_n\cdot\beta'_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Câtul numerelor reale pozitive α şi β, $\beta\neq 0$, este numărul real pozitiv $\mu=\frac{\alpha}{\beta}$, care satisface inegalitățile duble $\frac{\alpha_n}{\beta'_n}\leq\mu\leq\frac{\alpha'_n}{\beta_n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, începând cu acel n pentru care aproximările zecimale β_n, β'_n sunt nenule.

Pentru a calcula produsul (câtul) a două numere reale arbitrare, se calculează produsul (câtul) modulelor, iar semnul rezultatului se determină în conformitate cu regula de calcul a semnului produsului (respectiv a câtului) numerelor reale.

Suma, diferența, produsul şi câtul (cu împărțitor nenul) oricăror două numere reale există şi sunt unic determinate.

Exercițiu rezolvat

Ce se înțelege prin numărul $t=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$?

Rezolvare:

Deoarece $1<\sqrt{2}<2$, $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$, ... şi $2<\sqrt{5}<3$, $2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3$, $2{,}22<\sqrt{5}<2{,}23$, ... rezultă că t este numărul care satisface inegalitățile duble:
$1\cdot 2<t<2\cdot 3$; $1{,}4\cdot 2{,}2<t<1{,}5\cdot 2{,}3$; $1{,}41\cdot 2{,}22<t<1{,}42\cdot 2{,}23$; ... deci
$2<t<6$; $3{,}08<t<3{,}45$; $3{,}13<t<3{,}31$; ...

Folosind reprezentarea numerelor raționale sub forma $\frac{a}{b}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$, imediat obținem că suma, diferența, produsul, câtul (cu împărțitor nenul) a două numere raționale vor fi, de asemenea, numere raționale. Din acest motiv, suma, diferența, produsul, câtul unui număr irațional şi a unui număr rațional nenul va fi un număr irațional. Într-adevăr, dacă, de exemplu, în egalitatea $a+b=c$, unde a – rațional, b – irațional, ar fi şi c – rațional, atunci din $b=c-a$ am obține că şi b trebuie să fie rațional. Contradicția ne confirmă cele spuse.

Dimpotrivă, suma, diferența, produsul, câtul a două numere iraționale pot fi numere raționale. De exemplu, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}\in\mathbf{I}$, însă $2+\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\in\mathbb{Z}$, $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})\in\mathbb{Z}$.

Exercițiu rezolvat

1. Să se arate că $a=(\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}$ este număr rațional.

Rezolvare:

$$a=(\sqrt{3}+2+3\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}=(2+4\sqrt{3})\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}=$$
$$=2\sqrt{3}+4(\sqrt{3})^2+5-2\sqrt{3}=12+5=17\in\mathbb{Q}.$$

2. Să se determine dacă $a=\frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}$ este un număr rațional.

Rezolvare:

$$a=\frac{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}{3\sqrt{5}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{9-6\sqrt{2}+2}}{3\sqrt{5}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3^2-2\cdot 3\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{|3-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{5}(3-\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.$$

Prin urmare, a nu este un număr rațional.

Reţineţi!

În practică, de regulă, pentru a estima suma, diferenţa, produsul sau câtul numerelor reale, se folosesc aproximările zecimale ale numerelor reale.

Proprietăţi ale operaţiilor de adunare şi înmulţire cu numere reale

Pentru orice numere reale x, y, z au loc egalităţile:

1° $x+y=y+x;\ x\cdot y=y\cdot x$ (comutativitatea);

2° $(x+y)+z=x+(y+z);\ (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (asociativitatea);

3° $x+0=x;\ x\cdot 1=x$ (existenţa elementului neutru);

4° $x+(-x)=0$ (existenţa elementului opus);

$x\cdot x^{-1}=x\cdot\frac{1}{x}=1,\ x\neq 0$ (existenţa elementului invers);

5° $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z;\ x\cdot(y-z)=x\cdot y-x\cdot z$ (distributivitatea);

6° $a>b>0\Rightarrow\sqrt{a}>\sqrt{b}$ şi $a^n>b^n,\ n\in\mathbb{N}$.

Ne amintim

Modulul numărului real a este numărul $|a|=\begin{cases}a, & \text{dacă } a\geq 0\\ -a, & \text{dacă } a<0.\end{cases}$

Ca şi pentru numerele raţionale, se poate demonstra

Teorema 1 **(proprietăţi ale modulului numărului real)**

Pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$, avem:

1° $|a|\geq 0, \forall a\in\mathbb{R}$, şi $|a|=0\Leftrightarrow a=0$;

2° $|a|=|-a|$;

3° $|a|\geq a$;

4° $|a|^2=|a^2|=a^2$;

5° $|a^n|=|a|^n,\ n\in\mathbb{N}^*$;

6° $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

7° $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\ b\neq 0$;

8° $|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a$;

9° $|a+b|\leq|a|+|b|$;

10° $|a-b|\geq\big||a|-|b|\big|$.

Amintim că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este adevărată egalitatea $\boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$, utilă pentru efectuarea diverselor transformări. De exemplu, proprietatea cunoscută $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a, b\in\mathbb{R}_+$, se va scrie $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\cdot\sqrt{|b|}$ pentru $a, b\in\mathbb{R}_-$.

A nu se confunda cu $(\sqrt{x})^2=x,\ x\in\mathbb{R}_+$.

§4 Proporţii. Procente

Noţiunea de proporţie e o reflectare a legilor naturii. E uşor de înţeles că dacă umbra (solară a) unei persoane e de 10 ori mai mică decât umbra unui stâlp vertical, atunci şi înălţimea acestei persoane e de 10 ori mai mică decât înălţimea stâlpului. La fel, dacă un agricultor recoltează de 1,5 ori mai multe lăzi cu mere decât alt agricultor, atunci şi remunerarea lui trebuie să fie de 1,5 ori mai mare decât remunerarea celuilalt agricultor.

În fiecare dintre situaţiile descrise participă 4 mărimi.

Definiţie

Se numeşte **proporţie** egalitatea a două rapoarte: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ a, c\in\mathbb{R},\ b, d\in\mathbb{R}^*$.
Numerele a şi d se numesc **termeni extremi**, iar b şi c – **termeni mezi** ai proporţiei.

Proprietatea fundamentală a proporţiei

Produsul extremilor este egal cu produsul mezilor: $\boldsymbol{a\cdot d=b\cdot c}$.

Exemplu rezolvat

Pentru vopsirea pe exterior a unei case se face un amestec de vopsea de 2 culori: albă şi galbenă. Raportul cantităților de vopsea (albă şi galbenă) este de $3:4$. Ce cantitate de vopsea de fiecare culoare trebuie procurată, dacă pentru toată casa este nevoie de 49 kg de amestec.

Rezolvare:

Notăm cu x cantitatea necesară de vopsea albă, atunci cantitatea de vopsea galbenă va fi $49-x$.

Conform condiției, trebuie sa fie adevarată proporția $\frac{3}{4}=\frac{x}{49-x}$, adică $3\cdot(49-x)=4x$ sau $7x=3\cdot 49$, de unde $x=21$ kg.

Astfel, trebuie procurate 21 kg de vopsea albă şi 28 kg de vopsea galbenă.

Răspuns: 21 kg de vopsea albă; 28 kg de vopsea galbenă.

Ne amintim

Pornind de la proporția $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se obțin o serie de alte proporții, numite **proporții derivate**, efectuând diverse operații:

- inversarea rapoartelor: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (dacă $a, c\neq 0$);
- schimbarea cu locul a extremilor, respectiv a mezilor: $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;
- adunarea la ambele părți ale egalității a unuia şi aceluiaşi număr:
  $\frac{a}{b}+k=\frac{c}{d}+k \Rightarrow \frac{a+kb}{b}=\frac{c+kd}{d}$.

În particular, pentru $k=1$ obținem $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, iar pentru $k=-1$ obținem $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

Problemă rezolvată

Adi instalează 1 m² de pavaj mozaic în 2 ore, iar Ion – în 3 ore. În cât timp ei vor instala 1 m² de pavaj lucrând impreună?

Rezolvare:

Cu ajutorul proporțiilor determinăm volumul de lucru efectuat de fiecare lucrător în acelaşi interval de timp: e comod pentru rezolvare să selectăm numărul 6 – cel mai mic multiplu comun al numerelor 2 şi 3. Deci, în 6 ore Adi va instala 3 m² de pavaj, iar Ion – 2 m². Astfel, lucrând împreună ei vor instala 5 m² de pavaj în 6 ore. Astfel 1 m² de pavaj ei îl vor instala în $\frac{6}{5}$ ore, sau în 1 oră şi 12 min.

Răspuns: În 1 oră şi 12 min.

Rapoarte de anumit gen se utilizează în domeniile financiar-bancar, antreprenoriat, în viața de zi cu zi etc.

Ne amintim

Un procent este a suta parte dintr-o mărime inițială (de bază) G. Pentru a calcula numărul T, care constituie $p\%$ dintr-un număr G, aplicăm proporția $\frac{G}{T}=\frac{100}{p}$ şi obținem formula $\boxed{T=\frac{G}{100}\cdot p}$.

Probleme rezolvate

1. Din cei 10000 de clienți ai unei bănci, 10% au perfectat depozite pe un termen mai mare de un an. Câți clienți de acest fel are banca?

Rezolvare:

Mărimea de bază $G = 10000$, numărul de procente $p = 10$, deci

$$T=\frac{10000}{100}\cdot 10=1000 \text{ (clienți)}.$$

Răspuns: 1000 de clienți au perfectate contracte pe un termen mai mare de un an.

- Pentru a afla numărul de procente p pe care îl constituie numărul T din mărimea de bază G, aplicăm formula:

$$\boxed{p\% = \frac{T}{G} \cdot 100\%}.$$

2. Din cele 800 de case dintr-o localitate, 560 sunt conectate la rețeaua de internet. Câte procente din totalul de case nu sunt conectate la internet?

Rezolvare:

Avem $G = 800$, $T = 800 - 560 = 240$.

Prin urmare, $p\% = \frac{240}{800} \cdot 100\% = \frac{3}{10} \cdot 100\% = 30\%$.

Răspuns: 30%.

- Pentru a determina un număr necunoscut (mărimea inițială) G, dacă se cunoaşte că un număr dat T constituie $p\%$ din G, aplicăm formula:

$$\boxed{G = \frac{T}{p} \cdot 100}.$$

Reţineţi!

1. Aceste probleme pot fi rezolvate (respectiv, aceste formule pot fi memorate) utilizând schema:

$$\begin{array}{l} G \ \ldots\ldots\ldots \ 100\% \\ T \ \ldots\ldots\ldots \ p\%, \end{array}$$

care exprimă faptul că mărimile T şi p sunt direct proporționale cu numărul de procente pe care îl reprezintă mărimea de bază G, adică este adevărată proporția $\frac{G}{T} = \frac{100}{p}$. Din egalitatea $G \cdot p = T \cdot 100$ se determină una din mărimi, fiind cunoscute celelalte.

2. Vorbind despre procente, neapărat trebuie să fie clar care este mărimea de bază. Uneori se face greşeală adunând procentele care se referă la diferite mărimi de bază.

Exemplu rezolvat

Cu ocazia sărbătorilor, prețul unui telefon a fost micşorat de 2 ori: prima dată cu 10%, iar apoi cu 5%. Cu câte procente este mai mic prețul final față de prețul inițial?

Rezolvare:

15% nu este răspunsul corect. Iată argumentul. Fie prețul inițial al telefonului a u.m.

După prima reducere, prețul a_1 se determină din relația: $\begin{array}{l} a \ \ldots \ 100\% \\ a_1 \ \ldots \ 90\%. \end{array}$ Deci, $a_1 = 0{,}9a$.

Prețul a_2, după a doua reducere, se determină din relația: $\begin{array}{l} 0{,}9a \ - \ 100\% \\ a_2 \quad\ - \ 95\%. \end{array}$

Deci, $a_2 = \frac{0{,}9a \cdot 95}{100} = \frac{17{,}1a}{20} = 0{,}855a$ – prețul telefonului după a doua reducere. Numărul de procente p, care constituie acest preț din cel inițial, se determina din relația:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a & \ldots \ 100\% \\ \frac{17{,}1a}{20} & \ldots \ p\%. \end{array}}$$

Astfel, $p\% = \frac{\frac{17{,}1a}{20} \cdot 100\%}{a} = 85{,}5\%$. Deci, prețul final e mai mic decât cel inițial cu $14{,}5\%$.

Răspuns: Cu $14{,}5\%$.

Procentele au o aplicare largă şi în domeniul financiar.

Exerciţii şi probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Să se scrie ca număr zecimal:

a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{4}{15}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{1}{8}$; e) $\frac{2}{25}$; f) $\frac{1}{125}$; g) $\frac{1}{6}$; h) $\frac{1}{9}$.

2. Să se scrie sub formă de fracţie numărul:

a) 0,(13); b) 2,(5); c) 1,(2); d) 0,(23); e) 1,2(7); f) 0,2(73).

3. ***Lucraţi în perechi!*** Să se determine dacă este un număr raţional valoarea expresiei numerice:

a) $\sqrt{2}+3$; b) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$;

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{8}-\sqrt{12})$; d) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$.

4. Să se scrie în casetă un număr, astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată.

„$\frac{\sqrt{64}}{2}=\boxed{}$."

5. Să se scrie în casetă unul dintre semnele $<$, $>$ sau $=$, astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată.

„$\sqrt{\frac{64}{9}}$ ● $\frac{3}{2}$."

6. ***Investigaţi!*** Să se decidă dacă pentru orice x din mulţimea indicată este adevărată egalitatea:

a) $\frac{x}{|x|}=1,\ x\in\mathbb{R}$; b) $x=-|x|,\ x\in\mathbb{R}_-$;

c) $(x-|x|)(x+|x|)=0,\ x\in\mathbb{R}$.

7. Fie proporţia $\frac{5}{x}=\frac{3y}{5}$. Să se calculeze $\left(xy-\frac{4}{3}\right)^2$.

8. Pot fi numerele 4, 6, 10, 15 termeni ai unei proporţii? Argumentaţi.

9. Să se calculeze 90 % din 120.

10. Sfecla de zahăr conţine 16 % de zahăr. De câte kilograme de sfeclă este nevoie pentru a obţine 100 kg de zahăr?

B

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia: a) $2x<3x+6$; b) $3-2x>7x-2$.

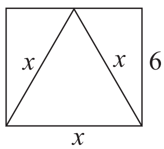
12. Temperatura apei în ocean, la suprafaţă, este de 14°C, iar la adâncimea de 44 m – de 2°C. Considerând că temperatura t a apei scade proporţional cu adâncimea h ($t=-ah+b$, $a>0$), să se determine temperatura la adâncimea de:

a) 22 m; b) 15 m.

13. ***Lucraţi în perechi!*** Să se compare:

a) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}$ cu $\sqrt{6+5\sqrt{7}}$; b) $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$ cu $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

14. Să se determine valoarea lui x din dreptunghiul alăturat.



15. ***Investigaţi!*** Va fi produsul $a\cdot b$ un număr raţional, dacă:

a) numerele a şi b sunt raţionale; b) numerele a şi b sunt iraţionale;

c) un număr este raţional nenul, iar celălalt – iraţional?

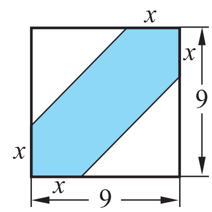
16. Relaţia dintre puterea P, intensitatea curentului I şi rezistenţa R într-un circuit electric este: $P=I^2\cdot R$. Care va fi intensitatea curentului, dacă se conectează o sursă de puterea 1200W cu rezistenţa de $500\ \Omega$?

17. Fie $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$. Să se calculeze $\frac{2x+3y}{5y}$.

18. Să se calculeze $(bc)^2-6ad$, dacă $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ şi $a\cdot d=8$.

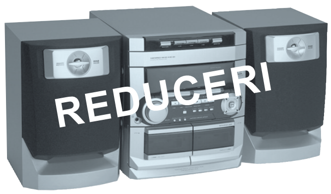
19. Preţul unui obiect este de 400 de lei. Să se calculeze preţul nou dacă ecesta: a) creşte cu 20 %; b) scade cu 20 %.

20. O persoană deţine un depozit la o bancă cu rata anuală a dobânzii de 6 %. Care va fi suma acumulată peste 2 ani, dacă cea iniţială constituie 5000 u.m. şi dobânda acumulată după un an se adaugă la suma iniţială.



21. Să se determine valoarea lui x din desen, dacă aria porţiunii colorate reprezintă 60 % din aria pătratului.

22. Să se arate că $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, dacă $b > a > 0$.



23. ***Investigaţi!*** Trei magazine oferă reduceri pentru acelaşi centru muzical:

a) preţul este de 99 u.m. şi se oferă o reducere de 25 % din preţ;

b) preţul este de 111 u.m. şi se oferă o reducere de $\frac{1}{3}$ din preţ;

c) preţul este de 125 u.m. şi se oferă o reducere de 50 u.m.

Care va fi cel mai mic preţ final?

24. Parlamentul Republicii Moldova este format din 101 membri. Câte locuri îi revin unei coaliţii, dacă ea a acumulat aproximativ $\frac{2}{5}$ din voturile participanţilor la scrutin?

25. Să se calculeze 25 % din numărul ce constituie 40 % din 120.

26. Preţul unui obiect este de 300 de lei. Care este preţul final dacă la început acesta creşte cu 20 %, apoi, după o perioadă, scade cu 20 %?

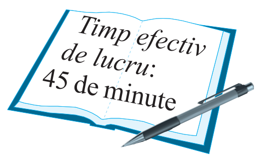
C

27*. Să se dea un exemplu de număr iraţional situat între 0,62711 şi 0,62712.

28. Să se determine a, b, c dacă $\frac{a}{5} = \frac{b}{11} = \frac{c}{9}$ şi $a + b + c = 75$.

29. ***Lucraţi în grup!*** **Proiect:** *Numerele guvernează lumea.*

Test sumativ



Profilurile umanistic, arte, sport

În itemii 1, 2 indicaţi litera care corespunde variantei corecte.

1. Mulţimea numerelor reale x pentru care se verifică inegalitatea $|x| \le |-x|$ este

A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}^*_-$. **C** $\mathbb{R}$. **D** $\mathbb{R}^*$.

2. Suma oricăror două numere iraţionale

A este un număr raţional.

B este un număr iraţional.

C nu se poate determina dacă este un număr raţional sau iraţional.

D este un număr întreg.

3. Scrieţi în casetă unul dintre semnele <, >, astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată.

„ $5\sqrt{3}$ ⬤ $4\sqrt{5}$. ”

Argumentaţi!

4. Verificaţi dacă este adevărată propoziţia: $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}} = \frac{2}{3}$.

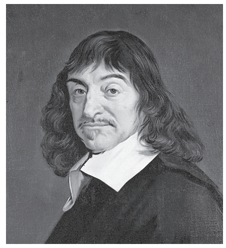
5. Care este preţul final al unui obiect dacă iniţial acesta costa 200 de lei, apoi preţul a fost scăzut cu 20 %, după care, din nou, a mai fost scăzut cu 20 %?

6. Umbra unui copac este de 3 ori mai scurtă decât înălţimea lui. În aceleaşi condiţii, umbra unui pilon are lungimea de 6 m. Care este înălţimea pilonului?

MODULUL 2

Elemente de logică matematică şi de teoria mulțimilor

Mă îndoiesc, deci cuget; cuget, deci exist.
René Descartes



René Descartes (1596–1650) – matematician francez

Obiective

- *recunoaşterea şi utilizarea în diverse contexte a noțiunilor: *propoziție*, *valoare de adevăr*, *cuantificator*, *teoremă*, *ipoteză*, *concluzie*, *teoremă directă*, *teoremă reciprocă*, *axiomă*, *condiții necesare*, *condiții suficiente*, *condiții necesare şi suficiente*;
- investigarea valorii de adevăr a unei propoziții cu ajutorul exemplelor, contraexemplelor, proprietăților operațiilor;
- folosirea în diverse contexte a terminologiei aferente teoriei mulțimilor;
- aplicarea relațiilor de incluziune şi egalitate între mulțimi, a relației de apartenență a elementelor unei mulțimi;
- efectuarea operațiilor cu mulțimi; reprezentarea analitică, sintetică, geometrică a rezultatelor obținute;
- *folosirea în diverse contexte a proprietăților de bază ale operațiilor cu mulțimi;
- *aplicarea terminologiei aferente inducției matematice în situații reale şi/sau modelate;
- *aplicarea metodei inducției matematice la demonstrația identităților numerice, la demonstrația unor propoziții.

§1 Mulțimi

1.1. Noțiunea de mulțime

Există noțiuni şi relații matematice care nu pot fi descrise prin reducerea lor la alte noțiuni. Printre acestea sunt noțiunile *mulțime*, *element al unei mulțimi* (relația de *apartenență*). Aceste noțiuni se exemplifică, se tălmăcesc.

Astfel, o ***mulțime*** este o colecție (totalitate) de obiecte oarecare, bine determinate şi distincte numite ***elementele mulțimii***. De regulă, mulțimile se notează cu majusculele alfabetului latin, iar elementele lor – cu minusculele acestui alfabet.

Ne amintim

O mulțime poate fi definită în următoarele moduri:
1) prin enumerarea (numirea) elementelor mulțimii (modul sintetic);
2) prin enunțarea unei proprietăți caracteristice a elementelor mulțimii (modul analitic) (exercițiul rezolvat ce urmează);
3) cu ajutorul unei diagrame Euler-Venn (fig. 2.1).

Mulțimea care conține un număr finit de elemente se numeşte ***finită***. În caz contrar, mulțimea se numeşte ***infinită***.

Rețineți!

Numărul de elemente ale unei mulțimi finite M se numeşte ***cardinalul*** acestei mulțimi şi se notează cu $|M|$ sau **card** M. Mulțimea care nu are niciun element se numeşte ***mulțime vidă*** şi se notează cu $\varnothing$; card$\varnothing = 0$.

Exerciţiu rezolvat

Să se enumere elementele mulţimilor (definite cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice a elementelor):

$A=\{x\in\mathbb{R} \mid 2x^2+3x+1=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2x^2+3x+1=0\}$, $C=\{x\in\mathbb{N} \mid 2<x \text{ şi } x<1\}$.

Rezolvare:

Rezolvăm ecuaţia $2x^2+3x+1=0$ şi obţinem: $A=\left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$, $B=\{-1\}$. Mulţimea C nu conţine niciun element, adică $C=\varnothing$.

1.2. Submulţimi, mulţimi egale

Definiţie

Mulţimea A se numeşte **submulţime** a mulţimii B dacă orice element al mulţimii A este element şi al mulţimii B.

Se notează: $A\subseteq B$.

Relaţia $A\subseteq B$ se numeşte ***relaţie de incluziune*** şi se citeşte „A este inclusă în B” sau „A este submulţime a mulţimii B”.

Definiţie

Mulţimile A şi B se numesc **egale** dacă $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A$.

Se notează: $A = B$.

Mulţimile egale conţin aceleaşi elemente.

Exemple

1. Mulţimile $A=\{1, 3\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-4x+3=0\}$ sunt egale, deoarece $A\subseteq B$ şi $B\subseteq A$.

2. Mulţimile $A=\{2, 3, 1, 7\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 1\le x\le 7\}$ nu sunt egale, deoarece B nu este o submulţime a mulţimii A $(6\in B,\ 6\notin A)$.

Mulţimea submulţimilor mulţimii A se numeşte ***booleanul mulţimii*** A şi se notează cu $\mathcal{B}(A)$. Booleanul mulţimii A este o mulţime nevidă (chiar dacă A este mulţime vidă), deoarece mulţimii $\mathcal{B}(A)$ îi aparţin cel puţin mulţimea A şi mulţimea $\varnothing$.

Teorema 1

Dacă mulţimea A conţine n elemente, $n\in\mathbb{N}$, atunci mulţimea $\mathcal{B}(A)$ conţine 2^n elemente.

Reţineţi!

$\boxed{\operatorname{card}\mathcal{B}(A)=2^n,}$ dacă $\operatorname{card} A=n$.

Exemplu

Dacă $A=\{\text{o}, \Delta, a\}$, atunci: $\operatorname{card} A = 3$;

$\mathcal{B}(A) = \{\varnothing, \{\text{o}\}, \{\Delta\}, \{a\}, \{\text{o}, \Delta\}, \{\text{o}, a\}, \{\Delta, a\}, \{\text{o}, \Delta, a\}\}$; $\operatorname{card}\mathcal{B}(A)=2^3=8$.

1.3. Operaţii cu mulţimi

Ne amintim 1 ***Reuniunea mulţimilor***

Definiţie

Se numeşte **reuniunea** a două mulţimi A şi B mulţimea care constă din toate elementele ce aparţin cel puţin uneia dintre mulţimile A sau B.

Reuniunea mulţimilor A şi B se notează $\boldsymbol{A\cup B}$ şi se citeşte „**A reunită cu B**”.
Prin urmare, $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ sau } x\in B\}$ (fig. 2.1 a) – porţiunea haşurată).

2 *Intersecţia mulţimilor*

Definiţie

Se numeşte **intersecţia** a două mulţimi A şi B mulţimea care constă din toate elementele ce aparţin şi lui A, şi lui B.

Intersecţia mulţimilor A şi B se notează $\boldsymbol{A \cap B}$ şi se citeşte „***A* intersectat cu *B***”.

Deci, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}$ (fig. 2.1 b) – porţiunea haşurată).

Mulţimile A şi B se numesc ***disjuncte*** dacă $A \cap B = \varnothing$, adică dacă nu au niciun element comun.

3 *Diferenţa a două mulţimi*

Definiţie

Se numeşte **diferenţa** mulţimilor A şi B (în această ordine) mulţimea care constă din toate elementele ce aparţin mulţimii A şi nu aparţin mulţimii B.

Diferenţa mulţimilor A şi B se notează cu $\boldsymbol{A \setminus B}$ sau $\boldsymbol{A - B}$ şi se citeşte „***A* minus *B***”.

Aşadar, $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\}$ (fig. 2.1 c) – porţiunea haşurată).

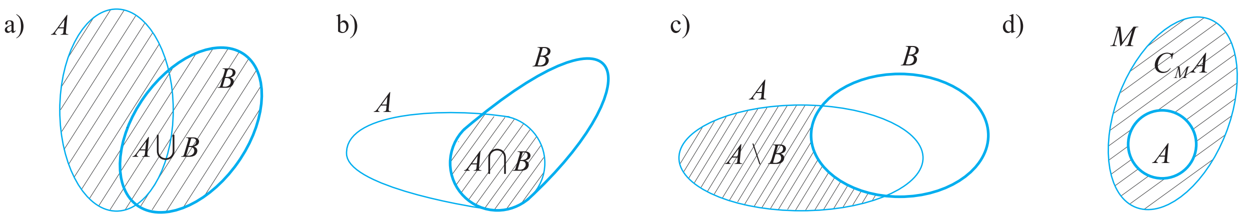


Fig. 2.1

Dacă $A \subseteq M$, atunci $M \setminus A$ se numeşte ***complementara în M a submulţimii A*** şi se notează $C_M A$ (fig. 2.1 d)

4 *Produs cartezian*

Definiţie

Se numeşte **produs cartezian** a două mulţimi nevide A şi B mulţimea perechilor ordonate (x, y), $x \in A$, $y \in B$.

Produsul cartezian al mulţimilor A şi B se notează cu $\boldsymbol{A \times B}$ şi se citeşte „***A* ori *B***”.

Deci, $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Exemple

1. Dacă $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$, atunci $A \cup B = \{1, 2, a, b, c\}$, $A \cap B = \varnothing$, $B \setminus A = \{a, b, c\}$.

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, iar

$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$.

2. Produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ joacă un rol important în matematică, fizică şi în alte domenii. Perechile de coordonate ale punctelor dintr-un sistem de axe ortogonale reprezintă, de fapt, elemente ale produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (vezi imaginea).

3. Produsul cartezian al mulţimilor $M_1 = [1, 2]$, $M_2 = [0, 3]$ reprezintă geometric punctele dreptunghiului cu vârfurile în punctele $A = (1, 0)$, $B = (1, 3)$, $C = (2, 3)$, $D = (0, 2)$.

În caz general $A \times B \neq B \times A$ (vezi exemplul 1).

5 *Proprietăţi ale operaţiilor cu mulţimi*

Operaţiile cu mulţimi posedă un şir de proprietăţi, unele dintre ele fiind similare cu proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire cu numerele reale.

Teorema 2

Pentru orice mulţimi A, B, C, avem:

1° $A \cup B = B \cup A$;	1°′ $A \cap B = B \cap A$;
2° $A \cup A = A$;	2°′ $A \cap A = A$;
3° $A \cup \varnothing = A$;	3°′ $A \cap \varnothing = \varnothing$;
4° $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;	4°′ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5° * $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;	5°′ * $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
6° * $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.	6°′ * $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Exerciţii rezolvate

1. Să se arate că $A \cup B = B$, dacă $A \subseteq B$.

Rezolvare:

Evident, $B \subseteq A \cup B$. Pentru a obţine egalitatea cerută, e suficient să arătăm incluziunea inversă: $A \cup B \subseteq B$.

Fie $x \in A \cup B$. Atunci $x \in A$ sau $x \in B$. Dacă $x \in A$, atunci $x \in B$ (din condiţia că $A \subseteq B$). Astfel, $x \in B$, ceea ce implică $A \cup B \subseteq B$ şi, în final, $A \cup B = B$.

2. Să se determine reuniunea mulţimilor $A = \mathbb{Z}_-$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 100\}$, $C = \mathbb{Z}_+$.

Rezolvare:

În baza proprietăţilor 1°, 4°, obţinem:

$$M = A \cup (B \cup C) = A \cup (C \cup B) = (A \cup C) \cup B = (\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+) \cup B.$$

Deoarece $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}$ şi $B \subseteq \mathbb{Z}$, rezultă că $M = \mathbb{Z} \cup B = \mathbb{Z}$.

Exerciţii şi probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

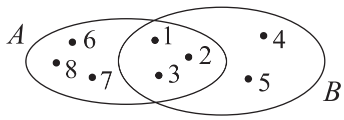
1. a) Să se determine elementele mulţimii A, ştiind că ele sunt numere naturale mai mici decât 50 care se divid cu 4.
b) Să se afle cardinalul mulţimii A.

2. Fie $X = \{x \mid x$ literă a cuvântului „maternitate”$\}$.
a) Să se enumere elementele mulţimii X.
b) Să se reprezinte mulţimea X printr-o diagramă.
c) Să se afle cardinalul mulţimii X.

3. Ştiind că $A \subset \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $\text{card}\, A = 5$, să se determine mulţimea A. Câte mulţimi A sunt?

4. Fie mulţimile:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 > 0\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 < 0\}$.
Să se stabilească dacă sunt egale mulţimile A şi B şi să se determine mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$.

5. Mulţimile A şi B sunt reprezentate în diagrama alăturată.
Să se determine:
a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.



6. a) Să se scrie toate submulţimile mulţimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ care includ mulţimea $B = \{1, 3\}$.
b) Să se afle $C_A B$.

7. *Investigaţi!* Să se verifice dacă sunt egale mulţimile:
a) $\{1, -1\}$ şi $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$; b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 7\}$ şi $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

8. *Lucraţi în perechi!* Fie mulţimile $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi $B=\mathbb{N}$.
Să se determine mulţimea:
a) $A\bigcup B$; b) $A\bigcap B$; c) $A\setminus B$; d) $B\setminus A$; e) $C_B A$.

9. Să se determine cardinalul booleanului mulţimii:
a) $A=\{1, 2, 3\}\bigcup\{2, 4, 6\}$; b) $B=\{1, 2, 3\}\bigcap\{2, 4, 6\}$.

B

10. Să se scrie trei numere care satisfac condiţiile:
a) $a\in\mathbb{Z}$ şi $a\notin\mathbb{N}$; b) $a\in\mathbb{Z}$ şi $|a|<5$.

11. Fie mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Să se determine care dintre ele are ca element:
a) 2; b) $\sqrt{17}$; c*) valoarea expresiei $(2-\sqrt{3})^2+4\sqrt{3}$.

C

12. Să se determine produsul cartezian $A\times B$ al mulţimilor A şi B, dacă:
a) $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 3\}$; b) $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x, y, z\}$.
Este adevărat că $A\times B\neq B\times A$? Argumentaţi.

13. *Investigaţi!* Fie mulţimile de numere naturale $A=\{x+7, 2x-5, 3x+1\}$ şi $B=\{2x+3, x+9, 4x-13\}$, $x\in\mathbb{N}$. Există valori naturale ale lui x pentru care $A=B$? Să se afle aceste valori, în cazul că ele există.

Profilul real

A_1

1. *Investigaţi!* Să se verifice dacă sunt egale mulţimile $\{\sqrt{2}\}$ şi $\{x\in\mathbb{R}_+ \mid x^2-2=0\}$.

2. Fie mulţimile $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-2x-3\geq 0\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-36<0\}$.
Să se determine mulţimea:
a) $B\setminus A$; b) $A\setminus B$; c) $A\bigcup B$; d) $A\bigcap B$.

3. Să se determine card A, booleanul mulţimii A, card $\mathcal{B}(A)$, dacă $A=[0, 4)\bigcap\mathbb{Z}$.

B_1

4. Să se determine toate numerele reale a care satisfac condiţiile:
a) $a\in\mathbb{R}$ şi $a\notin\mathbb{Q}$; b) $a\in\mathbb{N}$ şi $2<|a|<10$.

5. *Lucraţi în perechi!* Fie mulţimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Să se determine care dintre ele are ca element:
a) $-\sqrt{2}$; b) $|\sqrt{3}-2|-\sqrt{3}$; c) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$.

C_1

6. Fie mulţimile A, B, C. Să se demonstreze egalitatea:
a) $A\bigcap(B\setminus C)=(A\bigcap B)\setminus C$; b) $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$.

7. Să se determine mulţimea valorilor reale ale lui m pentru care este adevărată propoziţia:
a) $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-3x+m=0\}\bigcap\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-4x+4=0\}=\varnothing$.
b) $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-3x-4\leq 0\}\bigcap\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-m<0\}=\varnothing$.

8*. *Investigaţi!* Fie mulţimile A, B, C. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) Dacă $C\bigcup A=C\bigcup B$, atunci $A=B$. b) Dacă $C\bigcap A=C\bigcap B$, atunci $A=B$.
Să se aducă exemple de astfel de mulţimi.

§2 Elemente de logică matematică

2.1. Noţiunea de propoziţie. Recapitulare şi completări

Ne amintim

Problemă

Fie enunţurile:

1. Oraşul Chişinău este capitala Republicii Moldova. 2. $3x^2 - x = 0.$
3. Orice pătrat este romb. 4. $\sqrt{3} = 3.$

a) Să se determine care dintre aceste enunţuri sunt propoziţii. Argumentaţi răspunsul.
b) Să se determine valoarea de adevăr a fiecărei propoziţii.

În logica matematică se numeşte ***propoziţie*** un enunţ despre care se poate spune cu certitudine că este **adevărat** sau **fals**.

Propoziţiile se vor nota cu minusculele alfabetului latin, de exemplu: $a, b, c, p, q, ...$

Revenind la problemă, constatăm că enunţurile 1, 3, 4 sunt propoziţii, fiindcă ne putem pronunţa cu certitudine despre valoarea de adevăr a acestora: enunţurile 1 şi 3 sunt propoziţii adevărate, iar enunţul 4 este propoziţie falsă. Referitor la valoarea de adevăr a enunţului 2, $3x^2 - x = 0,$ nu ne putem pronunţa, deoarece, de exemplu, pentru $x = 0$ se obţine o propoziţie adevărată, iar pentru $x = 1$, o propoziţie falsă, însă valoarea lui x nu se cunoaşte.

Observaţie

Spre deosebire de enunţul 2, sunt egalităţi (inegalităţi) care conţin variabile şi totuşi sunt propoziţii, fiindcă ele se transformă în egalităţi (inegalităţi) numerice adevărate, oricare ar fi valorile variabilelor dintr-un anumit domeniu.
Ca exemplu pot servi proprietăţile operaţiilor cu numere reale: $x + 0 = 0 + x,\ x \cdot y = y \cdot x,$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ ş.a.

Pornind de la propoziţiile p, q, cu ajutorul operatorilor logici „**şi**”, „**sau**”, „**non**” („**nu**”), „**dacă**..., **atunci**...”, se obţin ***propoziţii*** (***compuse***): „p şi q”, „p sau q”, „non p” ş.a.m.d. De exemplu, pentru propoziţiile adevărate p: „2 este un număr natural”, q: „–3 este număr întreg”, se poate forma propoziţia: „2 este număr natural **şi** –3 este număr întreg” şi ea este adevărată.

În continuare, ne vom preocupa de o altă clasificare a propoziţiilor: *propoziţii particulare*, *propoziţii generale*. Să examinăm propoziţiile:

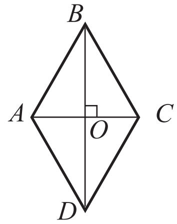
1. Numărul 171 este divizibil cu 3.
2. Orice număr întreg este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor din scrierea sa zecimală este divizibilă cu 3.
3. Numărul 2 este soluţie a ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0.$
4. Oricărui poligon regulat i se poate circumscrie un cerc.

După gradul de generalitate, propoziţiile 1 şi 3 se referă la cazuri particulare, sunt ***propoziţii particulare***, iar propoziţiile 2 şi 4 au caracter general, se referă la un element arbitrar al unei mulţimi – sunt ***propoziţii generale***. Formularea propoziţiilor generale poate fi mai compactă dacă utilizăm ***cuantificatorul universal*** $(\forall)$ (se citeşte „pentru orice”, „oricare ar fi”) sau ***cuantificatorul existenţial*** $(\exists)$ (se citeşte „există”). De exemplu, propoziţia „Pentru orice număr real x, se îndeplineşte condiţia $x^2 + 1 \geq 0$” se va scrie $(\forall x \in \mathbb{R})$ $(x^2 + 1 \geq 0).$ Propoziţia „Există un poligon regulat ale cărui unghiuri interioare sunt de 110°” se poate scrie $(\exists x \in M)$ (unghiurile interioare ale lui x sunt de 110°), unde M este mulţimea tuturor poligoanelor regulate dintr-un plan.

Printre propoziţiile matematice, un loc aparte îl ocupă teoremele şi axiomele. ***Teoremele*** sunt propoziţii generale care, de obicei, necesită demonstraţii, adică argumentarea riguroasă a faptului că ele sunt adevărate. Pe parcursul demonstraţiei se utilizează alte propoziţii adevărate, unele dintre ele fiind teoreme (deja demonstrate), iar altele pot fi axiome. ***Axiomele*** sunt propoziţii considerate adevărate fără a fi demonstrate (nici nu pot fi demonstrate). Ele denotă unele cerinţe şi proprietăţi (eventual general recunoscute) pentru noţiunile şi obiectele studiate în cadrul unor teorii riguros construite. Axiome sunt, de exemplu, propoziţiile: „Două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una”, „Prin orice punct exterior unei drepte se poate duce o unică paralelă cu dreapta dată”.

Majoritatea teoremelor din matematică au (sau pot fi scrise în) una dintre formele: „Dacă A, atunci B” sau „A dacă şi numai dacă B”.

Exemple



1. Dacă un patrulater este romb, atunci diagonalele lui sunt perpendiculare.

2. Numărul întreg a este divizibil cu 5 dacă şi numai dacă ultima cifră din scrierea zecimală a lui a este 0 sau 5.

În teoremele/enunţurile de forma „Dacă A, atunci B”, condiţia A se numeşte ***condiţie suficientă*** (pentru B), iar B – ***condiţie necesară*** (pentru A). În teoremele de forma „A dacă şi numai dacă B”, condiţiile A, B se numesc ***condiţii echivalente*** sau ***condiţii necesare şi suficiente***, adică A este condiţie necesară şi suficientă pentru B, iar B – condiţie necesară şi suficientă pentru A.

3. În teorema: „Dacă un număr natural este divizibil cu 6, atunci el este divizibil cu 2”, condiţia „un număr natural este divizibil cu 6” este condiţie suficientă pentru condiţia „numărul natural este divizibil cu 2”, care, la rândul său, este condiţie necesară pentru prima.

4. În teorema din exemplul **2**, condiţiile „numărul întreg a este divizibil cu 5” şi „ultima cifră din scrierea zecimală a numărului întreg este 0 sau 5” sunt echivalente.

Orice teoremă include următoarele componente structurale: ***partea explicativă***, ***ipoteza***, ***concluzia***.

Partea explicativă a teoremei indică mulţimea de obiecte în cadrul căreia este adevărată propoziţia enunţată prin teoremă. În unele cazuri, partea explicativă este prezentă explicit, în alte cazuri – implicit.

Orice teoremă de tipul „Dacă A, atunci B” poate fi scrisă sub forma

$$(x \in M)(A(x) \Rightarrow B(x)),$$

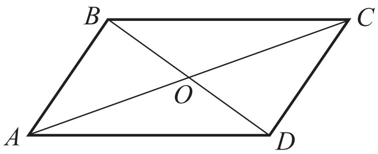
unde $x \in M$ este partea explicativă, $A(x)$ – ipoteza, $B(x)$ – concluzia.

5. Considerăm teorema: „Fie p un patrulater convex din planul α. Dacă p este romb, atunci diagonalele lui sunt perpendiculare”.

Partea explicativă a teoremei este „p este un patrulater convex din planul α”, ipoteza teoremei – „p este romb”, concluzia teoremei – „diagonalele lui p sunt perpendiculare”.

Schimbând locurile ipotezei şi concluziei teoremei „Dacă A, atunci B”, obţinem o altă propoziţie: „Dacă B, atunci A”, numită ***reciproca teoremei***, o nouă teoremă, care poate fi adevărată sau falsă. În cazul în care reciproca „Dacă B, atunci A” este adevărată, teorema iniţială se numeşte ***teoremă directă***, iar reciproca ei – ***teoremă reciprocă***. Teorema reciprocă se scrie $(x \in M)(B(x) \Rightarrow A(x))$.

6. Reciproca teoremei: „Dacă un număr întreg a este divizibil cu 6, atunci el este divizibil cu 2” este: „Dacă un număr întreg a este divizibil cu 2, atunci el este divizibil cu 6”, care este o propoziţie falsă. Aceasta se verifică printr-un *contraexemplu*: numărul 4 este divizibil cu 2, dar nu este divizibil cu 6.



7. Reciproca teoremei: „Dacă punctul de intersecţie a diagonalelor unui patrulater este mijlocul lor, atunci acest patrulater este paralelogram” este: „Dacă un patrulater este paralelogram, atunci punctul de intersecţie a diagonalelor lui este mijlocul fiecărei diagonale” – propoziţie adevărată, deci este teoremă.

Dacă pentru teorema „Dacă A, atunci B” este adevărată reciproca ei, atunci condiţiile A şi B sunt echivalente, deci este adevărată teorema „A dacă şi numai dacă B”. Astfel, teoremele directă şi reciprocă din exemplul **7** pot fi formulate ca o singură teoremă: „Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului este mijlocul lor”. Adică $(x \in M)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$.

Se cunoaşte din gimnaziu ***metoda reducerii la absurd*** de demonstraţie a teoremelor de forma „Dacă A, atunci B”. Ea reprezintă un raţionament prin care se presupune că ceea ce trebuie demonstrat (concluzia B) nu este adevărat şi, prin deducţii logice, această presupunere duce la o contradicţie (absurditate). Atunci rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci concluzia iniţială este adevărată.

Exemplu

Să demonstrăm prin metoda reducerii la absurd propoziţia: „Dacă un număr întreg a nu este divizibil cu 3, atunci el nu este divizibil cu 6”. Presupunând contrariul, că a este divizibil cu 6, vom arăta că a este divizibil cu 3. Într-adevăr, întrucât a este divizibil cu 6, el poate fi scris sub forma $a = 6t$, $t \in \mathbb{Z}$, sau $a = 3 \cdot (2t)$, $2t \in \mathbb{Z}$. Deci, a este divizibil cu 3, ceea ce contrazice ipoteza. În baza metodei reducerii la absurd, deducem că propoziţia iniţială este adevărată.

O altă metodă prin care se demonstrează unele propoziţii este expusă în secvenţa 2.2.

2.2. Inducţia matematică

Procedeele de obţinere a propoziţiilor particulare din altele generale sau invers se aplică pe larg, deoarece orice teorie în matematică (şi nu numai) se construieşte în mod deductiv, prin care toate propoziţiile (teoremele) se obţin din altele, adevărate.

Raţionamentul logic prin care din propoziţii generale se obţin propoziţii particulare se numeşte ***deducţie***.

Exemplu

Propoziţia generală „Orice ecuaţie de gradul II cu coeficienţi reali care are discriminantul negativ are soluţii reale” se referă la toate elementele mulţimii ecuaţiilor de gradul II cu coeficienţi reali şi cu discriminant nenegativ, deci este o propoziţie generală.

Propoziţia „Ecuaţia $2x^2 + x - 5 = 0$ are soluţii reale” se referă la un element concret al mulţimii menţionate, deci este o propoziţie particulară.

Fie $P(x)$ un enunţ ce se referă la un element arbitrar x, $x \in M$. Dacă o propoziţie generală $(\forall x \in M)P(x)$ este adevărată, atunci, prin deducţie, din ea se obţin propoziţii particulare adevărate: $P(a)$ pentru $x = a$.

Propoziţii adevărate se pot obţine folosind raţionamentul logic numit ***inducţie***. Cu ajutorul lui, din propoziţii particulare se obţin propoziţii generale. Se aplică ***inducţia incompletă***, pentru care propoziţia generală se formulează în baza examinării *unor* cazuri particulare, şi ***inducţia completă***, pentru care propoziţia generală se formulează în baza examinării *tuturor* cazurilor particulare posibile.

Prin inducţia incompletă se pot obţine propoziţii generale care s-ar putea să fie adevărate, dar s-ar putea să fie şi false. Însă prin inducţia completă se obţin propoziţii generale neapărat adevărate.

Exemplu

Fie propoziţiile particulare „$1+2<11$” şi „$1+3<11$” adevărate . În baza acestor propoziţii se pot forma mai multe propoziţii generale:
p: „Suma oricăror două numere naturale este mai mică decât 11”;
q: „Suma oricăror două numere naturale pozitive mai mici decât 4 este mai mică decât 11”.

Propoziţia p este falsă, iar propoziţia q este adevărată, ceea ce se poate stabili prin examinarea tuturor propoziţiilor particulare:

$$1+1<11,\ \ 1+2<11,\ \ 1+3<11,\ \ 2+2<11,\ \ 2+3<11,\ \ 3+3<11.$$

Încă o metodă de demonstraţie a propoziţiilor generale (teoremelor) este ***metoda inducţiei matematice***.

Dacă pentru un enunţ $P(n),\ n\in\mathbb{N},$ este adevărată propoziţia particulară $P(0)$ (sau $P(m)$, m – număr natural fixat) şi din presupunerea că este adevărată propoziţia $P(k)\ (k>m)$ rezultă că este adevărată propoziţia $P(k+1)$, atunci este adevărată propoziţia generală $(\forall n\in\mathbb{N})P(n)$ (respectiv $n\geq m$).

Menţionăm că această metodă se poate aplica doar la propoziţiile a căror esenţă ţine de numerele naturale. Demonstraţia prin metoda inducţiei matematice a propoziţiei $(\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq m)\ P(n)$ se efectuează în 3 etape.

1. Se verifică dacă propoziţia particulară $P(m)$ este adevărată.
2. Utilizând ipoteza că propoziţia $P(k),\ k\geq m,$ este adevărată, se demonstrează că este adevărată şi propoziţia $P(k+1)$.
3. Dacă ambele etape ale demonstraţiei sunt verificate, atunci este adevărată propoziţia $(\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq m)P(n)$.

Exerciţiu rezolvat

Aplicând metoda inducţiei matematice, să se arate că pentru orice număr natural nenul n este verificată egalitatea:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Rezolvare:

Folosind cuantificatorul universal, această propoziţie generală poate fi scrisă sub forma $(\forall n\in\mathbb{N}^*)P(n)$, unde $P(n)$ semnifică „$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$”.

Parcurgem etapele metodei inducţiei matematice.

1. Pentru $m=n=1$ se obţine propoziţia particulară $1=\frac{1(1+1)}{2}$ şi ea este adevărată.

2. Presupunem că pentru un oarecare k natural este adevărată propoziţia $P(k)$: $1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Utilizând această egalitate, vom verifica dacă este adevărată propoziţia $P(k+1)$: $1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

Procedăm astfel:

$$(1+2+\ldots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Prin urmare, propoziţia $P(k+1)$ este adevărată.

3. În baza metodei inducţiei matematice, rezultă că egalitatea $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Exerciţii şi probleme propuse

Profilul real

A₁

1. *Investigaţi!* Să se determine care dintre următoarele enunţuri sunt propoziţii şi să se afle valorile de adevăr ale acestora.
a) Temperatura de fierbere a apei la presiunea atmosferică de 760 mm ai coloanei de mercur este de 110°C.
b) Poligonul *ABCD* este un pătrat.
c) Greutatea specifică a apei de mare diferă de cea a apei distilate.

2. *Investigaţi!* Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) $(\forall x\in M)$ (măsura unghiurilor alăturate bazei unui triunghi isoscel este de 30°), unde M este mulţimea triunghiurilor isoscele dintr-un plan.
b) $(\exists x\in U)$ (măsurile unghiurilor interioare ale triunghiului x nu depăşesc 50°), unde U este mulţimea triunghiurilor echilaterale dintr-un plan.
c) $(\exists x\in\mathbb{Z})\ (x^2-x-1=0)$.
d) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (x^2-x-2=0)$.

A/F

3. Să se formuleze propoziţii particulare obţinute din propoziţia generală:
a) Orice număr natural divizibil cu 10 este divizibil cu 5.
b) Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu n laturi este egală cu $180°(n-2)$.

4. *Lucraţi în perechi!* Să se determine componentele structurale ale:
a) teoremei lui Pitagora;
b) teoremei: „Măsura unghiurilor interioare ale unui triunghi echilateral este de 60°”.

B₁

5. *Investigaţi!* Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) Temperatura de fierbere a apei în munţi (circa 900 m deasupra nivelului mării) este mai mică decât 100°C.
b) $\sqrt{725}\in\mathbb{Q}$.

A/F

6. *Investigaţi!* Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) $(\exists x\in\mathbb{N})\ (x^2-x-2=0)$.
b) $(\exists x\in\mathbb{R})\ (x^2-x-2=0)$.
c) $(\exists x\in\mathbb{R})\ (|x+2|+|x+3|=0)$.
d) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (|x+2|+x^2-x+1>0)$.

A/F

7. Fie teorema: „Dacă patrulaterul *ABCD* este un romb, atunci diagonalele lui sunt perpendiculare”. Să se formuleze reciproca acestei teoreme, apoi să se determine valoarea ei de adevăr.

8. Aplicând metoda inducţiei matematice, să se demonstreze că pentru orice n, $n\in\mathbb{N}^*$, este adevărată propoziţia:
a) $1+2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.
b) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.
c) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
d) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
e) $(7^n+3n-1)\ \vdots\ 9$;
f) $(\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 3)\ (2^n>n^3)$.

9. Fie teorema: „Dacă numerele a, b sunt raţionale, atunci suma $a+b$ este un număr raţional”. Să se formuleze reciproca şi să se determine valoarea ei de adevăr.

C_1

10. Utilizând metoda reducerii la absurd, să se arate că este adevărată propoziţia: „Dacă un număr întreg a nu este divizibil cu 2, atunci el nu este divizibil cu 10”.

11*. ***Investigaţi!*** Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) Există un poligon regulat ale cărui unghiuri interioare au măsura de 110°.
b) Cifra unităţilor numărului 7^{162} este 3.

Exerciţii şi probleme recapitulative

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Fie mulţimile $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5, 9\}$. Să se determine $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\times B$.

2. ***Investigaţi!*** Să se determine care dintre următoarele enunţuri sunt propoziţii şi să se afle valorile de adevăr ale acestora.
a) $\sqrt{3}$ este număr real.
b) Greutatea specifică a gheţii este mai mică decât cea a apei.
c) Atena este zeiţa înţelepciunii în mitologia greacă.
d) Organizaţia Naţiunilor Unite (ONU) a fost fondată în 1945, pentru a instaura în toate ţările regimuri de aceeaşi orientare.
e) Piramidele egiptene au fost construite în secolul al XVI-lea d. H.
f) În Sistemul Solar sunt 6 planete.
g) $(\exists x\in\mathbb{R})\ (|x+2|<2)$.
h) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (|x+2|<2)$.

B

3. Să se determine mulţimile $A\cup B$, $A\cap B$, dacă $A=\{x\in\mathbb{R}\mid (x+1)^2(x-5)^2\le 0\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>-3\}$.

4. Fie S_1, S_2 mulţimile soluţiilor în $\mathbb{R}$ ale ecuaţiilor $x^2-5x-6=0$ şi, respectiv, $(x-6)\cdot(x^2-1)=0$. Să se determine:
a) $S_1\cup S_2$; b) $S_1\cap S_2$; c) $S_1\setminus S_2$; d) $S_2\setminus S_1$; e) $S_1\times S_2$.

C

5. Să se determine booleanul mulţimii $A=[-2, 3)\cap\mathbb{Z}$.

6. Să se formuleze exemple de mulţimi A, B pentru care $A\cup B=B\cap A$.

Profilul real

A_1

1. Într-o clasă sunt 28 de elevi. Toţi frecventează fie secţia de volei, fie secţia de baschet, fie ambele secţii. Câţi elevi frecventează ambele secţii, dacă secţia de volei este frecventată de 12 elevi, iar cea de baschet – de 20 de elevi?

2. Să se formuleze o teoremă a cărei reciprocă este o propoziţie adevărată.

3. Să se determine condiţia necesară şi condiţia suficientă ale teoremei; să se formuleze reciproca ei şi să se determine valoarea de adevăr a acesteia:
a) Dacă numărul întreg a se divide cu 14, atunci el se divide cu 7.
b) Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci el are două unghiuri ascuţite.

B₁

4. Fie $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+6x-7<0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-36\le 0\}$. Să se determine:
a) $A\cup B$; b) $A\cap B$; c) $A\setminus B$; d) $B\setminus A$.

5. *Investigaţi!* Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (x^2-x+1>0)$. b) $(\exists n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\})\ (n\,|\,3$ şi $n\,|\,7)$.

6. Să se verifice dacă este adevărată propoziţia: $A=B \Leftrightarrow ((A\cap B)=(A\cup B))$.

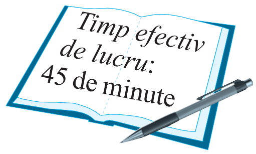
C₁

7. *Investigaţi!* Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei:
a) Oricare ar fi n natural, fracţia $\frac{n}{n+1}$ este ireductibilă.
b) $(\exists x\in\mathbb{R})\ (\sqrt{2}x^2-\sqrt{31}x+1<0)$.

8. Să se arate că este adevărată propoziţia:
Pentru orice numere raţionale $a, b,\ a<b,$ există cel puţin un număr raţional c, astfel încât $a<c<b$.

9. Aplicând metoda inducţiei matematice, să se demonstreze inegalitatea $2^n>n^2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 5$.

Test sumativ



Profilurile umanistic, arte, sport

1. Fie $X=\{x\,|\,x$ literă a cuvântului „responsabilitate”$\}$.
Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „card $X=12$.”

2. Fie mulţimile $A=\{0;2;3;6\}$ şi $B=\{2;3;7;12\}$. Determinaţi care dintre mulţimile
$M_1=\{2;3\}$, $M_2=\{2;3;6\}$, $M_3=\{0;2;3;6;7;12\}$, $M_4=\{0;6\}$, $M_5=\{7;12\}$, $M_6=\{0;6;7;12\}$
sunt egale cu mulţimea:
a) $A\cup B$; b) $A\cap B$; c) $B\setminus A$.

3. Fie S_1, S_2 mulţimile de soluţii în $\mathbb{R}$ a ecuaţiei $x^2+2x-3=0$ şi, respectiv, a ecuaţiei $(x-3)(x^3-1)=0$.
Determinaţi: a) $S_1\cup S_2$; b) $S_1\cap S_2$; c) $S_2\setminus S_1$; d) $S_1\setminus S_2$.

4. Fie mulţimile A, B din exerciţiul 2. Determinaţi mulţimea $S=A\times B$ şi card $\mathcal{B}(S)$.

Profilul real

1. Fie mulţimile $A=\{1;2;3\}$, $B=\{a;b\}$.
a) Completaţi casetele: card $\mathcal{B}(A)=\boxed{}$; card $\mathcal{B}(B)=\boxed{}$.
b) Determinaţi mulţimea $C=A\times B$ şi cardinalul ei.

2. Decideţi dacă enunţul „Un patrulater convex are 3 diagonale” este o propoziţie şi, în caz afirmativ, determinaţi valoarea ei de adevăr.

3. Formulaţi un exemplu de mulţimi care să confirme că egalitatea $A\setminus B=B\setminus A$ nu este adevărată.

4. Fie teorema: „Dacă un patrulater este romb, atunci în el se poate înscrie un cerc”.
a) Determinaţi condiţia necesară şi condiţia suficientă.
b) Formulaţi reciproca teoremei şi determinaţi valoarea ei de adevăr.

5. Aplicând metoda inducţiei matematice, demonstraţi că: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

MODULUL 3

Radicali. Puteri. Logaritmi

Fiecare zi ne învață ceva nou.
Euripides

Obiective

- efectuarea operațiilor cu numere reale: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent rațional sau real; a operațiilor cu radicali de ordinul n, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \{2, 3\}$, a operațiilor cu logaritmi ai numerelor reale pozitive;
- aplicarea proprietăților puterilor, radicalilor, logaritmilor la efectuarea unor calcule cu numere reale.

§1 Radicali

1.1. Noțiunea de radical. Proprietăți

Ne amintim

Se știe că puterea unui număr real b cu exponent natural nenul n, notată cu b^n, este produsul a n numere, fiecare fiind egal cu b. Deci, fiind dată baza b și exponentul n, se determină valoarea puterii $b^n = a$.

În gimnaziu s-a examinat și una dintre problemele inverse: fiind dată valoarea a a puterii și exponentul n, $n = 2$, se caută baza b pentru care $b^2 = a$. Astfel, rezolvarea ecuațiilor de gradul II a impus definirea noțiunii *radical de ordinul 2*. Anume soluția nenegativă a ecuației $x^2 = a$, $a \geq 0$, s-a notat cu $\sqrt{a}$ și s-a numit ***radical de ordinul 2*** din a.

Diverse probleme necesită rezolvarea unor ecuații de grad mai mare decât 2. De exemplu, să se determine lungimea muchiei unui cub cu volumul de: a) 8 m³; b) 5 m³.

În cazul a), lungimea muchiei este de 2 m, fiindcă $2^3 = 8$. Pentru varianta b) nu există în $\mathbb{Q}$ valoarea exactă a lungimii muchiei, deoarece nu există un număr rațional x astfel încât $x^3 = 5$. Soluția acestei ecuații se notează cu $\sqrt[3]{5}$ și se numește *radical de ordinul 3* din 5.

Definiții

- Numărul real b se numește **radical de ordin impar *n***, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, din numărul real a, dacă $b^n = a$.
- Numărul real nenegativ b se numește **radical de ordin par *n***, $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$, din numărul real nenegativ a, dacă $b^n = a$.

Radicalul de ordinul n din a se notează cu $\sqrt[n]{a}$. Deci, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n = 2k+1$, și $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, $a, b \in \mathbb{R}_+$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

De exemplu, $\sqrt{0,25} = 0,5$; $\sqrt[3]{-0,125} = -0,5$; $\sqrt[4]{-16}$ nu există; $\sqrt[n]{0} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Rețineți!

Aplicând proprietățile inegalităților numerice și aproximările zecimale ale numerelor, se poate demonstra că în condițiile enunțate în definiție valoarea radicalului este unic determinată.

Radicalul de ordinul n dintr-un număr a se calculează conform definiției care afirmă că trebuie să se determine soluția reală a ecuației $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $n = 2k+1$, sau soluția nenegativă a ecuației $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}_+$, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soluția acestei ecuații poate fi un număr rațional sau un număr irațional. Pentru a determina (în caz de necesitate) aproximările zecimale ale acestui număr, folosim calculatorul sau procedăm ca în următoarea problemă.

Problemă

Să se calculeze aproximările prin lipsă şi prin adaos ale numărului $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 10^{-2}.

Rezolvare:

Folosind inegalitatea evidentă $1^3 < 2 < 2^3$, obținem că $1 < \sqrt[3]{2} < 2$, adică 1 şi 2 sunt aproximările zecimale prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 1, ale numărului $\sqrt[3]{2}$. Vom examina cuburile numerelor de la 1 până la 2 cu pasul 0,1: $1{,}1^3$; $1{,}2^3$; ...; $1{,}9^3$; 2^3. Observăm că numărul 2 este cuprins între numerele $1{,}2^3 = 1{,}728$ şi $1{,}3^3 = 2{,}197$; deci, $1{,}2 < \sqrt[3]{2} < 1{,}3$. Aşa cum $1{,}3 - 1{,}2 = 10^{-1}$, rezultă că 1,2 şi 1,3 sunt aproximările prin lipsă, respectiv prin adaos, cu o eroare mai mică decât 10^{-1}, ale numărului $\sqrt[3]{2}$.

Vom examina cuburile numerelor de la 1,21 până la 1,29 cu pasul 0,01: $1{,}21^3$; $1{,}22^3$; ...; $1{,}29^3$. Deoarece $1{,}953125 = 1{,}25^3 < 2 < 1{,}26^3 = 2{,}00376$, rezultă că $1{,}25 < \sqrt[3]{2} < 1{,}26$, adică numerele 1,25 şi 1,26 sunt aproximările prin lipsă şi respectiv prin adaos ale numărului $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decât 10^{-2}.

Teorema 1 **(proprietăți ale radicalilor)**

Pentru $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi n număr natural nenul par sau $a, b \in \mathbb{R}$ şi n număr natural impar, $k, p, s \in \mathbb{N}^*$, avem:

1° $(\sqrt[n]{a})^n = a$;

2° $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

3° $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4° $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$;

5° $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $k \geq 2$;

6° $\sqrt[np]{a^{nk}} = \sqrt[p]{a^k}$, $p \geq 2$, $a \in \mathbb{R}_+$;

7° $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$;

8° $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$, $\sqrt{a^2} = |a|$;

9° $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$, $a \cdot b \in \mathbb{R}_+$;

10° $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}$, $a \cdot b \in \mathbb{R}_+$, $b \neq 0$;

11° $\sqrt[2kp]{a^{2ks}} = \sqrt[p]{|a^s|}$, $a \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$.

1.2. Transformări ale expresiilor iraționale

Scoaterea factorului de sub radical, introducerea factorului sub radical

Exerciții rezolvate

1. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $\sqrt[3]{7^4 - 7^3 \cdot 5}$.

Rezolvare:

$$\sqrt[3]{7^4 - 7^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{7^3(7-5)} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 7 \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Dacă radicalul este de ordin par şi sub radical sunt variabile, atunci pot fi folosite proprietățile 8°–11°.

Observație

Este greşit să aplicăm proprietățile 1°–7° în cazul în care nu se cunosc semnele valorilor factorilor, deci *este greşit*, de exemplu, *să scriem*:

$$\sqrt{x^7(x^2-5)} = \sqrt{x^7} \cdot \sqrt{x^2-5}.$$

Într-adevăr, domeniul valorilor admisibile (DVA) al expresiei din membrul stâng al egalității este mulțimea $[-\sqrt{5}, 0]\cup[\sqrt{5}, +\infty)$, iar DVA al expresiei din membrul drept este mulțimea $[\sqrt{5}, +\infty)$, deci pentru $x\in[-\sqrt{5}, 0]$ egalitatea nu este adevărată.

La introducerea factorului sub radical *se pot comite greşeli* de tipurile:

a) $-7\sqrt{2}=\sqrt{(-7)^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{98}$; b*) $x\cdot\sqrt{\dfrac{y}{x^2}}=\sqrt{\dfrac{x^2y}{x^2}}=\sqrt{y}$.

Corect este: a) $-7\sqrt{2}=-\sqrt{98}$; b*) $x\cdot\sqrt{\dfrac{y}{x^2}}=\begin{cases}\sqrt{y}, & \text{dacă } x>0\\ -\sqrt{y}, & \text{dacă } x<0.\end{cases}$

2 ***Raționalizarea numitorului unui raport algebric*** se numeşte transformarea care elimină radicalii de la numitorul acestuia. Numitorul raportului poate fi raționalizat prin diverse moduri.

a) *Amplificarea raportului de tipul*:

1) $\dfrac{1}{a\cdot\sqrt[n]{b}}$, $a, b\in\mathbb{R}_+^*$, cu $\sqrt[n]{b^{n-1}}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, $a, b\in\mathbb{R}_+^*$, cu expresia conjugată numitorului (expresiile $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ şi $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ sunt *expresii conjugate*).

Exemplu

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}.$$

b) *Utilizarea formulelor*:

$$a-b=(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}),\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 2,\ a, b\ge 0;$$

$$a+b=(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}),\ n\in\mathbb{N},\ n \text{ impar}.$$

Exemplu

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{2(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}=\frac{2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}=2(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}).$$

c) *Eliminarea succesivă a radicalilor unei sume algebrice*:

Exemplu

$$\frac{1}{\sqrt{3}+5-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+5+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+5-\sqrt{2})(\sqrt{3}+5+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+5+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+5)^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+5+\sqrt{2})(26-10\sqrt{3})}{(26+10\sqrt{3})(26-10\sqrt{3})}=\frac{1}{188}(13\sqrt{2}-12\sqrt{3}-5\sqrt{6}+50).$$

Exerciții şi probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{0{,}0025}$; b) $\sqrt{256\cdot 9\cdot 36}$; c) $\sqrt{\dfrac{25\cdot 324}{529\cdot 49}}$;

d) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; e) $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3}$; f) $\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}$.

B

2. *Lucrați în perechi!* Să se scoată factorii de sub radical:

a) $\sqrt[3]{16}$; b) $\sqrt[3]{250}$; c) $\sqrt{32a^4b^3}$, $a>0$; d) $\sqrt{25a^2b^3}$, $a<0$;

e) $\sqrt{(x-3)^2+12x}$; f) $\sqrt[3]{x^3y^6}$; g) $\sqrt{169x^3y^2}$, $y<0$; h) $\sqrt{8a^5b^6}$, $b<0$.

3. Să se introducă factorul sub radical (considerând că toate expresiile au sens):

a) $2\sqrt{3}$; b) $-3\sqrt{3}$; c) $-b\sqrt{3}$, $b<0$; d) $x\cdot\sqrt{\frac{-2}{x}}$; e) $-c\sqrt{7a}$; f) $x\cdot\sqrt[3]{2y}$;

g) $a\cdot\sqrt{2a}$; h) $a\sqrt{3}$, $a>0$; i) $y\sqrt{3}$; j) $x\cdot\sqrt{\frac{2}{x}}$; k) $x\cdot\sqrt[3]{2xy}$; l) $x\cdot\sqrt{-x}$.

4. *Lucrați în grup!* Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $(2\sqrt{3}+5)(5-2\sqrt{3})+(4-\sqrt{5})^2+8\sqrt{5}$; b) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$; c) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{30}-\sqrt{15}}$;

d) $(1+\sqrt{5})^3\cdot(2+\sqrt{5})$; e) $\frac{y-1}{1+\sqrt{y}}$; f) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

C

5. Să se raționalizeze numitorul raportului:

a) $\frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$; c) $\frac{5}{\sqrt{13}-\sqrt{18}}$; d) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{7}}$; e) $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$.

6. Să se compare: a) $3\sqrt[3]{5}$ cu $5\sqrt[3]{3}$; b) $3\sqrt[3]{4}$ cu $4\sqrt[3]{2}$.

Profilul real

A₁

1. (BAC 2018) Completați caseta cu un număr natural, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

„$\sqrt[3]{64}=2^{\square}$.”

2. (BAC 2019) Completați casetele cu două numere întregi, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

„$\square<\sqrt[3]{7}<\square$.”

3. Să se calculeze:

a) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt[3]{27}$; b) $\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}$; c) $2^{-2}+\sqrt[3]{\frac{3}{64}-2}$.

B₁

4. (BAC 2023) Calculați valoarea expresiei $\sqrt{9^{1,5}-2}$.

5. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{8+\sqrt{37}}\cdot\sqrt[3]{8-\sqrt{37}}$; b) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; c) $\sqrt{12+2\sqrt{6}-2\sqrt{5}-2\sqrt{30}}$.

6. *Lucrați în perechi!* Să se verifice egalitatea:

a) $\sqrt[3]{26+15\cdot\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})=1$; b) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$; c) $3+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$.

7. S-a vopsit podeaua unei camere cu dimensiunile de $8{,}45\ \text{m}\times 4\ \text{m}$. Câte fețe ale unui cub cu muchia de 2,6 m pot fi acoperite cu aceeași cantitate de vopsea, consumul de vopsea la 1 m² fiind același?

C₁

8. Să se determine valoarea expresiei:

a) $\sqrt{(7-a)(4+a)}$, dacă $\sqrt{7-a}+\sqrt{4+a}=5$; b) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$.

9. Pentru $n\le 3m$, $m, n\in\mathbb{R}_+$, să se arate că $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}=2\sqrt{3m-n}$.

10. Să se arate că pentru $a\ge 0$, $b\ge 0$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{(a+1)(b+1)}$.

§2 Puterea cu exponent real

Ne amintim

1 Cunoaşteţi deja noţiunea ***puterea cu exponent întreg*** a unui număr.

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, $a\in\mathbb{R}^*$, s-a definit: $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ factori}}$; $a^0=1$; $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, iar $0^n=0$.

Reţineţi!

1. Expresia 0^0 nu este definită.
2. $a^m>0$ pentru $a>0$, $m\in\mathbb{Z}$.

2 ***Puterea cu exponent raţional***

În contextul examinării puterii şi a proprietăţilor ei, apare întrebarea dacă este necesar să se examineze şi puterea cu exponent raţional.

Un argument în favoarea răspunsului pozitiv ar fi cel provenit din necesităţile dezvoltării matematicii: mulţimea $\mathbb{N}$ a fost extinsă până la $\mathbb{Z}$, apoi până la $\mathbb{Q}$, apoi până la $\mathbb{R}$ şi s-au definit operaţiile aritmetice în aceste mulţimi.

Alte argumente provin din necesităţile unor domenii ale ştiinţei. De exemplu, s-a constatat că numărul y al bacteriilor care se înmulţesc într-un anumit mediu se exprimă, în funcţie de timpul t, printr-o formulă de tipul $y=a^t$. Fie $t=\dfrac{3}{2}$ ore. Atunci numărul de bacterii, în mediul dat, peste $\dfrac{3}{2}$ ore va fi egal cu $y=a^{\frac{3}{2}}$, adică am obţinut o putere cu exponent raţional.

La definirea puterii cu exponent raţional şi iraţional, e firesc să cerem să fie adevărate proprietăţile pe care le au puterile cu exponenţi întregi.

Respectând această condiţie, să dezvăluim esenţa expresiei $a^{\frac{m}{n}}$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru $a>0$ obţinem $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$. Deoarece $(\sqrt[n]{a^m})^n=a^m$, considerăm că $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Definiţie

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}_+^*$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$.

Exemplu

$(27)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{(3^3)^2}=\sqrt[3]{(3^2)^3}=\sqrt[3]{9^3}=9.$

Reţineţi!

1. Pentru $m,n\in\mathbb{N}^*$ se consideră că $0^{\frac{m}{n}}=0$.

2. Pentru diferite reprezentări ale exponentului $\dfrac{m}{n}$, puterea $a^{\frac{m}{n}}$ se determină în mod unic.

Într-adevăr, dacă $x=\dfrac{m}{n}=\dfrac{p}{q}$, atunci, aplicând proprietăţile radicalilor, obţinem:

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qn]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

3. Puterea cu exponent raţional a unui număr pozitiv este un număr pozitiv, deoarece radicalul de orice ordin dintr-un număr pozitiv este număr pozitiv.

4. Proprietatea $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ fiind adevărată pentru exponent întreg, este adevărată şi pentru exponent raţional, $a\in\mathbb{R}_+^*$. Într-adevăr: $a^{\frac{-m}{n}}=\sqrt[n]{a^{-m}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a^m}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

Exerciţiu

Arătaţi că dacă $\dfrac{m}{n}=k\in\mathbb{Z}$, atunci $a^{\frac{m}{n}}=a^k$.

Teorema ce urmează arată că puterile cu exponent rațional au aceleași proprietăți ca și puterile cu exponent întreg.

Teorema 2 **(proprietăți ale puterii cu exponent rațional)**

Pentru $a, b\in \mathbb{R}_+^*$, $x, y\in \mathbb{Q}$, avem:

1° $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$; 2° $(a^x)^y=a^{xy}$;

3° $(ab)^x=a^x\cdot b^x$; 4° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$; 5° $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

6° a) $a^x>a^y$, dacă $a>1$, $x>y$; b) $a^x<a^y$, dacă $0<a<1$, $x>y$;

7° a) $a^x>b^x$, dacă $a>b$, $x>0$; b) $a^x<b^x$, dacă $a>b$, $x<0$;

8° $(a^x=a^y,\ a\neq 1)\Leftrightarrow(x=y)$.

Demonstrație:

Vom demonstra proprietățile 1°, 2°, 4° (celelalte se demonstrează în mod analog).

Fie $x=\dfrac{m}{k}$, $y=\dfrac{p}{r}$, $m, p\in\mathbb{Z}$, $k, r\in\mathbb{N}^*$, $k>1$, $r>1$. Aplicând proprietățile radicalilor și puterilor cu exponent întreg, obținem:

$$1°\ a^x\cdot a^y=a^{\frac{m}{k}}\cdot a^{\frac{p}{r}}=\sqrt[k]{a^m}\cdot\sqrt[r]{a^p}=\sqrt[kr]{a^{mr}}\cdot\sqrt[kr]{a^{kp}}=\sqrt[kr]{a^{mr+kp}}=a^{\frac{mr+kp}{kr}}=a^{\frac{m}{k}+\frac{p}{r}}=a^{x+y};$$

$$2°\ (a^x)^y=(a^{\frac{m}{k}})^{\frac{p}{r}}=\sqrt[r]{(\sqrt[k]{a^m})^p}=\sqrt[r]{\sqrt[k]{a^{mp}}}=\sqrt[rk]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{rk}}=a^{xy};$$

$$4°\ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{k}}=\sqrt[k]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}=\sqrt[k]{\frac{a^m}{b^m}}=\frac{\sqrt[k]{a^m}}{\sqrt[k]{b^m}}=\frac{a^{\frac{m}{k}}}{b^{\frac{m}{k}}}=\frac{a^x}{b^x}. \blacktriangleright$$

Exercițiu Demonstrați proprietățile 3°, 5°–8°.

Exemplu $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3=a-b.$

3 ***Puterea cu exponent irațional a unui număr pozitiv*** se definește utilizând aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale numerelor iraționale (a se vedea modulul 1). Se știe că pentru orice număr irațional x există numerele raționale x_n, x_n', astfel încât $x_n<x<x_n'$, $x_n'-x_n=10^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Definiție

Se numește **putere cu exponentul irațional** x a numărului a, $a>1$ $(0<a<1)$, și se notează a^x un număr real t care pentru orice număr natural n satisface inegalitățile duble $a^{x_n}<t<a^{x_n'}$ $(a^{x_n'}<t<a^{x_n})$, x_n, x_n' fiind aproximările zecimale ale lui x prin lipsă, respectiv prin adaos (cu n cifre după virgulă).

Prin definiție, se consideră că $1^x=1$ pentru orice număr irațional x.

Se poate demonstra că astfel definită puterea a^x este unic determinată.

Exercițiu rezolvat Ce se înțelege prin numărul: a) $5^{\sqrt{2}}$; b) $(0,1)^{\sqrt{2}}$?

Rezolvare:

a) Pentru $\sqrt{2}$ sunt cunoscute aproximările zecimale:

$1<\sqrt{2}<2$; $1,4<\sqrt{2}<1,5$; $1,41<\sqrt{2}<1,42$; $1,414<\sqrt{2}<1,415$; ...

Prin urmare, $t=5^{\sqrt{2}}$ este acel unic număr care satisface inegalitățile duble:

$5^1<t<5^2$; $5^{1,4}<t<5^{1,5}$; $5^{1,41}<t<5^{1,42}$; $5^{1,414}<t<5^{1,415}$; ...

b) $s=(0,1)^{\sqrt{2}}$ este acel unic număr care satisface inegalitățile duble:

$(0,1)^2<s<(0,1)^1$; $(0,1)^{1,5}<s<(0,1)^{1,4}$; $(0,1)^{1,42}<s<(0,1)^{1,41}$; $(0,1)^{1,415}<s<(0,1)^{1,414}$; ...

4 ***Puterea cu exponent real a unui număr pozitiv*** posedă aceleaşi proprietăţi ca şi cea cu exponent raţional. Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1° din teorema 2.

Demonstraţie:

Din inegalităţile duble $x_n \le x < x'_n$ şi $y_n \le y < y'_n$, unde x_n, x'_n, y_n, y'_n sunt aproximările zecimale ale numerelor reale x, y, obţinem $x_n + y_n \le x + y < x'_n + y'_n$ şi pentru $a > 1$ avem $a^{x_n} \le a^x < a^{x'_n}$, $a^{y_n} \le a^y < a^{y'_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Înmulţind membru cu membru aceste inegalităţi, obţinem $a^{x_n}a^{y_n} \le a^x a^y < a^{x'_n}a^{y'_n}$, sau $a^{x_n+y_n} \le a^x a^y < a^{x'_n+y'_n}$. Întrucât a^{x+y}, de asemenea, trebuie să satisfacă ultima inegalitate dublă pentru $n \in \mathbb{N}$, în baza unicităţii numărului ce satisface aceste inegalităţi, rezultă că $a^x a^y = a^{x+y}$. ▶

Reţineţi!

1. Puterea cu exponent iraţional a unui număr $a \le 0$ nu se defineşte.
2. Pentru $a > 0$ şi x real, valoarea lui a^x este cuprinsă între două puteri cu exponenţi raţionali ale lui a, care, conform celor menţionate anterior, sunt pozitive. Astfel, valoarea lui a^x este un număr pozitiv.

Exerciţii rezolvate

1. Să se calculeze $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}}$.

Rezolvare:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = (2^{-1})^{-9} = 2^9 = 512.$$

2. Să se compare:

a) numerele reale x şi y, dacă se ştie că $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^x \ge (\sqrt{7}-\sqrt{5})^y$;

b) cu 1 numărul $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^{1,2}$.

Rezolvare:

a) Fiind date două puteri cu aceeaşi bază, vom stabili dacă această bază este mai mare sau mai mică decât 1. Deoarece $2 < \sqrt{7} < 3$, $2 < \sqrt{5} < 3$, $-3 < -\sqrt{5} < -2$, $\sqrt{7} > \sqrt{5}$, obţinem că $0 < \sqrt{7} - \sqrt{5} < 1$. În baza proprietăţii 6° din teorema 2, rezultă că $x \le y$.

b) Avem $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^{1,2} < (1)^0 = 1$.

Exerciţii şi probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Să se calculeze:

a) $3^{-1} \cdot 5 + \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$; b) $\dfrac{9^{0,5}}{9,28 \cdot 10^{-5} - 2,8 \cdot 10^{-6}}$; c) $\dfrac{0,04^{-2} \cdot 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}{2 \cdot 5^4}$;

d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^4 - \left(\frac{1}{5}\right)^{-10} \cdot \left(\frac{1}{625}\right)^3$; e) $(2,73)^0 \cdot (0,4)^{-2} \cdot (2,5)^2$; f) $\dfrac{3 \cdot 7^{-1} \cdot \frac{7}{4}}{(0,5)^2 \cdot 3^{-1}}$.

2. (BAC 2011) Completaţi caseta astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată: „Dacă $2^x = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $2^{x+1} = \square$".

3. (BAC 2021) Scrieţi în casetă un număr întreg astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată: „$\left(\frac{2}{3}\right)^{\square} = \frac{81}{16}$".

B

4. *Lucraţi în perechi!* Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

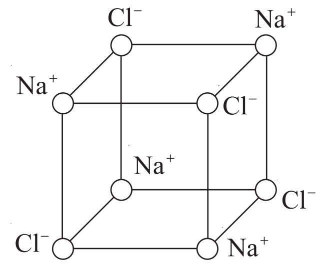
a) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$; b) $\dfrac{x + 2x^{\frac{1}{2}}}{2x}$; c) $\dfrac{a - 4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} + 2a^{\frac{1}{2}}}$; d) $\dfrac{a}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b} + \dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a} - \dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$.

5. *Investigați!* Să se compare cu 1: a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,2}$; b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{10}$; c) $(\pi-3)^{-1,5}$.

6. Prețul unui produs era de 100 u.m., iar după două majorări succesive cu același număr de procente, a devenit 125,44 u.m. Cu câte procente s-a majorat prețul de fiecare dată?

C

7. Rețeaua cristalină a sării de bucătărie (NaCl) constă din 4 ioni de natriu (Na^+) și 4 ioni de clor (Cl^-), aranjați în vârfurile unui cub având diagonala feței egală cu $4\cdot10^{-8}$ cm. Câte cubulețe de acest fel sunt (aproximativ) într-un bob de sare ce are volumul de 0,1 mm³?



8. Să se determine valoarea lui x, dacă o latură a dreptunghiului are lungimea egală cu $x^{\frac{3}{2}}$ cm, cealaltă – cu x^2 cm, iar aria dreptunghiului este de 15 cm².

Profilul real

A₁

1. Să se calculeze:

a) $\dfrac{2\cdot5^{20}-9\cdot5^{19}}{5^{18}}$; b) $4^{-1}\cdot(0,34)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\cdot(6,25)^{0,5}$;

c) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^4\right]^{-\frac{3}{4}}\cdot(0,3)^{-1}\cdot(7)^0\cdot(0,1)^{-4}$; d) $\dfrac{(0,2)^{-1}\cdot5^4\cdot25^4\cdot(0,2)^{-4}}{4\cdot5^2}$; e) $(3^{-1})^6\cdot9^{\sqrt{3}}(9^{-1})^{\sqrt{27}}$.

2. (BAC 2012) Scrieți în casetă exponentul respectiv al puterii: $2^n+2^n=2^{\square}$.

3. (BAC 2019) Calculați valoarea expresiei: $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}+8^{\frac{2}{3}}$.

4. (BAC 2022) Calculați valoarea expresiei: $32^{\frac{3}{5}}-8$.

B₁

5. *Lucrați în grup!* Să se aducă la forma cea mai simplă expresia (în DVA respectiv):

a) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a+b}$; b) $\left(1-\dfrac{x^{-3}-1}{x^{-1}-1}:\dfrac{1+x+x^2}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1-x^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{1-x^{-1}}\right)$;

c) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{2}}}{x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-3y^{\frac{1}{2}}}{x-y}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{2}$; d) $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{4}{3}}-8y\cdot\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$;

e) $\left((\sqrt{7})^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$; f) $\dfrac{75^{\sqrt{48}}}{25^{\sqrt{108}}}\cdot\dfrac{5^{37\sqrt{3}}}{15^{\sqrt{27}}}$.

6. *Investigați!* Să se compare cu 1:

a) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$; b) $(\sqrt{7}-1)^{\frac{1}{3}}$; c) $(\sqrt{3}-1)^{\frac{7}{2}}$; d) $\left(\frac{2}{7}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; e) $\left((27)^{-1\frac{1}{3}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{8}}$.

7. Să se verifice egalitatea: $(x+2(x-1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+(x-2(x-1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=2$, dacă $1\le x\le 2$.

C₁

8. Căreia dintre mulțimile $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-$ trebuie să aparțină numerele a, b, asrfel încât să fie adevărată egalitatea $(ab)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}$?

9. Să se determine DVA și să se aducă la forma cea mai simplă expresia $\dfrac{m^5+m^4\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4m^9}}{|m^3-1|-1}$.

§ 3 Logaritmi

*Logaritmii au fost definiți de savantul scoțian **John Napier** (1550–1617). El a descoperit că înmulțirea și împărțirea numerelor se pot efectua prin adunarea, respectiv prin scăderea logaritmilor acestor numere. Johannes Kepler, savant german, de exemplu, utiliza logaritmi în baza 10 pentru efectuarea unor calcule complicate în domeniul astronomiei. Astăzi, este greu de găsit un domeniu al științei în care să nu se utilizeze logaritmii.*

3.1. Noțiunea de logaritm

În paragraful precedent a fost definită puterea c a unui număr real pozitiv a cu exponent real arbitrar b, astfel încât $a^b = c,\ c > 0.$ Egalitatea $a^b = c$ generează problema: există oare $x \in \mathbb{R},$ astfel încât $a^x \in \{9, 10, 27, \frac{3}{4}, \pi, ...\}$?

De exemplu, pentru $a = 3,$ obținem $a^2 = 9,\ a^3 = 27.$

În caz general, determinarea lui x astfel încât $a^x = y,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ y \in \mathbb{R}_+^*,$ a servit drept unul dintre motive pentru a defini noțiunea de *logaritm*.

Vom enunța fără demonstrație

Teorema 3

Pentru orice numere reale pozitive $a, c, a \neq 1,$ există un unic număr real b care verifică egalitatea $a^b = c.$

Observație

Unicitatea numărului b rezultă din proprietatea 8° a puterii.

Definiție

Se numește **logaritmul** numărului pozitiv c în baza $a,\ a > 0,\ a \neq 1,$ numărul real b pentru care $a^b = c.$

Se notează: $\log_a c = b.$

Prin urmare, $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$ (1).

Substituind b în egalitatea (1), se obține ***identitatea logaritmică fundamentală***:

$$\boxed{a^{\log_a c} = c},\ a, c \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1.$$

Exemple

a) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2},$ deoarece $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2};$ b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4,$ deoarece $(\sqrt{3})^4 = 9.$

Rețineți!

1. Condiția $a \neq 1$ este necesară în definiția logaritmului, fiindcă, în caz contrar, conform definiției logaritmului, $1^b = 1$ pentru orice $b \in \mathbb{R}$ și, astfel, numărul b este nedeterminat.
2. Condiția ca a și c să fie numere pozitive este impusă de conceptul *putere cu exponent real* și de faptul că această putere ia numai valori pozitive. Astfel, expresiile de tipul $\log_3(-6)$, $\log_{(-3)}9$ nu au sens.
3. În unele cazuri, în calcule se folosesc ***logaritmii zecimali*** (se notează $\mathbf{lg}\, c = \log_{10} c,$ $c > 0$) și/sau ***logaritmii naturali*** (se notează $\mathbf{ln}\, c = \log_e c,\ c > 0,$ unde e = 2,7182... este un număr irațional, care va fi definit ulterior).
4. La noțiunea de logaritm al unui număr se va reveni în modulul 7.

3.2. Proprietățile logaritmilor

Teorema 4 **(proprietăți ale logaritmilor)**

Pentru $a, c, x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, $c \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, avem:

1° $\log_a a = 1$;

2° $\log_a 1 = 0$;

3° $a^{\log_a x} = x$ (*identitatea logaritmică fundamentală*);

4° $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

5° $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

6° $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;

7° $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$ $(\alpha \neq 0)$;

8° $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$;

9° $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$;

10° $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$;

11° $x > y > 0 \Rightarrow \log_a x > \log_a y$, dacă $a > 1$ şi $\log_a x < \log_a y$, dacă $0 < a < 1$.

Demonstrație:

Proprietățile 1° şi 2° rezultă din egalitățile $a^1 = a$ şi respectiv $a^0 = 1$.

3° Fie $a^b = x$, $a \neq 1$, atunci $b = \log_a x$. Substituind b în prima egalitate, obținem $a^{\log_a x} = x$.

4° Aplicând proprietatea 3°, obținem $a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$. În baza proprietății 8° a puterii, rezultă că $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$.

Proprietățile 5° şi 6° se demonstrează în mod analog cu demonstrarea proprietății 4°.

7° $(a^\alpha)^{\log_{a^\alpha} x} = x = a^{\log_a x} = (a^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}\log_a x}$, deci $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$.

8° $a^{\log_a x} = x = c^{\log_c x} = c^{\log_c a \cdot \frac{\log_c x}{\log_c a}} = (c^{\log_c a})^{\frac{\log_c x}{\log_c a}} = a^{\frac{\log_c x}{\log_c a}}$. Egalând exponenții, obținem proprietatea respectivă.

Proprietatea 9° rezultă din proprietatea 8°, înlocuind $x = c$ şi ținând cont că $\log_c c = 1$.

Proprietățile 12°–14° rezultă din proprietățile 4°–7°, substituind uv cu $|uv|$, $\frac{u}{v}$ cu $\left|\frac{u}{v}\right|$, u^α cu $|u|^\alpha$. ▶

Observație

Proprietățile 4°–7° pot fi generalizate prin proprietățile 12°–15°.

Teorema 5 **(proprietăți ale logaritmilor**, generalizare**)**

Pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u, v \in \mathbb{R}_-^*$, $\alpha = 2k$, $k = \mathbb{Z}^*$, au loc egalitățile:

12° $\log_a (uv) = \log_a |u| + \log_a |v|$;

13° $\log_a \frac{u}{v} = \log_a |u| - \log_a |v|$;

14° $\log_a u^\alpha = \alpha \log_a |u|$;

15° $\log_{u^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_{|u|} x$.

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la forma cea mai simplă expresia: $A = \log_5^2 10 + \log_5 0{,}5 \cdot \log_5 50 + 3$.

Rezolvare:

Utilizăm proprietățile logaritmilor şi exprimăm termenii expresiei A prin logaritmi în baza 5:

$$A = (\log_5 (2 \cdot 5))^2 + \log_5 (2^{-1}) \cdot \log_5 (25 \cdot 2) + 3 =$$
$$= (\log_5 2 + \log_5 5)^2 - \log_5 2 \cdot (\log_5 5^2 + \log_5 2) + 3 =$$
$$= \log_5^2 2 + 2\log_5 2 + 1 - 2\log_5 2 - (\log_5 2)^2 + 3 = 4.$$

Rețineți!

Operația prin care unei expresii E, $E>0$, i se asociază $\log_a E$, $a>0$, $a\neq 1$, se numește ***operație de logaritmare***, iar operația inversă acesteia (scrierea expresiei, fiind dat logaritmul ei) se numește ***operație de potențiere***.

Observație

Compararea logaritmilor cu aceeași bază se efectuează astfel: dacă $c>1$, atunci $\log_c a<\log_c b \Leftrightarrow a<b$, iar dacă $0<c<1$, atunci $\log_c a<\log_c b \Leftrightarrow a>b$, $a, b>0$.

Exercițiu rezolvat

Să se compare:

a) $\log_2 3$ cu $1{,}5$; b) $\lg\frac{1}{3}$ cu $\lg\frac{1}{5}$.

Rezolvare:

a) Presupunând că $\log_2 3<1{,}5$, prin potențiere, în baza proprietăților puterii, obținem $2^{\log_2 3}<2^{1{,}5} \Leftrightarrow 3<2^{1{,}5}$. Ultima inegalitate este falsă, fiindcă $2^{1{,}5}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2}<3$. Deci, adevărat este că $\log_2 3>1{,}5$.

b) Deoarece $\frac{1}{3}>\frac{1}{5}$, în baza proprietății 11° avem $\lg\frac{1}{3}>\lg\frac{1}{5}$.

Rețineți!

În baza proprietăților 3° și 6°, orice număr pozitiv se poate reprezenta ca putere a oricărui alt număr pozitiv sau ca logaritmul unui număr pozitiv în orice bază pozitivă diferită de 1. Într-adevăr, $a=c^{\log_c a}=\log_c c^a$, $a, c\in\mathbb{R}_+^*$, $c\neq 1$. Aceste reprezentări sunt utile în diverse situații: la rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor ș.a.

Exerciții și probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Să se calculeze:

a) $25^{\log_5 3}$; b) $\dfrac{\log_2 25}{\log_2 5}$; c) $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2$;

d) $\sqrt{\log_{0,5}^2 4}$; e) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4+2\log_5 3}$; f) (BAC 2022) $\log_{\sqrt{2}} 4-4$.

2. (BAC 2023) Calculați: $\log_4 32-4{,}5$.

3. (BAC 2012) Completați caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: „$3\cdot 7^{\log_7 5}=\boxed{}$”.

4. (BAC 2014) Scrieți în casetă un număr întreg, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: „$\log_{\sqrt{2}}\boxed{}=2$”.

B

5. *Lucrați în perechi!* Să se determine x, dacă $\lg x=2\lg 5-3\lg 2-0{,}5\lg 625+0{,}25\lg 256$.

6. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia: $\log_{\sqrt{6}} 3\cdot\log_3 36+\log_{\sqrt{3}} 8\cdot\log_4 81$.

7. *Investigați!* Să se arate că: a) $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}=24$; b) $81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\log_9 16}+3^{\frac{2}{\log_7 9}}=36$.

8. (BAC 2021) Calculați valoarea expresiei: $\log_{\sqrt{3}} 6-\log_3 4$.

9. Să se exprime prin a și b numărul $\lg 56$, dacă $\lg 2=a$, $\log_2 7=b$.

C

10. Să se ordoneze crescător numerele $\log_2 3$, 1, $\log_3 5$.

11. Efectuând potențierea, să se arate că $\log_3 2>0{,}5$.

Profilul real

A₁

1. (BAC 2013) Scrieți în casetă unul dintre semnele >, < sau =, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$„\log_{\sqrt{3}} 3 \ \square \ \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}”.$$

2. (BAC 2015) Scrieți în casetă unul dintre semnele >, < sau =, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$„\log_2 \frac{1}{2} \ \square \ 0”.$$

3. (BAC 2017) Scrieți în casetă unul dintre semnele >, < sau =, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$„\log_3 8 \ \square \ \log_2 8”.$$

4. Pentru valorile admisibile ale variabilelor să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\log_2 ab - \log_2 |b|$;

b) $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$;

c) $(\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b)\log_b a - 1$;

d) $\dfrac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \dfrac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;

e) $(6(\log_b a \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b)^{\frac{1}{2}} - \log_a b$;

f) $\left(a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}} + 8^{\frac{1}{3\log_{a^2} 2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

B₁

5. Prin potențiere, să se determine x, dacă $\log_5 x = 2\log_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2$.

6. (BAC 2022) Determinați valoarea expresiei: $2^{\log_4 36} - \log_5 \dfrac{1}{25}$.

7. (BAC 2021) Calculați valoarea expresiei: $7^{\log_{49} 3} \cdot 3^{-\frac{1}{2}}$.

8. Să se determine:

a) $\log_{30} 8$, dacă $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$;   b) $\log_{54} 168$, dacă $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$.

9. ***Lucrați în perechi!*** Utilizând proprietățile puterilor, să se arate că:

a) $0{,}6 < \log_3 2 < 0{,}7$;   b) $(0{,}7)^{\frac{1}{3}} > 2^{-\frac{1}{3}}$.

C₁

10. ***Lucrați în grup!*** Pentru valorile admisibile ale variabilelor, să se arate că:

a) $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$;   b) $\lg\dfrac{|a+b|}{3} = \dfrac{\lg|a| + \lg|b|}{2}$, dacă $a^2 + b^2 = 7ab$;   c) $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$;

d) $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}} = \lg a$;   e) $\sqrt{\log_n p + \log_p n + 2} \cdot (\log_n p - \log_{np} p)\sqrt{\log_n p} = \log_n^2 p$;   f*) $a^{\sqrt{\log_a b}} - b^{\sqrt{\log_b a}} = 0$.

11*. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia: $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$, dacă $m^2 = a^2 - b^2$, $m, (a \pm b) \in \mathbb{R}_+^*$, $a \pm b \neq 1$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt[3]{64}$;   b) $\log_3 4 + \log_3 \dfrac{9}{4}$;   c) $5\sqrt[3]{0{,}027}$;

d) $((0{,}6)^{-4})^{-0{,}75} \cdot (0{,}09)^{-2^{-1}} \cdot 0{,}1^{-4}$;   e) (BAC pretestare, 2024) $\log_5 \sqrt{125} - 2{,}5$.

2. ***Investigați!*** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

a) $7\sqrt{2} > 2\sqrt{7}$;   b) $\log_{\sqrt{3}} 2 < \log_{\sqrt{3}} 0{,}5$;   c) $\sqrt{3} + 1 = \sqrt{28 - 16\sqrt{3}}$;   d) $\log_3 \dfrac{5}{9} - \log_3 5 = 2$.

3. Să se calculeze: a) $(\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{125} + \sqrt{3} - 6\sqrt{5})$;   b) $2^{\frac{1}{4}} \cdot 0{,}5^{-3} : 4$.

4. Știind că $4^a + 4^{-a} = 23$, să se determine valoarea expresiei $2^a + 2^{-a}$.

B

5. *Lucrați în perechi!* Să se aducă la forma cea mai simplă:

a) $\left(\frac{1}{2x-1}+2x+1\right):\left(2x+\frac{4x^2}{1-2x}\right)$; b) $\log_3 5\cdot\log_4 9\cdot\log_5 2$.

6. Să se compare numerele:

a) $\sqrt{24}$ şi $\sqrt[3]{27}$; b) $(\sqrt{5})^{16}$ şi $\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$.

7. Să se raționalizeze numitorul raportului:

a) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$; b) $\frac{4}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5}}$; c*) $\frac{1}{3-\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

C

8. La o stațiune balneară, într-un bazin de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 2,0 m şi 2,3 m se toarnă apă curativă până la nivelul de 1,77 m. Apa se aduce în vase de formă cubică. Sunt disponibile vase cu muchia de: 1,9 m, 1,95 m, 2,0 m, 2,05 m, ... Care este lungimea muchiei celui mai mic vas, astfel încât cu apa din el să se umple bazinul maxim posibil, fără a depăşi nivelul preconizat?

9. Cineva afirmă că $3<2$, întrucât din $(0,5)^3<(0,5)^2$ rezultă consecutiv:

$$\lg(0,5)^3<\lg(0,5)^2,\ 3\lg 0,5<2\lg 0,5,\ 3<2.$$

Unde s-a comis greşeala?

Profilul real

A₁

1. (BAC 2014) Scrieți în casetă unul dintre semnele >, < sau =, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

„$\log_2\frac{1}{8}$ $\boxed{}$ $\sqrt[3]{-8}$”.

2. (BAC 2016) Scrieți în casetă unul dintre semnele >, < sau =, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

„$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ $\boxed{}$ $-\frac{3}{4}$”.

3. Să se arate că: a) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$, dacă $1\le x\le 2$;

b) $\log_c\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_c a+\log_c b)$, dacă $a^2+b^2=7ab$, $a, b, c\in\mathbb{R}_+^*$, $c\ne 1$.

B₁

4. *Investigați!* Să se precizeze valoarea de adevăr a propoziției: A/F

a) $3+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$; b) $\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{9\sqrt[3]{18}-9\sqrt[3]{12}-3}$.

5. *Lucrați în grup!* Să se aducă la forma cea mai simplă (pentru valorile admisibile ale variabilelor):

a) $(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-16^{-0,25})(16^{-0,25}+(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}})$; b) $3^{\frac{1}{\log_5\sqrt{3}}}-9^{\log_3 5}+3^{\log_9 36}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^3b}+\frac{b\sqrt{a}-a^2}{\sqrt[3]{b}-\sqrt{a}}}$; d) $\log_{\sqrt{6}}(a^3-2)+\log_6(a-2)+\log_{\frac{1}{6}}(a-2)$.

6. Să se compare:

a) $\log_{0,3}\left(\frac{11}{6}\log_2 6-\frac{11}{6}\right)$ cu 0; b) $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{-\sqrt{2}}$ cu $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}}$; c) $\left((4^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}$ cu $\left((8^2)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{6}}$;

d) $\log_{\sqrt{2}}7$ cu $\log_{0,2}3$; e) (BAC 2023) $0,25^{0,5}+3$ cu $8\cdot 2^{0,5}$.

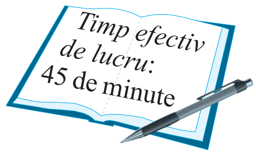
C₁

7. Pentru care valori ale lui a are loc egalitatea $\log_b a^2 = 2\log_b(-a)$, $(b>0,\ b\neq 1)$?

8. Să se calculeze:
   a) $\log_{\sqrt{3}} 8$, dacă $\log_{12} 3 = a$; b) $\log_{30} 8$, dacă $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$.

9. Să se determine numărul natural n pentru care are loc egalitatea $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot \ldots \cdot 3^{3n-1} = 27^5$.

Test sumativ



Profilurile umanistic, arte, sport

În itemii 1, 5 indicați litera care corespunde variantei corecte.

1. Toate valorile variabilelor a, b pentru care $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ aparțin mulțimii
   A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}$. **C** $\mathbb{R}_+^*$. **D** $\mathbb{Z}$.

2. Comparați numerele $3\sqrt{7}$ și $7\sqrt{3}$.

3. Determinați valoarea de adevăr a propoziției:
   a) $8^{\frac{2}{3}} = 4^2$; b) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$.

4. Raționalizați numitorul raportului $\dfrac{14\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

5. Valoarea expresiei $\left((\sqrt{8})^{-\frac{13}{3}}\right)^{\frac{3}{26}}$ este:
   A mai mare decât 1. **B** mai mică decât 1. **C** egală cu 1.

6. Calculați: $a^{\frac{2}{\log_b a}} - 2a^{\log_a b+1} + b^{\frac{2}{\log_a b}}$, $a>1$, $b>1$.

Profilul real

În itemii 1, 4 indicați litera care corespunde variantei corecte.

1. Toate valorile variabilelor a, b pentru care $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[2n]{b}$, $n \in \mathbb{N}^*$, aparțin mulțimii
   A $\mathbb{R}_+$. **B** $\mathbb{R}$. **C** $\mathbb{R}_+^*$. **D** $\mathbb{Z}$.

2. Comparați $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}$ cu $(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$.

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{y^{\frac{5}{4}}-(xy^4)^{\frac{1}{4}}+(x^4y)^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{5}{4}}}$.

4. Valoarea expresiei $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{13} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^3$ este:
   A mai mare decât 1. **B** mai mică decât 1. **C** egală cu 1.

5. Calculați: $-\log_2 \sqrt{(\log_4 \sqrt{256})^{\frac{1}{5}}}$.

6. Determinați valorile admisibile ale variabilei a și aduceți la forma cea mai simplă expresia:
$$\left(2^{\log_{2^{1/4}} a} - 3^{\log_{27}(a^2+1)^3} - 2a\right) : \left(7^{4\log_{49} a} - a - 1\right).$$

Radicali. Puteri. Logaritmi

$a^b = c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$

Determinarea lui c — Determinarea lui a, dacă $b = n \in \mathbb{N}^*$, $b \geq 2$ — Determinarea lui b

Puteri

Definiții

1) $b = n, n \in \mathbb{N}$: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$, $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$;

2) $b = -n$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$;

3) $b = \frac{m}{k}$: $a^{\frac{m}{k}} = \sqrt[k]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $a > 0$;

4) $b = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $a > 1$, $a^{x_k} \leq a^\alpha \leq a^{y_k}$;

$0 < a < 1$, $a^{y_k} \leq a^\alpha \leq a^{x_k}$, unde x_k, y_k sunt aproximările zecimale ale numărului α;

$0^\alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Proprietăți

Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

1° $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

2° $(a^x)^y = a^{xy}$;

3° $(ab)^x = a^x \cdot b^x$;

4° $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

5° $a^x : a^y = a^{x-y}$;

6° $\begin{cases} x > y \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a^x > a^y$;

7° $\begin{cases} x > y \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow a^x < a^y$.

Radicali

Definiții

1) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow a^n = c$, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$;

2) $\sqrt[n]{c} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a^n = c, \\ a > 0, \end{cases}$ $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Proprietăți

Pentru $a, b \in \mathbb{R}_+$, avem:

1° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2° $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;.

3° $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

4° $\sqrt[mk]{a^{nk}} = \sqrt[m]{a^n}$;

5° $\sqrt{a^2} = |a|$;

6° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+^*$;

7° $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}$, $ab \geq 0$;

8° $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$, $ab \geq 0, b \neq 0$;

9° $\sqrt[mk]{a^k} = \sqrt[m]{|a|}$, k par.

Logaritmi

Definiții

$\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$, $c, a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$.

$\lg c = \log_{10} c$ – logaritmi zecimali;

$\ln c = \log_e c$ – logaritmi naturali,

unde $e \approx 2{,}71\ldots$

Proprietăți

Pentru $a, c \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, avem:

1° $\log_a a = 1$; 2° $\log_a 1 = 0$; 3° $a^{\log_a c} = c$;

4° $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

5° $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;

6° $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$;

7° $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$, $\alpha \neq 0$;

8° $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$;

9° $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$;

10° $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $x \neq 0$;

11° $\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$;

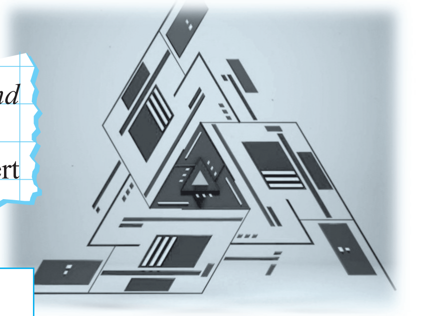
12° $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|$, $xy > 0$;

13° $\begin{cases} x > y > 0 \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_a x > \log_a y$;

14° $\begin{cases} x > y > 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_a x < \log_a y$.

MODULUL 4 Figuri geometrice în plan. Triunghiuri. Cercul şi discul. Recapitulare şi completări

Geometria este o imensă grădină şi fiecare, intrând în ea, îşi poate alege un buchet după placul său.
David Hilbert



Obiective

- identificarea şi utilizarea axiomelor, definițiilor şi teoremelor specifice geometriei în plan;
- aplicarea elementelor de geometrie în diverse contexte;
- identificarea şi aplicarea triunghiurilor şi a proprietăților acestora în diverse situații;
- identificarea şi aplicarea cercului, a discului şi a proprietăților acestora în situații reale şi/ sau modelate.

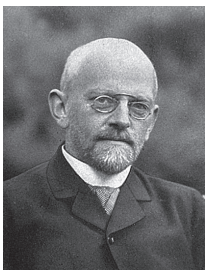
§1 Elemente de geometrie deductivă

În cursul gimnazial de geometrie ați învățat să distingeți şi să definiți principalele figuri geometrice din plan şi din spațiu, să recunoaşteți proprietățile fundamentale ale acestor figuri în baza experienței prin construirea repetată, observarea atentă şi descrierea lor. Din aceste observații experimentale s-au dedus reguli şi s-au formulat definiții ca generalizări ale proprietăților observate. Aceasta este *metoda intuitivă* (*inductivă*) de studiere a geometriei.

În cele ce urmează vom aprofunda şi vom sistematiza aceste deprinderi, competenţe prin utilizarea, deopotrivă cu metoda intuitivă, a *metodei raționale* (*deductive*) de studiere a geometriei.

Esența metodei raționale de studiere a geometriei constă în faptul că proprietățile figurilor geometrice sunt stabilite în virtutea unor raționamente precise, care nu iau în considerare tot ce are în particular figura examinată, ci se bazează doar pe proprietățile ei generale. Astfel, raționamentul capătă un caracter universal, adică este valabil atât pentru figura cercetată, cât şi pentru toate figurile care posedă aceleaşi proprietăți.

Noțiunile fundamentale (care nu se definesc) ale geometriei sunt: ***punct***, ***dreaptă***, ***plan*** (ca mulțimi de puncte), ***distanță***, ***măsură a unghiului***. Relațiile fundamentale sunt: ***de incidență***, ***de ordine***, ***de congruență*** şi ***de paralelism***.



David Hilbert (1862–1943) – matematician german

Vom formula propoziții ce exprimă relații între noțiunile fundamentale. Aceste propoziții se consideră a priori adevărate şi se numesc ***axiome***. În ele sunt enunțate proprietăți cunoscute ale figurilor geometrice, utilizate pe larg în clasele gimnaziale.

Sistemul de axiome folosit în acest manual este o variantă modificată a sistemului de axiome al lui D. Hilbert şi se clasifică în următoarele grupe:

1) axiome de incidență (**I**);
2) axiome de ordine (**O**);
3) axiome de măsurare (**M**) şi de construcție (**C**) a segmentelor şi unghiurilor;
4) axioma de existență a unui triunghi congruent cu un triunghi dat (**PT**);
5) axioma paralelelor (**P**).

1 Axiome de incidenţă

I$_1$ Două puncte distincte determină o dreaptă şi numai una.
I$_2$ Oricare ar fi dreapta, există puncte ce-i aparţin şi puncte ce nu-i aparţin.

Dreapta se notează cu literele mici ale alfabetului latin (fig. 4.1 a). Dacă A şi B sunt puncte distincte ce aparţin unei drepte, atunci dreapta poate fi notată AB (fig. 4.1 b). În figura 4.1 c) punctele distincte A şi B aparţin dreptei a ($A \in a$, $B \in a$), iar punctele C şi D nu aparţin dreptei a ($C \notin a$, $D \notin a$).

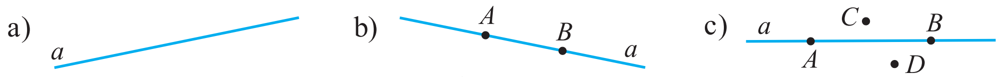


Fig. 4.1

2 Axiome de ordine

Axiomele de ordine pun în evidenţă relaţiile dintre punctele situate pe o dreaptă. Aceste relaţii se exprimă prin „a fi între” sau „a se afla între” etc.

O$_1$ Din trei puncte distincte ale unei drepte, unul şi numai unul se află între celelalte două.

Fie punctele A, B, C situate pe dreapta a (fig. 4.2). Propoziţiile 1)–4) sunt echivalente.

Fig. 4.2

1) Punctul C se află între punctele A şi B.
2) Punctul C este situat între A şi B.
3) Punctele A şi B se află de o parte şi de alta a punctului C.
4) Punctele A şi C sunt situate de aceeaşi parte a punctului B.

O$_2$ Oricare ar fi două puncte distincte A şi B pe dreapta determinată de ele, există cel puţin un punct C, astfel încât B se află între A şi C.

O$_3$ Orice dreaptă împarte mulţimea punctelor planului ce nu aparţin dreptei în două submulţimi disjuncte nevide de puncte, numite ***semiplane***, astfel încât segmentul determinat de două puncte oarecare din semiplane diferite intersectează dreapta (segmentul AC), iar segmentul determinat de două puncte distincte din acelaşi semiplan nu intersectează dreapta (segmentul AB) (fig. 4.3).

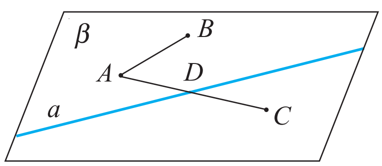


Fig. 4.3

3 Axiome de măsurare şi de construcţie a segmentelor şi unghiurilor

M$_1$ Fiecărui segment i se asociază un unic număr nenegativ, numit ***lungimea segmentului***. Lungimea unui segment este egală cu zero dacă şi numai dacă segmentul este nul. Lungimea unui segment este egală cu suma lungimilor segmentelor în care el este împărţit de orice punct interior al său.

Lungimea segmentului $[AB]$ se notează AB.

Folosind diferite unităţi de măsură (metrul, centimetrul, kilometrul etc.), obţinem diferite valori numerice ale lungimii unui segment.

M_2 Fiecărui unghi i se asociază o singură măsură în grade, cuprinsă între 0° şi 180°. Unghiului alungit i se asociază 180°, iar unghiului nul i se asociază 0°. Măsura unui unghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor în care el este împărțit de orice semidreaptă cu originea în vârful unghiului şi situată în interiorul lui.

C_1 Pentru orice număr real nenegativ *p*, pe o semidreaptă dată, există un unic punct care, împreună cu originea semidreptei, determină un segment de lungime *p*.

C_2 Pentru orice φ, $0° < \varphi < 180°$, în semiplanul dat, determinat de dreapta suport a oricărei semidrepte date, există un unic unghi de măsura φ, o latură a căruia este semidreapta dată.

4 Axioma de existență a unui triunghi congruent cu un triunghi dat

PT (**axioma de permutare congruentă a triunghiului**). Fie triunghiul *ABC* şi semidreapta $[A_1M$. Atunci, în semiplanul dat, determinat de dreapta A_1M, există un triunghi congruent cu triunghiul *ABC*, astfel încât un vârf al acestui triunghi coincide cu A_1, al doilea vârf, B_1, aparține semidreptei $[A_1M$, iar al treilea vârf, C_1, se află în semiplanul dat.

P (**axioma paralelelor**). Prin orice punct ce nu aparține unei drepte trece o unică dreaptă paralelă cu dreapta dată.

Noțiunile noi în geometrie se introduc cu ajutorul *definițiilor*.

Exemple

1. Dreapta care trece prin mijlocul unui segment şi este perpendiculară pe el se numeşte *mediatoare a segmentului*.
2. Segmentul care uneşte vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse acestui vârf se numeşte *mediană a triunghiului*.
3. Punctele care aparțin aceleiaşi drepte se numesc *puncte coliniare*. În caz contrar, punctele se numesc *necoliniare*.

Rețineți!

Teoremele sunt proprietăți importante care se demonstrează. Cunoaştem, că majoritatea teoremelor din cursul de geometrie se formulează (sau pot fi formulate) sub forma: „Dacă *A*, atunci *B*”, unde *A* şi *B* sunt enunțuri care se numesc, respectiv ***ipoteza*** şi ***concluzia*** teoremei (a se vedea Modulul 2).
Ipoteza teoremei se numeşte ***condiție suficientă*** pentru concluzie, iar concluzia se numeşte ***condiție necesară*** pentru ipoteză.
Demonstrația teoremei este o înlănțuire riguroasă de deducții bazate pe axiome, teoreme sau pe proprietăți deja demonstrate.

Exemplu

Să analizăm demonstrația schematică a teoremei:
„Dacă figura *ABC* este un triunghi, atunci suma măsurilor unghiurilor interioare ale ΔABC este egală cu 180°”.

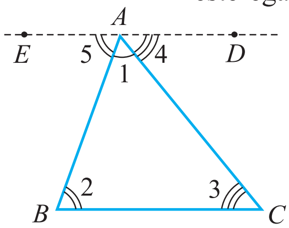


Fig. 4.4

Ducem $AD \parallel BC$ (fig. 4.4).
$S = m(\angle 1) + m(\angle 2) + m(\angle 3)$,
$\angle 2 \equiv \angle 5$ (unghiuri alterne interne), $\angle 3 \equiv \angle 4$ (unghiuri alterne interne),
deci $S = m(\angle 1) + m(\angle 4) + m(\angle 5)$.
$m(\angle 1) + m(\angle 4) + m(\angle 5) = 180°$, deoarece $\angle EAD$ este alungit.
Astfel, $S = 180°$.

La demonstrație am aplicat teorema despre congruența unghiurilor alterne interne (teorema 2). Demonstrația se bazează pe axioma paralelelor (**P**) şi pe axioma $\mathbf{M_2}$.

Sunt prezente implicit şi definiții: definiția paralelelor, a secantei, a unghiului, a triunghiului, a unghiurilor alterne interne.

De asemenea, sunt folosite implicit noțiunile nedefinite: „punct”, „dreaptă”, „egalitate”.

Se utilizează şi diferite operații logice.

Fie propoziția: „Dacă I, atunci C” (1).

Schimbând locurile ipotezei şi concluziei propoziției (1), obținem o nouă propoziție: „Dacă C, atunci I” (2).

Aceste două propoziții pot fi:

1) ambele adevărate,
2) una adevărată şi alta falsă,
3) ambele false.

Dacă ambele propoziții sunt adevărate, atunci ele sunt teoreme şi se numesc ***teoreme reciproce*** una pentru alta. De obicei, una dintre aceste teoreme se numeşte ***teoremă directă***, iar cealaltă se numeşte ***reciproca*** celei directe (a se vedea Modulul 2).

Exemple

1. Reciproca teoremei: „Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci ele sunt situate la distanțe egale de centrul cercului” este teorema: „Dacă două coarde ale unui cerc sunt situate la distanțe egale de centrul cercului, atunci ele sunt congruente”.

2. Reciproca teoremei: „Dacă un patrulater este dreptunghi, atunci diagonalele lui sunt congruente” este propoziția: „Dacă diagonalele unui patrulater sunt congruente, atunci el este dreptunghi”, care este falsă.

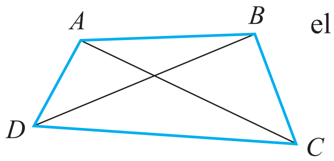


Fig. 4.5

În figura 4.5, $ABCD$ este patrulater cu diagonalele AC şi BD congruente, dar $ABCD$ nu este dreptunghi!

3. Reciproca propoziției: „Dacă un patrulater este dreptunghi, atunci laturile lui sunt congruente” este propoziția: „Dacă laturile unui patrulater sunt congruente, atunci patrulaterul este dreptunghi”. Ambele propoziții sunt false.

Convenim ca enunțurile a două teoreme reciproce una pentru alta să fie formulate ca o singură teoremă, utilizând îmbinările „condiție necesară şi suficientă” sau „dacă şi numai dacă” sau „atunci şi numai atunci”.

Astfel, cele două teoreme reciproce din exemplul **1** pot fi enunțate împreună, astfel: „Condiția necesară şi suficientă pentru ca două coarde ale unui cerc să fie congruente este ca ele să fie situate la aceeaşi distanță de centrul cercului” sau: „Două coarde ale unui cerc sunt situate la aceeaşi distanță de centrul cercului dacă şi numai dacă ele sunt congruente”.

Propoziția: „Diagonalele rombului sunt reciproc perpendiculare” este teoremă. Aceeaşi teoremă poate fi formulată astfel: „Dacă un paralelogram este romb, atunci diagonalele lui sunt reciproc perpendiculare”. Acum putem formula uşor reciproca ei: „Dacă diagonalele unui paralelogram sunt reciproc perpendiculare, atunci el este romb”. Aceasta este, de asemenea, teoremă.

Demonstrațiile teoremelor pot fi de tip *direct* sau de tip *indirect*, numite şi demonstrații prin ***reducere la absurd***. În astfel de demonstrații, adevărul concluziei rezultă din falsitatea negației acesteia (a se vedea Modulul 2).

Exemplu

Teoremă. Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice dreaptă care o intersectează pe una o intersectează şi pe cealaltă.

Ipoteza. $a \parallel b$, $c \nparallel a$, $c \cap a = \{P\}$ (fig. 4.6).

Concluzia. $c \nparallel b$.

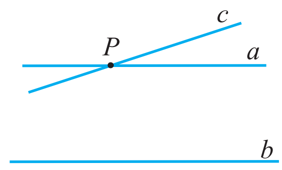


Fig. 4.6

Demonstrație. Aplicăm metoda reducerii la absurd.

Dacă presupunem că $c \parallel b$, atunci prin punctul P trec două drepte distincte a şi c paralele cu dreapta b. Dar aceasta este absurd, deoarece contrazice axioma **P** a paralelelor. Prin urmare, aşa cum c şi b nu pot fi paralele, ele trebuie să aibă un punct comun.

Amintim clasificarea perechilor de unghiuri ce se obțin la intersecția a două drepte distincte cu o a treia dreaptă, numită ***secantă***.

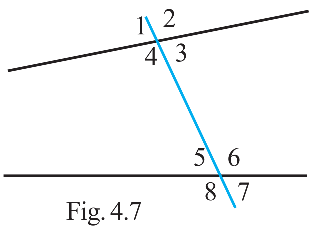


Fig. 4.7

Perechile de unghiuri (fig. 4.7):

(1, 5), (4, 8), (2, 6), (3, 7) se numesc ***unghiuri corespondente***;

(4, 6), (3, 5) se numesc ***unghiuri alterne interne***;

(1, 7), (2, 8) se numesc ***unghiuri alterne externe***;

(4, 5), (3, 6) se numesc ***unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei***;

(1, 8), (2, 7) se numesc ***unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei***.

Teorema 1

Dacă două drepte intersectate de o secantă formează (fig. 4.8):

1) sau două unghiuri alterne interne congruente;
2) sau două unghiuri alterne externe congruente;
3) sau două unghiuri corespondente congruente;
4) sau două unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei suplimentare;
5) sau două unghiuri externe de aceeaşi parte a secantei suplimentare,

atunci sunt congruente unghiurile alterne interne, alterne externe şi cele corespondente; de asemenea, sunt suplimentare unghiurile interne de aceeaşi parte a secantei şi cele externe de aceeaşi parte a secantei.

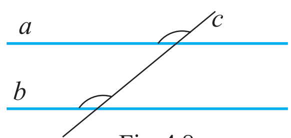


Fig. 4.8

Teorema 2

Două drepte distincte sunt paralele dacă şi numai dacă unghiurile alterne interne formate de o secantă cu aceste două drepte sunt congruente (fig. 4.9).

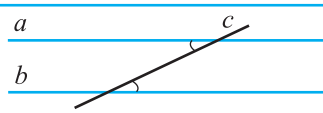


Fig. 4.9

Teorema 3

Două drepte distincte sunt paralele dacă şi numai dacă unghiurile alterne externe formate de o secantă cu aceste două drepte sunt congruente (fig. 4.10).

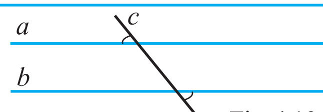


Fig. 4.10

Teorema 4

Două drepte distincte sunt paralele dacă şi numai dacă suma măsurilor unghiurilor interne de aceeaşi parte formate de o secantă cu aceste două drepte este egală cu 180° (fig. 4.11).

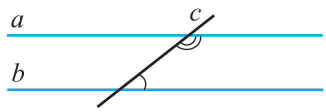


Fig. 4.11

Teorema 5

La intersecția dreptelor a şi b cu dreapta c, unghiurile corespondente sunt congruente dacă şi numai dacă $a \parallel b$.

Teorema 6

(proprietatea unghiurilor cu laturile respectiv paralele)

Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă ambele sunt ascuțite sau obtuze şi sunt suplimentare dacă unul este ascuțit, iar celălalt – obtuz.

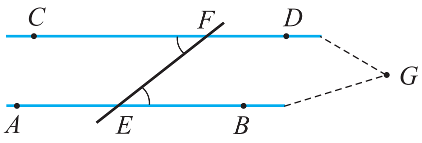


Fig. 4.12

Să demonstrăm, de exemplu, teorema 2.

Fie că dreptele *AB* şi *CD* intersectate de secanta *EF* formează unghiurile alterne interne congruente *CFE* şi *FEB* (fig. 4.12). Să demonstrăm că dreptele *AB* şi *CD* sunt paralele.

Demonstrăm prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că dreptele *AB* şi *CD* nu sunt paralele. Atunci ele trebuie să se intersecteze într-un punct *G*. Prin urmare, punctele *E*, *F*, *G* vor fi vârfurile triunghiului *EFG* al cărui unghi exterior *CFE* este congruent cu unghiul interior *BEF* neadiacent lui, ceea ce contrazice afirmația conform căreia unghiul exterior al unui triunghi nu poate fi congruent cu niciunul din unghiurile interioare neadiacente.

Deoarece dreptele *AB* şi *CD* nu pot avea un punct comun, ele sunt paralele.

Invers, fie dreptele *AB* şi *CD* paralele. Să demonstrăm că unghiurile alterne interne *CFE* şi *FEB* formate de acestea cu secanta *EF* sunt congruente.

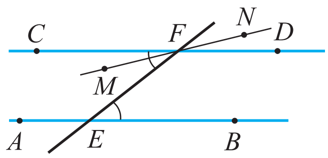


Fig. 4.13

Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că unghiurile *CFE* şi *FEB* nu sunt congruente, de exemplu, $m(\angle CFE) > m(\angle FEB)$ (fig. 4.13). Din această presupunere deducem că prin punctul *F* putem duce o dreaptă *MN*, diferită de dreapta *CD*, astfel încât $m(\angle MFE) = m(\angle FEB)$. Conform demonstrației de mai sus, dreptele *MN* şi *AB* sunt paralele, deoarece la intersecția cu secanta *EF* se obțin unghiuri alterne interne congruente ($\angle MFE$ şi $\angle BEF$). De aici rezultă că prin punctul *F* trec două drepte distincte paralele (*CD* şi *MN*) cu aceeaşi dreaptă *AB*. Dar aceasta contrazice axioma **P** a paralelelor.

Nu ne rămâne decât să admitem că unghiurile *CFE* şi *BEF* sunt congruente. ▶

Corolare

1. Dacă două drepte sunt paralele, atunci orice perpendiculară pe una dintre ele este perpendiculară şi pe cealaltă.
2. Două drepte perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sunt paralele.
3. Perpendicularele pe două drepte concurente sunt, de asemenea, concurente.

Exercițiu • Demonstrați teoremele 1, 3–6.

Probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Să se formuleze o definiție a:
   a) diagonalei unui poligon;
   b) coardei unui cerc;
   c) bisectoarei unui triunghi;
   d) rombului.

2. Definițiile: a) „Reuniunea segmentelor $[A_1A_2], [A_2A_3], ..., [A_{n-1}A_n]$ se numeşte linie frântă”;
   b) „Pătratul este un paralelogram cu toate cele patru laturi congruente”
   sunt incomplete. Cum pot fi transformate aceste definiții pentru a deveni corecte?

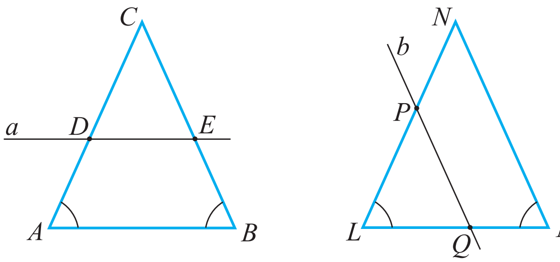
3. Să se formuleze „ipoteza” şi „concluzia” în propoziția:
   a) Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.
   b) Diametrul al unui cerc este mai mare decât orice coardă care nu trece prin centrul cercului.
   c) Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile congruente.
   d) Două drepte care au două puncte comune distincte coincid.

4. ***Investigaţi!*** Care dintre următoarele propoziții sunt adevărate?
Pentru care dintre acestea sunt adevărate propozițiile reciproce?
a) Mărimea unui unghi obtuz este mai mare decât mărimea unui unghi ascuțit.
b) Un triunghi care are două laturi congruente are şi două unghiuri congruente.
c) Suma măsurilor a două unghiuri suplimentare este egală cu 180°.
d) Dacă un patrulater convex are diagonalele congruente, atunci el este dreptunghi.

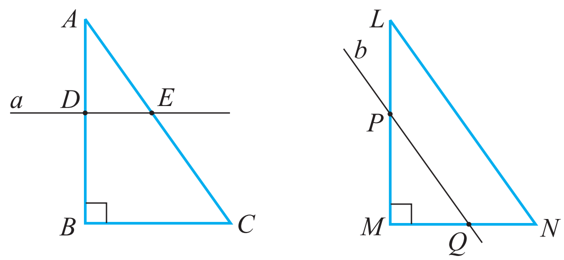
A/F

B

5. Triunghiurile ABC şi LMN din desen sunt isoscele. Dreapta $a \parallel AB$, dreapta $b \parallel MN$. Să se arate că triunghiurile CDE şi LQP sunt isoscele.

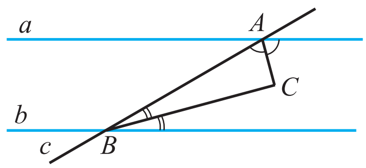


6. Triunghiurile ABC şi LMN din desen sunt dreptunghice. Dreapta $a \parallel BC$, dreapta $b \parallel LN$. Să se arate că triunghiurile ADE şi PMQ sunt dreptunghice.

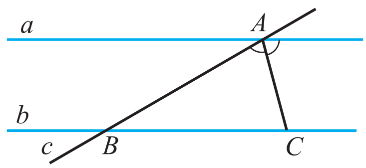


C

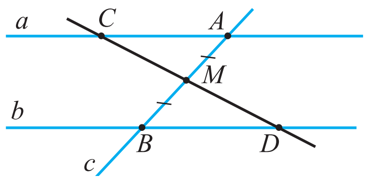
7. Dreptele a şi b din desen sunt paralele, c este secantă, AC şi BC sunt bisectoare. Să se arate că $AC \perp BC$.



8. ***Lucraţi în perechi!*** Dreptele a şi b din desen sunt paralele, c este secantă, AC este bisectoare. Să se arate că $[AB] \equiv [BC]$.



9. Dreptele a şi b din desen sunt paralele, punctul M este mijlocul segmentului AB, CD este secantă care trece prin punctul M. Să se arate că punctul M este mijlocul segmentului CD.



Profilul real

A₁

1. ***Lucraţi în perechi!*** Notăm cu P un patrulater şi considerăm propozițiile:

1) P este un dreptunghi;
2) laturile lui P sunt congruente;
3) unghiurile lui P sunt congruente;
4) diagonalele lui P sunt congruente.

a) Să se formuleze trei afirmații care au ca ipoteză 1) şi drept concluzii, respectiv, 2), 3) şi 4).
b) Să se determine care dintre aceste afirmații este falsă şi care dintre cele trei afirmații reciproce este adevărată.

B₁

2. Fie a şi b două drepte din planul P, concurente în punctul A. Să se descrie figura:
a) $a \cap b$, $a \cap P$, $b \cup P$; b) $(a \cap b) \cup P$, $\{A\} \cap (a \cup b)$.

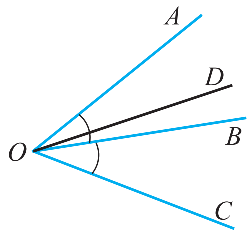
3. ***Investigaţi!*** Fie D_1 şi D_2 două suprafețe dreptunghiulare. În ce condiții $D_1 \cup D_2$ este suprafață dreptunghiulară? Dar $D_1 \cap D_2$?

4. Să se demonstreze că:

a) bisectoarele a două unghiuri adiacente suplimentare sunt perpendiculare;

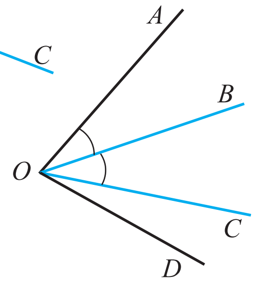
b) două unghiuri care au acelaşi vârf şi laturile respectiv perpendiculare sunt congruente sau suplimentare;

c) măsura unghiului format de bisectoarea OB a unghiului AOC şi semidreapta OD situată în interiorul unghiului AOB este egală cu semidiferența măsurilor unghiurilor DOC şi DOA (vezi figura alăturată);



d) măsura unghiului format de bisectoarea OB a unghiului AOC şi semidreapta OD externă unghiului AOC este egală cu semisuma măsurilor unghiurilor DOA şi DOC (vezi figura alăturată);

e) măsura unui unghi exterior al triunghiului este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente lui.



C₁

5. Fie T_1 şi T_2 două suprafețe triunghiulare congruente. Cum pot fi aranjate aceste suprafețe în plan, astfel încât:

a) $T_1 \cap T_2$ să fie suprafață hexagonală; b) $T_1 \cup T_2$ să fie suprafață triunghiulară;

c) $T_1 \cup T_2$ să fie suprafață mărginită de un paralelogram?

§ 2 Cercul şi discul

Ne amintim

Cerc de centru O şi rază R, $R > 0$, se numeşte mulțimea punctelor planului situate la distanța R de punctul O.
Se notează $\mathscr{C}(O, R)$ (fig. 4.14 a)).

Discul de centru O şi rază R, $R > 0$, este format din mulțimea punctelor planului a căror distanță până la O nu întrece R.
Se notează $\mathscr{D}(O, R)$ (fig. 4.14 b)).

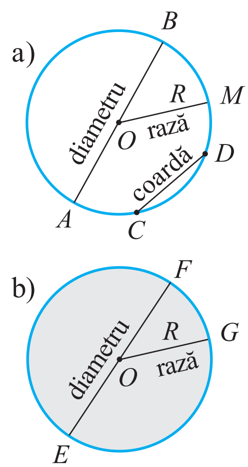
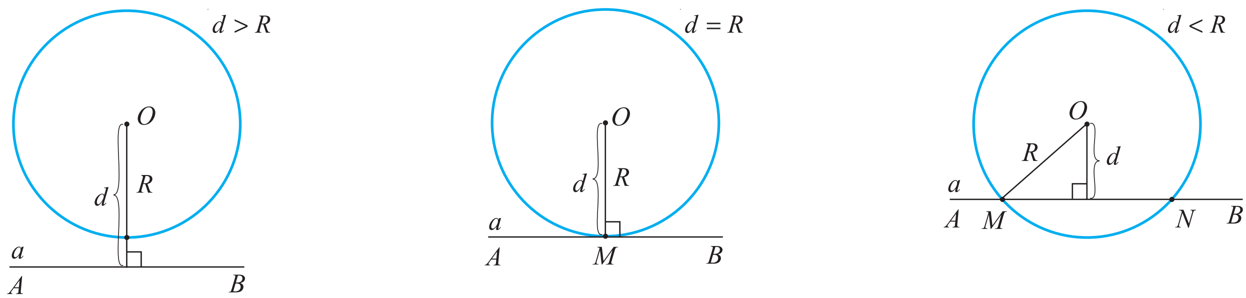


Fig. 4.14

Mulțimea punctelor planului situate de la centrul O la distanța mai mică/mare decât raza cercului R se numeşte ***interiorul/exteriorul cercului*** $\mathscr{C}(O, R)$.

Pozițiile relative ale dreptei a față de cercul $\mathscr{C}(O, R)$ sunt reprezentate în figura 4.15. Dreapta a este:

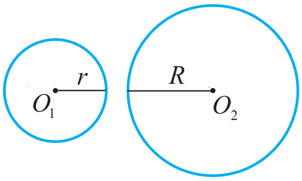


a) ***exterioară cercului*** b) ***tangentă cercului*** *în punctul M* c) ***secantă cercului*** *în punctele M, N*

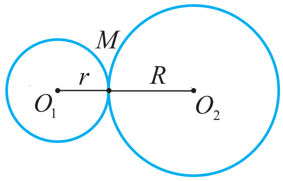
Fig. 4.15

Dacă dreapta a este tangentă la cercul $\mathscr{C}(O, R)$ în punctul M, atunci (fig. 4.15 b)):
1) punctul M este unicul punct comun al dreptei şi cercului;
2) dreapta a este perpendiculară pe raza OM în punctul M;
3) distanța de la centrul O la dreapta a este egală cu raza R ($d = R$).

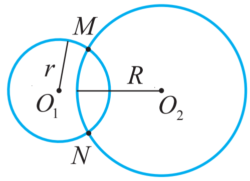
Pozițiile relative a două cercuri sunt reprezentate în figura 4.16. Cercurile $\mathscr{C}(O_1, r)$ şi $\mathscr{C}(O_2, R)$ sunt:



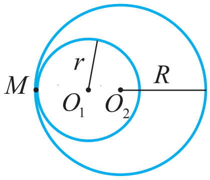
a) ***exterioare***



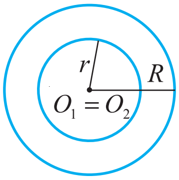
b) ***tangente exterior*** *în punctul M*



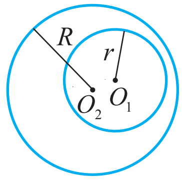
c) ***secante*** *în punctele M şi N*



d) ***tangente interior*** *în punctul M*



e) ***concentrice***



f) ***primul interior celui de al 2-lea, al 2-lea exterior primului***

Fig. 4.16

Teorema 7

Cele două tangente (luate ca segmente) construite la cerc din acelaşi punct exterior cercului au lungimi egale ($AT_1 = AT_2$). Bisectoarea unghiului format de aceste tangente trece prin centrul cercului (fig. 4.17).

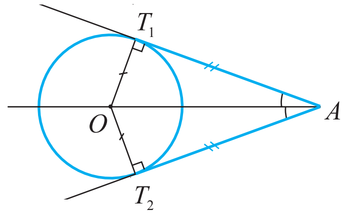


Fig. 4.17

Exercițiu • Demonstrați teorema 7.

Rețineți!

– Două unghiuri înscrise în cerc care cuprind acelaşi arc sunt egale: $m(\angle BAC) = m(\angle BDC)$ (fig. 4.18).

– Unghiul la centru corespunzător arcului BC este egal cu dublul unghiului înscris corespunzător arcului BC: $m(\smile BC) = m(\angle BOC) = 2m(\angle BAC) = 2m(\angle BDC)$.

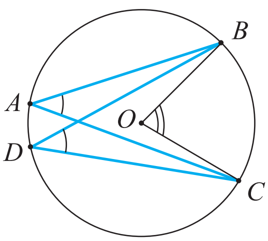


Fig. 4.18

– Dacă M este un punct de pe cercul $\mathscr{C}$ de centru O şi diametru AB, cu M diferit de A şi de B, atunci $m(\angle AMB) = 90°$.
Reciproc, dacă $m(\angle AMB) = 90°$, atunci punctul M este situat pe cercul de diametru AB (fig. 4.19).

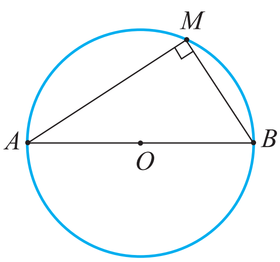


Fig. 4.19

– Dacă prin punctul A al cercului $\mathscr{C}$ sunt duse tangenta AB şi coarda AC, atunci $m(\angle BAC) = \frac{1}{2} m(\smile AC) = m(\angle ADC)$, $DC \parallel AB$ (fig. 4.20).

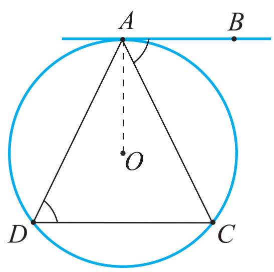


Fig. 4.20

Teorema 8

Puterea punctului în raport cu cercul

Fie un cerc, un punct M, o dreaptă ce trece prin punctul M şi intersectează cercul în punctele A şi B. Atunci produsul $AM \cdot MB$ nu depinde de alegerea dreptei (fig. 4.21).

Demonstrație:

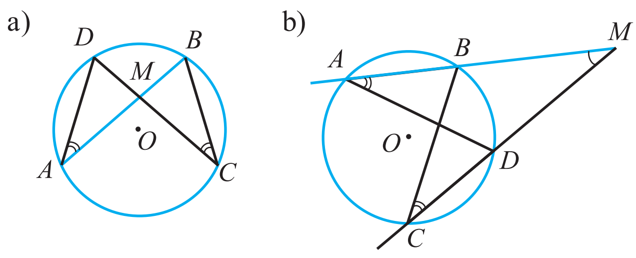


Fig. 4.21

1) Considerăm cazul când punctul M nu aparține cercului, adică se află sau în interiorul cercului (fig. 4.21 a)), sau în exteriorul lui (fig. 4.21 b)).

Ducem prin punctul M două drepte: prima intersectează cercul în punctele A şi B, iar a doua – în punctele C şi D. Construim segmentele BC şi AD şi obținem că $\Delta ADM \sim \Delta CBM$. Din proporționalitatea laturilor acestor triunghiuri rezultă că

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{DM}{MB} \Rightarrow AM \cdot MB = MC \cdot DM.$$

2) Dacă punctul M este situat pe cerc (fig. 4.22), atunci acest punct este o extremitate a coardei, adică punctul M împarte coarda în două segmente, dintre care unul este nul.

În acest caz, $AM \cdot MB = MM \cdot AB = 0 \cdot AB = 0.$ ▶

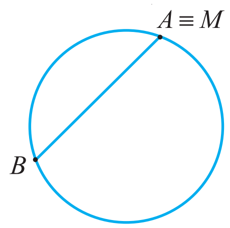


Fig. 4.22

Rețineți!

Produsul $AM \cdot MB$ se numeşte ***puterea*** punctului în raport cu cercul dat.

În plus, $MA \cdot MB = R^2 - a^2$, când punctul M este interior cercului şi $MA \cdot MB = a^2 - R^2$, când punctul M este exterior cercului, unde R – raza cercului, iar a – distanța de la punctul M la centrul cercului.

Probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Două cercuri cu razele de 15 cm şi 25 cm sunt tangente exterior. Să se afle distanța dintre centrele cercurilor.

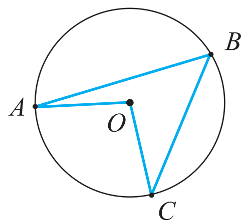
2. Două cercuri cu razele de 18 cm şi 30 cm sunt tangente interior. Să se determine distanța dintre centrele cercurilor.

3. Pe un cerc se dau punctele distincte A, B, C şi D. Să se determine măsura unghiului ACD, dacă $m(\angle ABD) = 50°$.

B

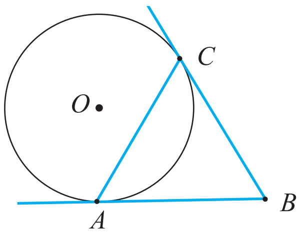
4. Punctele A, B, C aparțin unui cerc de rază 18 cm. Să se calculeze lungimea coardei AC, dacă măsura unghiului ABC este de 30°.

5. (BAC 2023) În desenul alăturat, punctele A, B şi C aparțin cercului de centru O, astfel încât $m(\angle ABC) = 50°$, iar $m(\angle AOC) = (3x - 50)°$. Determinați valoarea lui x.



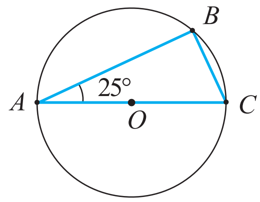
6. (BAC 2021) În desenul alăturat, dreptele BA şi BC sunt tangente la cercul de centru O în punctele A şi C respectiv, iar $m(\angle ABC) = 60°$. Scrieţi în casetă lungimea coardei AC, dacă $AB = 7$ cm.

$AC = \boxed{}$ cm.



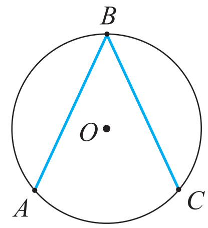
7. (BAC 2015) În desenul alăturat, punctele A, B şi C aparţin unui cerc, astfel încât AC este diametru şi $m(\angle BAC) = 25°$. Scrieţi în casetă măsura unghiului ACB.

$m(\angle ACB) = \boxed{}°$.



8. (BAC 2019) În desenul alăturat, coardele AB şi BC sunt congruente. Scrieţi în casetă măsura în grade a arcului mic AB, dacă arcul mic AC este de $100°$.

$m(\smile AB) = \boxed{}°$.



9. Fie un cerc ale cărui coarde AD şi BC se intersectează. Ştiind că $m(\angle ABC) = 40°$, $m(\angle ACD) = 100°$, să se afle măsura unghiului CAD.

C

10. ***Lucraţi în perechi!*** Coardele AC şi BD ale unui cerc se intersectează în punctul E. Ştiind că $AC = 20$ cm, $BE = 6$ cm şi că $AE : EC = 2 : 3$, să se calculeze lungimea segmentului ED.

Profilul real

A_1

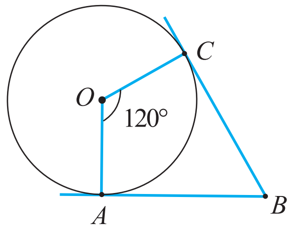
1. Să se arate că mediana corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic împarte triunghiul în două triunghiuri isoscele.

2. Să se arate că o dreaptă ce trece prin punctul de tangenţă a două cercuri tangente exterior le împarte astfel încât arcele situate în semiplane diferite, mărginite de dreaptă, au aceleaşi măsuri.

3. Prin punctul A de tangenţă a două cercuri tangente exterior trec două drepte care intersectează primul cerc în punctele C şi B, iar cercul al doilea – în punctele D şi E. Să se arate că triunghiurile cu vârfurile A, B, C şi A, D, E sunt asemenea şi că $DE \parallel BC$.

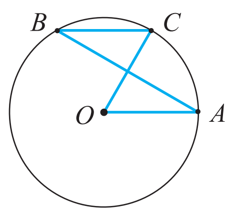
4. (BAC 2021) În desenul alăturat, dreptele BA şi BC sunt tangente la cercul de centru O în punctele A şi C respectiv. Scrieţi în casetă măsura în grade a unghiului ABC, dacă se cunoaşte că $m(\angle AOC) = 120°$.

$m(\angle ABC) = \boxed{}$.



5. (BAC 2017) În desenul alăturat, punctele A, B şi C aparţin cercului de centru O, astfel încât $m(\angle ABC) = 30°$. Scrieţi în casetă măsura în grade a unghiului AOC.

$m(\angle AOC) = \boxed{}$.



B_1

6. Două cercuri se intersectează în punctele A şi B. Prin punctul A este construită o dreaptă care intersectează cercurile în punctele C şi D. Să se arate că măsura unghiului CBD este o mărime constantă pentru orice dreaptă ce trece prin punctul A.
7. *Lucraţi în perechi!* Din punctul A, exterior unui cerc, sunt construite două tangente la cerc în punctele de tangenţă B şi C. La arcul BC, situat în interiorul triunghiului ABC, este construită o tangentă, care intersectează segmentele AB şi AC în punctele B_1, respectiv C_1. Să se arate că perimetrul triunghiului AB_1C_1 este egal cu $2AB$ şi nu depinde de poziţia punctului de tangenţă pe arcul BC.
8. Două cercuri sunt tangente exterior în punctul A. La cercuri este construită o tangentă comună exterioară în punctele de tangenţă B şi C. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
9. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu înălţimea AA_1 şi centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că $\angle BAA_1 \equiv \angle OAC$.
10. Două cercuri se intersectează în punctele A şi B. Din punctul C, situat pe dreapta AB şi care nu aparţine segmentului AB, sunt construite două tangente la cercurile date în punctele D şi E. Să se arate că segmentele CE şi CD sunt congruente.

C_1

11. Fie triunghiul ABC cu înălţimile AA_1 şi BB_1 şi punctul O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Să se arate că:
a) patrulaterul AB_1A_1B este inscriptibil;
b) dreapta OC este perpendiculară pe dreapta A_1B_1.
12. Două cercuri cu razele R şi r sunt tangente exterior. Să se afle distanţa dintre punctele de tangenţă a tangentei comune exterioare cu aceste cercuri.
13. Fie punctele A şi B şi unghiul φ. Să se construiască mulţimea punctelor M din plan astfel încât $m(\angle AMB) = \varphi$. (Se mai spune că *segmentul AB se vede sub un unghi de măsură* φ.)
14. Punctul P este situat la distanţa de 7 cm de centrul cercului cu raza de 11 cm. Prin acest punct este dusă o coardă de lungime 18 cm. Să se afle lungimile segmentelor determinate de punctul P pe această coardă.
15. Din punctul A, exterior cercului, sunt duse o tangentă şi o secantă. Distanţa de la punctul A până la punctul de tangenţă este egală cu 16 cm, iar până la unul din punctele de intersecţie a secantei cu cercul este egală cu 32 cm. Să se afle raza cercului, dacă distanţa de la centrul cercului până la secantă este egală cu 5 cm.

§ 3 Triunghiuri. Congruenţa triunghiurilor. Clasificări

Ne amintim

Definiţii

- Două segmente închise se numesc **congruente** dacă lungimile lor sunt egale.
- Două unghiuri se numesc **congruente** dacă măsurile lor sunt egale.

Congruenţa unghiurilor AOB şi $A_1O_1B_1$ se notează $\angle AOB \equiv \angle A_1O_1B_1$, iar congruenţa segmentelor AB şi A_1B_1 se notează $[AB] \equiv [A_1B_1]$.

Definiţie

Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ se numesc **congruente** dacă au loc relaţiile:
$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[CA] \equiv [C_1A_1]$,
$\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$, $\angle ACB \equiv \angle A_1C_1B_1$, $\angle CBA \equiv \angle C_1B_1A_1$.

Se notează: $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

Menţionăm că din faptul că $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ nu rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta A_1C_1B_1$, adică la congruenţa triunghiurilor contează ordinea vârfurilor.

Se poate demonstra că două triunghiuri congruente cu al treilea sunt congruente.

La rezolvarea multor probleme se aplică metoda triunghiurilor congruente bazată pe ***criteriile de congruență*** a două triunghiuri.

Criteriul LUL (Latură Unghi Latură). Dacă în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $[AC]\equiv[A_1C_1]$ şi $\angle BAC\equiv\angle B_1A_1C_1$, atunci $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$ (fig. 4.23 a)).

Criteriul ULU (Unghi Latură Unghi). Dacă în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $\angle BAC\equiv\angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC\equiv\angle A_1B_1C_1$, atunci $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$ (fig. 4.23 b)).

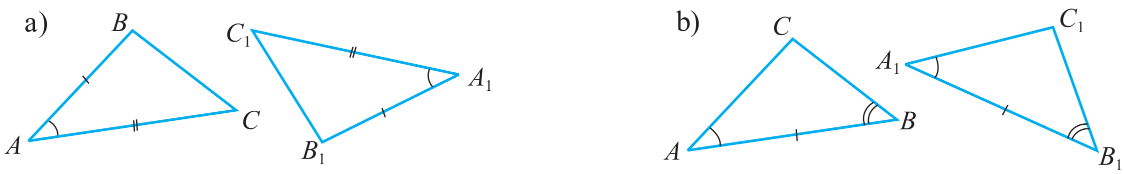


Fig. 4.23

❍ Ne amintim

Definiție Triunghiul cu două laturi congruente se numeşte **triunghi isoscel**.

Teorema 9 Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente.

Definiție Triunghiul cu toate laturile congruente se numeşte **triunghi echilateral**.

Criteriul LLL (Latură Latură Latură). Dacă în triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au loc relațiile $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $[BC]\equiv[B_1C_1]$, $[CA]\equiv[C_1A_1]$, atunci $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$.

Demonstrație:

Fie ΔABC şi $\Delta A_1B_1C_1$ în care au loc relațiile din enunț (fig. 4.24). În virtutea axiomei **PT**, în semiplanul determinat de dreapta A_1B_1 ce nu conține punctul C_1 există $\Delta A_1B_1C_2$, astfel încât $\Delta A_1B_1C_2\equiv\Delta ABC$ (1).

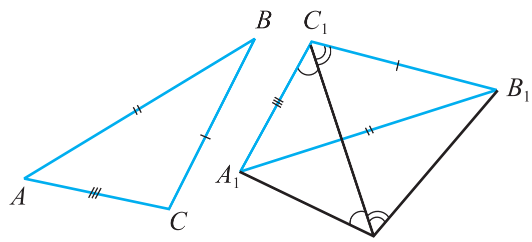


Fig. 4.24

Din (1) obținem:

$[C_1A_1]\equiv[CA]\equiv[C_2A_1]$, $[C_1B_1]\equiv[CB]\equiv[C_2B_1]$.

Construim segmentul C_1C_2 şi obținem triunghiurile isoscele $C_2A_1C_1$ şi $C_2B_1C_1$, în care au loc relațiile $\angle A_1C_1C_2\equiv\angle A_1C_2C_1$ şi $\angle C_2C_1B_1\equiv\angle C_1C_2B_1$. De aici rezultă că $\angle A_1C_1B_1\equiv\angle A_1C_2B_1$ şi, conform criteriului LUL, obținem că $\Delta A_1B_1C_1\equiv\Delta A_1B_1C_2$.

Aşa cum $\Delta A_1B_1C_2\equiv\Delta ABC$, rezultă că $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$. ▶

Exercițiu • Demonstrați criteriile LUL şi ULU de congruență a triunghiurilor.

Ne amintim

Unghiul adiacent suplimentar unui unghi interior al triunghiului se numeşte ***unghi exterior*** al triunghiului.

Teorema 10

(proprietatea unghiului exterior al unui triunghi)
Măsura unghiului exterior al unui triunghi este mai mare decât măsura oricărui unghi interior neadiacent lui.

Demonstrație:

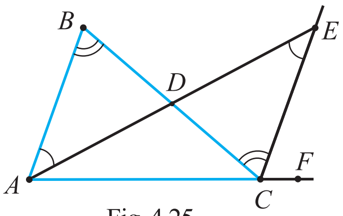


Fig. 4.25

Vom demonstra că măsura unghiului exterior FCB al triunghiului ABC (fig. 4.25) este mai mare decât măsura unghiului interior ABC. Pentru aceasta, construim punctul D pe latura BC, astfel încât $[BD]\equiv[DC]$, iar pe semidreapta $[AD$ luăm punctul E, astfel încât D să fie situat între A şi E şi $[AD]\equiv[DE]$. Aşa cum punctele A şi E se află în semiplane diferite, determinate de dreapta BC, şi A se află pe complementara semidreptei $[DE$, deducem că punctul E este situat în interiorul unghiului FCB.

Aplicând axioma $\mathbf{M}_2$, deducem că $m(\angle FCB) > m(\angle ECD)$.

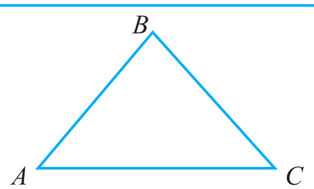
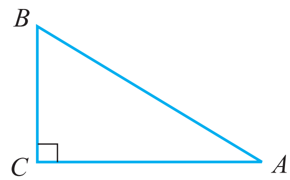
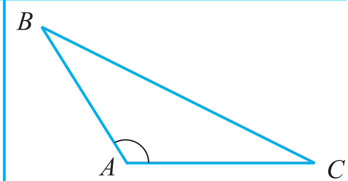
Conform criteriului LUL de congruență a triunghiurilor, rezultă că $\Delta ABD \equiv \Delta ECD$ şi, prin urmare, $m(\angle ABC) = m(\angle ECD) < m(\angle FCB)$.

În mod analog se demonstrează că $m(\angle FCB) > m(\angle BAC)$. ▶

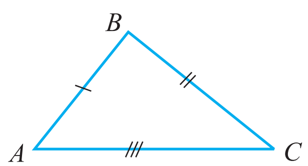
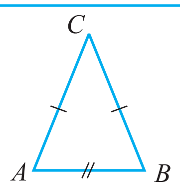
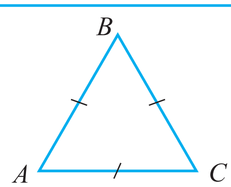
Ne amintim

Triunghiurile se clasifică după:

✓ ***Unghiuri***

Triunghi ascuțitunghic	Triunghi dreptunghic	Triunghi obtuzunghic
 Toate unghiurile sunt ascuțite: $m(\angle A) < 90°$, $m(\angle B) < 90°$, $m(\angle C) < 90°$.	 Un unghi este drept: $m(\angle C) = 90°$.	 Un unghi este obtuz: $m(\angle A) > 90°$.

✓ ***Laturi***

Triunghi scalen (oarecare)	Triunghi isoscel	Triunghi echilateral
 Toate laturile au lungimi diferite: $AB \neq AC$, $AB \neq BC$, $AC \neq BC$.	 Două laturi congruente: $AC = BC$.	 Toate laturile congruente: $AB = AC = BC$.

Problemă rezolvată

Lungimea uneia din laturile congruente ale unui triunghi isoscel este de două ori mai mare decât lungimea bazei. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului, dacă semiperimetrul lui este de 40 cm.

Rezolvare:

Perimetrul triunghiului ABC este egal cu 80 cm, deci $AB+AC+BC=80$ cm.

Deoarece $AC=AB=2BC$, obținem: $5BC=80 \text{ cm} \Rightarrow BC=16$ cm.

Atunci $AC=AB=32$ cm.

Răspuns: 16 cm, 32 cm, 32 cm.

Probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Punctul de intersecție al segmentelor AB şi CD este mijlocul fiecăruia dintre segmente. Să se determine lungimea segmentului AC, dacă $BD=12$ cm.

2. O dreaptă intersectează segmentul AB în mijlocul lui. Distanța de la punctul A la dreaptă este de 8 cm. Să se afle distanța de la punctul B la dreaptă.

3. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 100 cm, iar lungimea bazei lui este de 40 cm. Să se determine lungimea laturilor congruente.

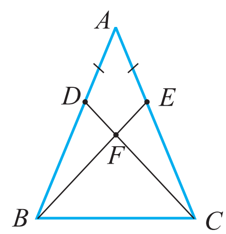
4. Să se afle perimetrul unui triunghi isoscel cu baza de 20 cm şi laturile congruente de 40 cm.

B

5. ***Lucrați în perechi!*** Perimetrul unui triunghi isoscel este de 44 cm. Să se determine lungimile laturilor triunghiului, dacă lungimea bazei este cu 4 cm mai mică decât lungimea laturilor congruente.

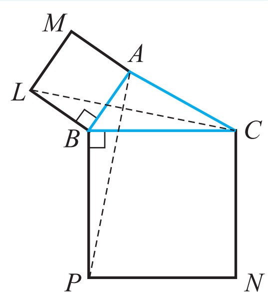
6. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 56 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului, dacă lungimea laturilor congruente este cu 2 cm mai mică decât lungimea bazei.

7. Pe laturile congruente AB şi AC ale triunghiului isoscel ABC (vezi figura alăturată) se construiesc două segmente congruente, AD şi AE. Să se afle lungimea segmentului BF, dacă $CF=3$ cm.
(*Indicație*. $\Delta CDA \equiv \Delta BEA \Rightarrow \Delta CFB$ este isoscel.)

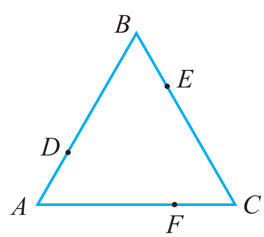


C

8. ***Investigați!*** Pe laturile AB şi BC ale triunghiului arbitrar ABC se construiesc în exterior pătratele $ABLM$ şi $BCNP$. Să se arate că $\Delta LBC \equiv \Delta ABP$.



9. Pe laturile triunghiului echilateral ABC se construiesc segmentele congruente AD, BE şi CF ca în figura alăturată. Ştiind că $DE=3$ cm, să se determine lungimile celorlalte laturi ale ΔDEF.



Profilul real

A₁

1. Să se demonstreze că:
a) înălțimile corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente;
b) bisectoarele unghiurilor alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente;
c) medianele corespunzătoare laturilor congruente ale unui triunghi isoscel sunt congruente.

2. (BAC 2014) Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 32 cm. Lungimea bazei triunghiului este cu 2 cm mai mare decât lungimea fiecărei dintre laturile congruente. Aflați lungimea înălțimii corespunzătoare bazei triunghiului.

3. Să se demonstreze că punctul egal depărtat de laturile unui unghi aparține bisectoarei acestui unghi.

4. (BAC 2019) Bisectoarea BK a triungiului ABC împarte latura AC în segmentele $AK = 4$ cm şi $KC = 2$ cm. Aflați lungimea laturii AB, dacă se ştie că $BC = 3$ cm.

5. Prin mijlocul unui segment este construită o dreaptă. Să se demonstreze că extremitățile segmentului sunt egal depărtate de dreaptă.

6. ***Lucrați în perechi!*** Triunghiul ABC este isoscel $(AB = AC)$. Pe laturile AB şi AC se iau punctele B_1, respectiv C_1, astfel încât $AB_1 = AC_1$. Să se demonstreze că:
a) $\Delta AB_1C \equiv \Delta AC_1B$;
b) $\Delta CB_1B \equiv \Delta BC_1C$.

B₁

7. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt congruente. Să se demonstreze că:
a) medianele AM şi A_1M_1 sunt congruente;
b) bisectoarele AL şi A_1L_1 sunt congruente.

8. Fie triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ cu medianele AM, respectiv A_1M_1. Să se demonstreze congruența triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$, dacă se ştie că $[AM]\equiv[A_1M_1]$, $[AB]\equiv[A_1B_1]$ şi $[BC]\equiv[B_1C_1]$.

9. Să se demonstreze congruența triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$, ştiind că $[AC]\equiv[A_1C_1]$, $[AB]\equiv[A_1B_1]$ şi $[AM]\equiv[A_1M_1]$, unde $[AM]$ şi $[A_1M_1]$ sunt mediane ale triunghiurilor ABC, respectiv $A_1B_1C_1$.

10. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt congruente, dacă $[BC]\equiv[B_1C_1]$, $[AM]\equiv[A_1M_1]$ şi $\angle CMA \equiv \angle C_1M_1A_1$, unde $[AM]$ şi $[A_1M_1]$ sunt mediane ale triunghiurilor ABC, respectiv $A_1B_1C_1$.

C₁

11. ***Investigați!*** Să se arate că lungimea medianei unui triunghi este mai mică decât semisuma lungimilor laturilor ce pornesc din acelaşi vârf cu mediana.

12. ***Lucrați în perechi!*** Să se arate că suma lungimilor medianelor unui triunghi este mai mare decât semiperimetrul triunghiului şi este mai mică decât perimetrul lui.

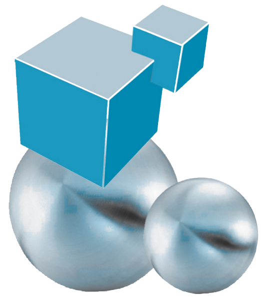
13. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt congruente, dacă $[AM]\equiv[A_1M_1]$, $[AM]$ şi $[A_1M_1]$ sunt mediane ale triunghiurilor ABC, respectiv $A_1B_1C_1$, $\angle MAC \equiv \angle M_1A_1C_1$ şi $\angle MAB \equiv \angle M_1A_1B_1$.

14. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt congruente, dacă $[AB]\equiv[A_1B_1]$, $[AL]\equiv[A_1L_1]$ şi $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$ ($[AL]$ şi $[A_1L_1]$ sunt bisectoare ale triunghiurilor ABC, respectiv $A_1B_1C_1$).

15. Fie triunghiul isoscel ABC $(AB = AC)$ cu mediana AM. Să se calculeze lungimea medianei AM, dacă triunghiul ABC are perimetrul $\mathcal{P}$, iar triunghiul ABM are perimetrul $\mathcal{P}_1$.

16. Lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi se află în relația $a:b:c = 3:4:5$. Să se determine lungimile laturilor triunghiului, dacă perimetrul lui este de 60 cm.

§4 Asemănarea figurilor. Asemănarea triunghiurilor. Teorema lui Thales



Definiție

Fie k un număr real pozitiv. **Transformare de asemănare de coeficient** k (sau **asemănare de coeficient** k) **a planului** se numeşte aplicația planului pe el însuşi, care pentru orice două puncte distincte A, B şi imaginile lor respective A', B' satisface condiția $A'B' = kAB$.

Din egalitatea $A'B' = k \cdot AB$ rezultă că dacă $A \neq B$, atunci $A' \neq B'$.

Teorema 11

1. Compunerea a două asemănări de coeficienți k_1 şi k_2 este o asemănare de coeficient $k_1 k_2$.

2. Transformarea inversă asemănării de coeficient k este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$.

Demonstrație:

1. Admitem că punctele arbitrare A şi B se aplică, prin asemănarea de coeficient k_1, pe punctele A', respectiv B', iar acestea, la rândul lor, prin asemănarea de coeficient k_2, se aplică pe punctele A'', respectiv B''. Atunci $A'B' = k_1 AB$ şi $A''B'' = k_2 A'B'$. De aici obținem $A''B'' = k_1 k_2 AB$, adică transformarea care aplică punctele A şi B pe A'', respectiv B'' este o asemănare de coeficient $k_1 k_2$.

2. La asemănarea de coeficient k, pentru punctele A şi B ale planului şi imaginile respective A' şi B' are loc egalitatea $A'B' = k \cdot AB$. De aici rezultă că $AB = \frac{1}{k} \cdot A'B'$, adică transformarea care aplică punctele A' şi B' pe punctele A, respectiv B este o asemănare de coeficient $\frac{1}{k}$. ▶

Ne amintim

Două figuri se numesc ***asemenea*** dacă există o transformare de asemănare a planului care aplică una din aceste figuri pe cealaltă. Congruența figurilor este un caz particular al asemănării $(k = 1)$.

Definiție

Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ se numesc **triunghiuri asemenea** dacă
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k \text{ şi } \angle A \equiv \angle A',\ \angle B \equiv \angle B',\ \angle C \equiv \angle C'.$$

Se notează $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Amintim unele teoreme, proprietăți, precum şi criteriile de asemănare a triunghiurilor.

Teorema 12

(Thales) O dreaptă ce nu trece prin niciunul din vârfurile unui triunghi şi este paralelă cu una din laturile lui taie pe dreptele determinate de celelalte două laturi segmente proporționale (fig. 4.26).

Teorema 13

(teorema fundamentală a asemănării)
Fie ABC un triunghi şi B_1 un punct pe dreapta BC, diferit de C. Dacă dreapta paralelă cu latura AB ce trece prin punctul B_1 intersectează dreapta AC în punctul A_1, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1 B_1 C$ (fig. 4.26).

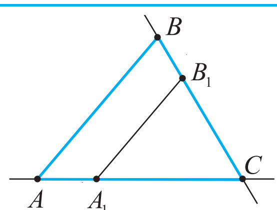


Fig. 4.26

Ne amintim

La rezolvarea multor probleme de geometrie se foloseşte metoda triunghiurilor asemenea, care se bazează pe următoarele criterii de asemănare a triunghiurilor:

***Criteriul* 1**. Dacă două unghiuri ale unui triunghi sunt congruente cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.

***Criteriul* 2**. Dacă două laturi ale unui triunghi sunt proporţionale cu două laturi ale altui triunghi şi unghiurile formate de aceste laturi sunt congruente, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.

***Criteriul* 3**. Dacă toate laturile unui triunghi sunt proporţionale cu laturile respective ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sunt asemenea.

Teorema 14

(proprietatea bisectoarei unghiului interior al triunghiului)

Fie triunghiul ABC şi un punct A' interior laturii BC. Pentru ca semidreapta $[AA'$ să fie bisectoare a unghiului interior BAC al acestui triunghi, este necesar şi suficient ca $\frac{BA'}{A'C}=\frac{AB}{AC}$ (fig. 4.27).

Teorema 15

Dacă laturile unghiului XOY sunt intersectate de n, $n\in\mathbb{N}^*$, $n>1$, drepte paralele A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n, atunci segmentele respective tăiate de aceste drepte pe laturile lui sunt proporţionale: $\frac{OA_1}{OB_1}=\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$ (fig. 4.28).

Teorema 16

Dacă două drepte paralele, a şi b, sunt intersectate de n, $n\in\mathbb{N}^*$, $n>2$, drepte ce trec prin acelaşi punct O, $O\notin a$, $O\notin b$, atunci segmentele tăiate pe dreptele a şi b sunt proporţionale: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\ldots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}$ (fig. 4.29).

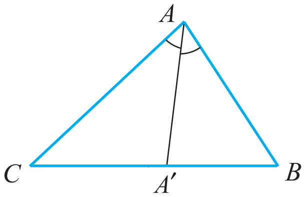


Fig. 4.27

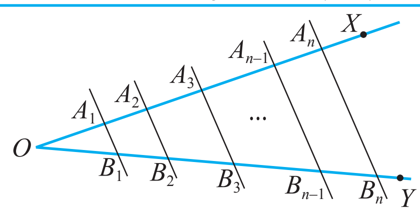


Fig. 4.28

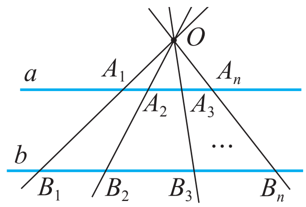


Fig. 4.29

Exerciţiu • Demonstraţi teoremele 14–16.

Problemă rezolvată

Lungimile laturilor triunghiului ABC sunt $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Să se afle lungimea laturii rombului înscris în ΔABC, ştiind că un unghi al rombului coincide cu unghiul A al triunghiului, iar un vârf al acestuia aparţine laturii BC a triunghiului ABC (fig. 4.30).

Rezolvare:

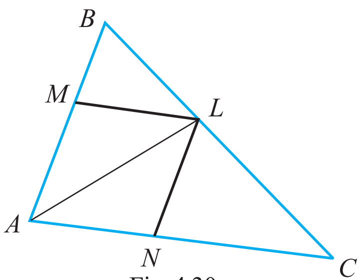


Fig. 4.30

Fie rombul $AMLN$ înscris în triunghiul ABC. Deoarece o diagonală a rombului este bisectoarea unghiului A al triunghiului dat, rezultă că vârful L al rombului este punct de intersecţie a laturii BC şi bisectoarei unghiului A.

Triunghiurile MBL şi ABC sunt asemenea, deci

$$AC:ML=BC:BL=(BL+LC):BL=1+LC:BL. \qquad (1)$$

Din teorema bisectoarei unui triunghi rezultă că

$$LC:BL=AC:AB=b:c. \qquad (2)$$

Din egalităţile (1) şi (2) obţinem: $\frac{b}{ML}=1+\frac{b}{c}\Rightarrow ML=\frac{bc}{b+c}$.

Răspuns: Latura rombului este $\frac{bc}{b+c}$.

Probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Lungimile a două laturi ale unui triunghi isoscel sunt de 18 cm şi 6 cm, iar lungimea laturilor congruente ale unui alt triunghi isoscel este de 6 cm. Să se determine lungimea bazei triunghiului al doilea, dacă unghiurile alăturate bazei ale primului triunghi sunt congruente cu unghiurile alăturate bazei ale triunghiului al doilea.

2. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea şi $AB = 12$ cm, $A_1B_1 = 3$ cm, $AC = 16$ cm, $B_1C_1 = 2$ cm. Să se afle perimetrele triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$.

B

3. Piciorul înălţimii CD a triunghiului dreptunghic ABC $(m(\angle C) = 90°)$ împarte ipotenuza în segmentele $AD = 18$ cm şi $BD = 32$ cm. Să se determine lungimile laturilor triunghiului ABC.

4. ***Lucraţi în perechi!*** În triunghiul ABC, cu înălţimea $AD = 10$ cm şi latura $BC = 15$ cm, este înscris un pătrat, astfel încât două vârfuri ale acestuia aparţin laturii BC, iar celelalte două se află pe laturile AB şi AC. Să se afle lungimea laturii pătratului.

C

5. Dreptele suport ale laturilor neparalele AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Să se determine lungimile laturilor triunghiului AED, dacă $AB = 10$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 12$ cm, $AD = 30$ cm.

6. ***Lucraţi în perechi!*** Lungimile umbrelor a doi copaci sunt de 10,8 m şi 1,8 m. Copacul al doilea are înălţimea de 1,2 m. Să se afle înălţimea primului copac.

7. ***Lucraţi în grup!*** ○ **Lucrarea practică pe teren:** *Aplicarea asemănării triunghiurilor în activitatea cotidiană.*

Profilul real

A_1

1. Unghiurile A şi A_1 ale triunghiurilor isoscele ABC $([AB] \equiv [AC])$ şi $A_1B_1C_1$ $([A_1B_1] \equiv [A_1C_1])$ sunt congruente. Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C) = 90°$ şi înălţimea CD. Să se arate că:
a) $\Delta ABC \sim \Delta ACD$; b) $\Delta ABC \sim \Delta CBD$; c) $\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

3. Fie triunghiurile asemenea ABC şi $A_1B_1C_1$ cu medianele AM, respectiv A_1M_1. Să se arate că $A_1M_1 : AM = A_1B_1 : AB$.

4. Fie triunghiurile asemenea ABC şi $A_1B_1C_1$ cu bisectoarele AL, respectiv A_1L_1. Să se arate că $A_1L_1 : AL = A_1B_1 : AB$.

5. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Să se arate că $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ dacă şi numai dacă $BC \parallel AD$.

B_1

6. Să se arate că dacă H este punctul de intersecţie a dreptelor suport ale înălţimilor AA_1, BB_1, CC_1 ale oricărui triunghi ABC, atunci au loc relaţiile $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

7. ***Lucraţi în perechi!*** Să se arate că în orice trapez sunt coliniare: punctul de intersecţie a dreptelor suport ale laturilor neparalele, mijloacele bazelor şi punctul de intersecţie a diagonalelor.

8. Fie triunghiul ABC $(AB < BC)$ cu bisectoarea BL şi mediana BM. Să se arate că $BL < BM$.

9. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul M şi are loc relaţia $AM \cdot CM = BM \cdot MD$. Să se arate că $\angle ADB \equiv \angle ACB$.

C1

10. Lungimile laturilor unui triunghi se raportă ca $2:4:5$. Să se afle lungimile laturilor triunghiului asemenea cu cel dat, ştiind că perimetrul lui este de 66 cm.

11. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea şi $AB = 32$ cm, $BC = 40$ cm, $A_1B_1 = 24$ cm, $AC - A_1C_1 = 12$ cm. Să se determine lungimile celorlalte laturi ale triunghiurilor.

12. Fie triunghiul ABC cu $M \in AB$, $N \in BC$ şi $MN \parallel AC$. Să se afle lungimea segmentului AM, dacă $AB = 32$ cm, $AC = 40$ cm şi $MN = 30$ cm.

13. ***Lucraţi în perechi!*** Dreptele suport ale laturilor neparalele AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul O. Să se afle înălţimea triunghiului AOD, dacă $BC = 14$ cm, $AD = 42$ cm şi înălţimea trapezului este de 6 cm.

14. ***Lucraţi în grup!*** ○ **Lucrarea practică pe teren:** *Aplicaţii ale asemănării triunghiurilor în activitatea cotidiană.*

§5 Linii şi puncte remarcabile ale triunghiului

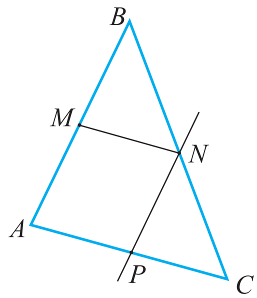


Fig. 4.31

○ Ne amintim Segmentul determinat de mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numeşte ***linie mijlocie*** a triunghiului.

Teorema 17 Dacă $[MN]$ este linia mijlocie a triunghiului ABC (M este mijlocul laturii AB, N – mijlocul laturii BC), atunci $[MN] \parallel [AC]$ şi $2MN = AC$ (fig. 4.31).

Demonstraţie:

Prin punctul M construim o dreaptă paralelă cu AC. Conform teoremei 13, această dreaptă va intersecta latura BC în mijlocul ei, deci va trece prin punctul N. Astfel, obţinem $[MN] \parallel [AC]$. Dacă prin punctul N vom construi o dreaptă paralelă cu latura AB, atunci ea va intersecta latura AC în mijlocul ei, pe care îl notăm P, deci $AC = AP + PC = 2AP$. Patrulaterul $AMNP$ este un paralelogram, prin urmare, $MN = AP$.

Din ultimele două egalităţi rezultă că $2MN = AC$. ▶

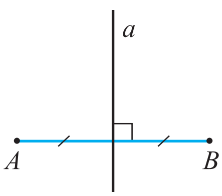
○ Ne amintim Segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi mijlocul laturii opuse acestui vârf se numeşte ***mediană a triunghiului***.

Teorema 18 Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct care împarte fiecare mediană în raportul 2 : 1, considerând de la vârf.

Exerciţiu • Demonstraţi teorema 18.

○ Reţineţi! Punctul de intersecţie a medianelor triunghiului se numeşte ***centru de greutate al triunghiului***.

Mediatoare a unui segment se numeşte dreapta ce trece prin mijlocul segmentului şi este perpendiculară pe el.



Folosind proprietatea mediatoarei (punctele mediatoarei segmentului sunt egal depărtate de extremităţile lui), se poate demonstra că mediatoarele laturilor unui triunghi se intersectează într-un punct egal depărtat de vârfurile lui. Acest punct este ***centrul cercului circumscris*** triunghiului. Prin urmare, oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc.

○ Ne amintim Segmentul determinat de un vârf al triunghiului şi proiecţia (ortogonală) acestui vârf pe dreapta suport a laturii opuse se numeşte ***înălţime a triunghiului***.

Teorema 19 Dreptele suport ale înălţimilor triunghiului sunt concurente.

Exerciţiu • Demonstraţi teorema 19.

Reţineţi! Punctul de intersecţie a dreptelor suport ale înălţimilor triunghiului se numeşte ***ortocentru al triunghiului***.
Triunghiul se numeşte ***înscris într-un cerc*** dacă vârfurile lui se află pe cerc. Triunghiul se numeşte ***circumscris unui cerc*** dacă laturile lui sunt tangente la cerc.
Segmentul conţinut de bisectoarea unui unghi al triunghiului şi care este determinat de vârful acestui unghi şi de punctul de intersecţie a bisectoarei lui cu latura opusă se numeşte ***bisectoare a triunghiului***.

Teorema 20 Bisectoarele unghiurilor interioare ale triunghiului sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghi.

Ne amintim Mediatoarea, mediana, bisectoarea şi înălţimea triunghiului se numesc ***linii remarcabile ale triunghiului***.
Centrul cercului înscris în triunghi, centrul cercului circumscris triunghiului, centrul de greutate al triunghiului şi ortocentrul triunghiului se numesc ***puncte remarcabile ale triunghiului***.

Problemă rezolvată În triunghiul ABC sunt duse înălţimile AA_1 şi BB_1 (fig. 4.32). Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului A_1B_1C, ştiind că $m(\angle A)=\alpha$, $m(\angle B)=\beta$, $\alpha+\beta\neq 90°$.

Rezolvare:

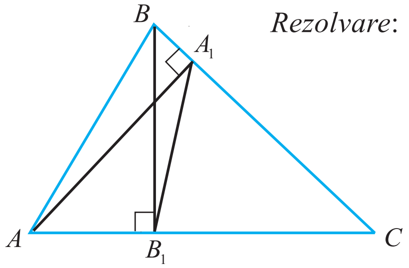


Fig. 4.32

Deoarece triunghiurile dreptunghice BB_1C şi AA_1C au unghiurile ascuţite de la vârful C congruente, ele sunt asemenea. Prin urmare, $\frac{BC}{B_1C}=\frac{AC}{A_1C}$.

Aşa cum triunghiurile ABC şi A_1B_1C au laturile ce determină unghiurile congruente de la vârful comun C proporţionale, conform criteriului 2 de asemănare, ele sunt asemenea.

Prin urmare, $m(\angle CA_1B_1)=m(\angle CAB)=\alpha$, $m(\angle CB_1A_1)=m(\angle CBA)=\beta$.

Concluzia ce rezultă din această problemă poate fi formulată astfel: *dacă picioarele înălţimilor duse din două vârfuri ale unui triunghi nu coincid, atunci, împreună cu al treilea vârf al triunghiului, ele determină un triunghi asemenea cu cel dat.*

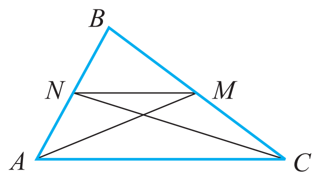
Probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. (BAC 2016) În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC, în care $AC=8$ cm, iar AM şi CN sunt mediane. Scrieţi în casetă lungimea segmentului MN.

$MN=$ ☐ cm.



2. Să se determine perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor unui triunghi având laturile de 12 cm, 6 cm şi 8 cm.
3. Lungimea bazei unui triunghi isoscel este de $4\sqrt{2}$ cm, iar măsura unghiului opus bazei este de 120°. Să se afle înălţimile triunghiului.

B

4. Medianele corespunzătoare catetelor unui triunghi dreptunghic au lungimile de $\sqrt{52}$ cm şi $\sqrt{73}$ cm. Să se determine lungimea ipotenuzei.
5. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de 10 cm şi 16 cm, iar unghiul format de ele este de 120°. Să se afle înălțimile corespunzătoare acestor laturi.
6. Un punct al ipotenuzei este egal depărtat de catete şi împarte ipotenuza în segmente cu lungimi de 30 cm şi 40 cm. Să se determine lungimile catetelor.
7. ***Lucrați în perechi!*** Două mediane ale unui triunghi sunt perpendiculare şi au lungimile de 4,5 cm şi 6 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

C

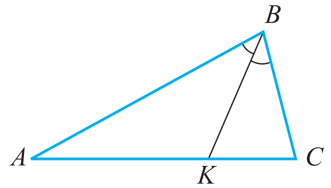
8. Mediana construită din vârful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic este congruentă cu o catetă şi are lungimea de 5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.
9. ***Lucrați în perechi!*** Să se determine lungimile bisectoarelor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic cu catetele de 3 cm şi 4 cm.
10. Lungimea unei laturi a unui triunghi este de 36 cm. Prin punctul de intersecție a medianelor triunghiului este construită o dreaptă paralelă cu latura dată. Să se afle lungimea segmentului tăiat din această dreaptă de laturile triunghiului.

Profilul real

A₁

1. (BAC 2019) În desenul alăturat, bisectoarea BK a triunghiului ABC împarte latura AC în segmentele $AK = 4$ cm şi $KC = 2$ cm. Scrieți în casetă lungimea laturii AB, dacă se cunoaşte că $BC = 3$ cm.

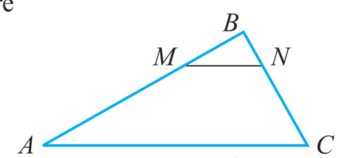
$AB = \boxed{}$ cm.



2. Să se determine măsurile unghiurilor unui triunghi, ştiind că înălțimea şi mediana construite din acelaşi vârf împart unghiul în trei unghiuri congruente.
3. ***Lucrați în perechi!*** Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sunt de 9 cm şi 12 cm. Să se afle distanța dintre punctul de intersecție a bisectoarelor şi punctul de intersecție a medianelor acestui triunghi.

B₁

4. Două laturi ale unui triunghi au lungimile de 6 cm şi 8 cm. Medianele corespunzătoare acestor laturi sunt perpendiculare. Să se afle lungimea laturii a treia.
5. (BAC 2023) Fie triunghiul ABC în care $MN \parallel AC$, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$. Determinați lungimea segmentului BN, dacă $MN = 4$ cm, $NC = 5$ cm, $AC = 14$ cm.



6. Distanțele de la centrul cercului înscris într-un triunghi dreptunghic la vârfurile unghiurilor ascuțite sunt de $\sqrt{5}$ cm şi $\sqrt{10}$ cm. Să se determine lungimile laturilor triunghiului şi raza cercului înscris în acest triunghi.
7. ***Lucrați în perechi!*** Lungimile laturilor unui triunghi sunt de 5 cm, 6 cm, 7 cm. Centrul cercului înscris în acest triunghi împarte bisectoarea unghiului mai mare în două segmente. Să se afle raportul lungimilor segmentelor obținute.
8. Să se determine lungimile bisectoarelor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic cu catetele de 18 cm şi 24 cm.

C₁

9. În cercul de rază R este înscris un triunghi isoscel. Ştiind că suma înălțimii corespunzătoare bazei şi lungimii bazei este egală cu lungimea diametrului cercului, să se afle înălțimea triunghiului corespunzătoare bazei.
10. Fie triunghiul ABC cu înălțimile AA_1 şi BB_1. Să se determine lungimea laturii BC, dacă $AC = 6$ cm, $B_1C = 4$ cm, $A_1C = 3$ cm.

§6 Relaţii metrice în triunghiuri

6.1. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

Ne amintim

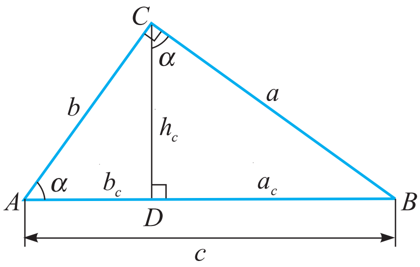


Fig. 4.33

Fie triunghiul ABC, dreptunghic în C, cu notaţiile obişnuite, şi CD înălţimea corespunzătoare laturii AB (fig. 4.33).

În triunghiurile ACB, CDB, ADC avem:

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$ (1), $\frac{b}{c} = \cos\alpha$ (2),

$\frac{a_c}{a} = \sin\alpha$ (3), $\frac{a_c}{h_c} = \operatorname{tg}\alpha$ (4),

$\frac{b_c}{b} = \cos\alpha$ (5), $\frac{h_c}{b_c} = \operatorname{tg}\alpha$ (6).

Exerciţiu • Să se formuleze în cuvinte relaţiile (1)–(6).

Comparând egalităţile (1) şi (3), (2) şi (5), (4) şi (6), obţinem:

$\frac{a}{c} = \frac{a_c}{a}$, adică $a^2 = c \cdot a_c$ (7); $\frac{b}{c} = \frac{b_c}{b}$, adică $b^2 = c \cdot b_c$ (8);

$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}$, adică $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.

Adunând egalităţile (7) şi (8) membru cu membru, obţinem: $a^2 + b^2 = c(a_c + b_c)$. Aşa cum $a_c + b_c = c$, rezultă că $a^2 + b^2 = c^2$.

Astfel, am demonstrat următoarele trei teoreme.

Teorema 21

Teorema catetei

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii unei catete este egal cu produsul dintre lungimea ipotenuzei şi lungimea proiecţiei acestei catete pe ipotenuză.

În figura 4.34, $AC^2 = BC \cdot CD$, $AB^2 = BC \cdot BD$.

Teorema 22

Teorema înălţimii

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul înălţimii construite din vârful unghiului drept pe ipotenuză este egal cu produsul lungimilor proiecţiilor catetelor pe ipotenuză.

În figura 4.34, $AD^2 = CD \cdot BD$.

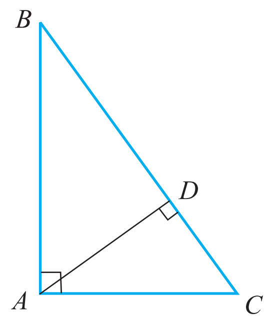


Fig. 4.34

Teorema 23

Teorema lui Pitagora

Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

În figura 4.34, $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

Probleme rezolvate

1. În interiorul unghiului O cu măsura de 60° se consideră un punct M situat la distanţele 2 cm şi 11 cm de laturile unghiului. Să se afle distanţa de la punctul M la vârful unghiului (fig. 4.35).

Rezolvare:

Avem $MA = 11$ cm, $MB = 2$ cm. Prelungim AM până la intersecţia în C cu latura OB a unghiului AOB. Deoarece ΔMBC este dreptunghic cu $m(\angle C) = 30°$, rezultă că $CM = 4$ cm.

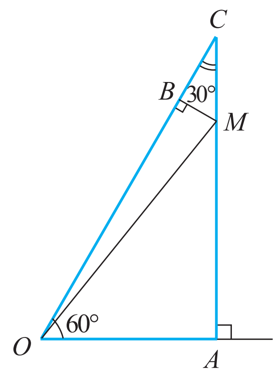


Fig. 4.35

În triunghiul dreptunghic OAC avem:

$$OA = AC \cdot \text{tg}30° = \frac{15}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}.$$

Aplicăm triunghiului dreptunghic OAM teorema lui Pitagora şi obţinem:

$$OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = \sqrt{75+121} = 14 \text{ (cm)}.$$

Răspuns: $OM = 14$ cm.

2. Să se exprime raza r a cercului înscris în triunghiul dreptunghic ABC prin catetele a, b şi ipotenuza c (fig. 4.36).

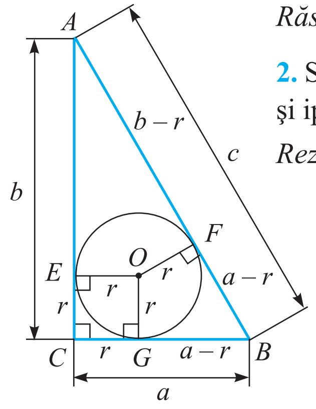


Fig. 4.36

Rezolvare:

Fie O centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi E, F, G – punctele de tangenţă. Aşa cum patrulaterul $EOGC$ este un pătrat cu latura r, rezultă că $GB = a - r = FB$, $AE = b - r = AF$ (segmentele determinate de un punct şi de punctele de tangenţă la cerc au lungimi egale). Dar $AF + FB = AB = c$.

Deci, $c = a - r + b - r \Rightarrow \boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$.

Probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sunt de 9 cm şi 12 cm. Să se afle razele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului.

2. (BAC 2018) Raza cercului înscris într-un triunghi echilateral este de $\sqrt{3}$ cm. Determinaţi perimetrul triunghiului.

B

3. ***Lucraţi în perechi!*** Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu lungimea uneia dintre catete. Să se determine măsurile unghiurilor ascuţite ale triunghiului.

4. Piciorul înălţimii construite din vârful unghiului drept împarte ipotenuza unui triunghi în segmente de 4 cm şi 9 cm. Să se afle lungimile catetelor.

5. În interiorul unui unghi cu măsura de 60° se consideră un punct M, situat la distanţele de $\sqrt{7}$ cm şi $2\sqrt{7}$ cm de laturile unghiului. Să se determine distanţa de la punctul M la vârful unghiului.

C

6. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic sunt de 8 cm şi 12 cm. Să se afle lungimea bisectoarei unghiului drept.

7. ***Lucraţi în perechi!*** Punctul de tangenţă a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în segmente de 5 cm şi 12 cm. Să se determine lungimile catetelor.

8. Punctul de tangenţă a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte una din catete în segmente de 3 cm şi 9 cm. Să se afle lungimea ipotenuzei şi a celeilalte catete.

Profilul real

A_1

1. Catetele unui triunghi dreptunghic sunt de 6 cm şi 8 cm. Să se afle:
a) raza cercului circumscris triunghiului; b) raza cercului înscris în acest triunghi.

2. Raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este de 15 cm, iar raza cercului înscris – de 6 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

3. Fie triunghiul dreptunghic ABC şi $[CD]$ bisectoarea unghiului drept. Ştiind că $AD = m$ şi $BD = n$, să se determine înălţimea construită din vârful C.
4. În triunghiul dreptunghic ABC, din vârful unghiului drept este construită înălţimea CD. Razele cercurilor înscrise în triunghiurile ADC şi BDC sunt r_1, respectiv r_2. Să se determine raza cercului înscris în triunghiul ABC.

B₁

5. ***Lucraţi în perechi!*** Într-un triunghi dreptunghic este înscris un semicerc, astfel încât diametrul lui este situat pe ipotenuză, iar centrul lui împarte ipotenuza în segmente de 3 cm şi 4 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului şi raza semicercului.
6. Bisectoarea unui unghi ascuţit al unui triunghi dreptunghic împarte cateta opusă în segmente de 4 cm şi 5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

C₁

7. ***Lucraţi în perechi!*** Să se demonstreze că dacă unul dintre unghiurile unui triunghi dreptunghic are măsura de 15°, atunci înălţimea construită din vârful unghiului drept are lungimea egală cu un sfert din lungimea ipotenuzei. (*Indicaţie*. Construiţi mediana corespunzătoare ipotenuzei.)
8. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC = 1\,\text{m}$, E şi F sunt mijlocurile segmentelor BC, respectiv AB, iar dreptele AE şi CF sunt perpendiculare. Să se determine lungimile laturilor triunghiului.
9. Piciorul D al înălţimii CD, construite din vârful unghiului drept al triunghiului ABC, este situat la distanţele m şi n de catetele AC, respectiv BC. Să se determine lungimile catetelor.

6.2. Relaţii metrice în triunghiul arbitrar

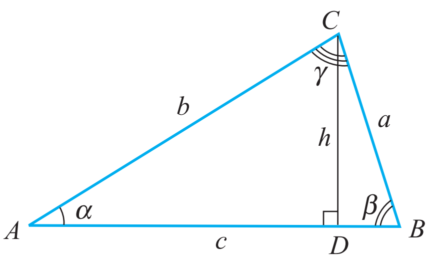


Fig. 4.37

Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu notaţiile obişnuite şi $CD = h$ – înălţimea construită din vârful C (fig. 4.37).

În ΔADC avem $\frac{h}{b} = \sin\alpha$, adică $h = b\sin\alpha$, iar în ΔBDC avem $\frac{h}{a} = \sin\beta$, adică $h = a\sin\beta$.

Prin urmare, $b\sin\alpha = a\sin\beta$, adică $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

În mod analog, construind înălţimile din vârfurile A şi B, obţinem că $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, respectiv $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Combinând aceste rezultate, obţinem: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

În cazul triunghiului obtuzunghic ABC, prin raţionamente asemănătoare obţinem acelaşi rezultat.

Exerciţiu • Efectuaţi aceste raţionamente.

Astfel, am demonstrat

Teorema 24

Teorema sinusurilor
Lungimile laturilor oricărui triunghi ABC sunt proporţionale cu sinusurile unghiurilor opuse:
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ (fig. 4.38).

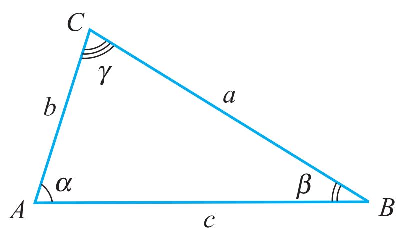


Fig. 4.38

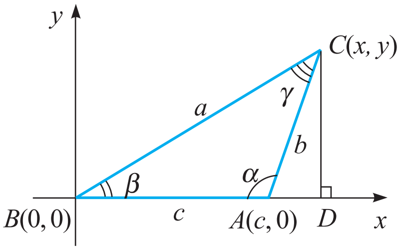


Fig. 4.39

Fie ABC un triunghi arbitrar cu notațiile obişnuite, $CD = h$ – înălțimea construită din vârful C (fig. 4.39).

Considerăm sistemul cartezian de coordonate cu originea în punctul B, astfel încât semiaxa pozitivă a absciselor să coincidă cu semidreapta $[BA$.

Fie (x, y) coordonatele vârfului C. Vârful B are coordonatele $(0, 0)$, iar vârful A – coordonatele $(c, 0)$.

În ΔACD avem: $AD = b\cos(180° - \alpha) = -b\cos\alpha$,
$CD = b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$.

Prin urmare, $x = BA + AD = c - b\cos\alpha$, $y = b\sin\alpha$. Aplicând formula distanței dintre două puncte, obținem:

$$a^2 = BC^2 = (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha =$$
$$= c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha.$$

În ΔCDB avem $x = BD = a\cos\beta$, $y = CD = a\sin\beta$ şi

$$b^2 = AC^2 = (a\cos\beta - c)^2 + (a\sin\beta)^2 = a^2\cos^2\beta - 2ac\cos\beta + c^2 + a^2\sin^2\beta =$$
$$= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

În mod analog, considerând sistemul de coordonate cu originea în vârful C, obținem $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Astfel, am demonstrat

Teorema 25

Teorema cosinusului

În orice triunghi ABC, pătratul lungimii oricărei laturi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi minus produsul dublu dintre lungimile acestor două laturi şi cosinusul unghiului format de ele:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\angle A);$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle B);$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle C) \text{ (fig. 4.40).}$$

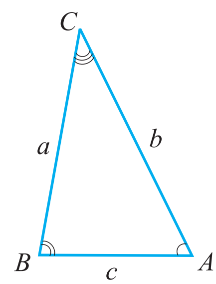


Fig. 4.40

Din această teoremă rezultă că:

a) dacă $a^2 > b^2 + c^2$, atunci unghiul opus laturii a este un unghi obtuz;

b) dacă $a^2 < b^2 + c^2$, atunci unghiul opus laturii a este un unghi ascuțit;

c) dacă $a^2 = b^2 + c^2$, atunci unghiul opus laturii a este un unghi drept.

Se observă că pentru $\alpha > 90°$ (fig. 4.39) proiecția laturii AC pe dreapta suport a laturii AB este $AD = -b\cos\alpha$ şi atunci $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot AD$ (11).

Pentru $\beta < 90°$, proiecția laturii BC pe dreapta suport a laturii AB este $BD = a\cos\beta$ şi atunci $b^2 = a^2 + c^2 - 2c \cdot BD$ (12).

Formulele (11), (12) constituie

Teorema 26

Teorema lui Pitagora generalizată

Pătratul lungimii unei laturi a oricărui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi plus/minus produsul dublu dintre lungimea uneia din aceste două laturi şi proiecția celeilalte laturi pe dreapta suport a primei.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că, în condiția teoremei sinusurilor, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC (fig. 4.41).

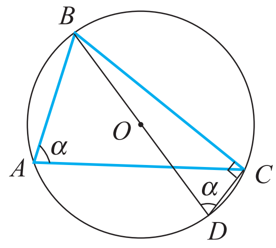


Fig. 4.41

Rezolvare:

Este suficient să demonstrăm că unul din aceste rapoarte este egal cu $2R$.

Fie, de exemplu, unghiul A ascuțit. Trasăm diametrul BD al cercului circumscris triunghiului ABC.

În acest caz, unghiul BDC are aceeaşi măsură α ca şi unghiul A. În triunghiul dreptunghic BCD avem $\frac{BC}{\sin\alpha}=BD$, adică $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, c.c.t.d.

Rețineți!

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{sin}\boldsymbol{\alpha}}=\frac{\boldsymbol{b}}{\mathbf{sin}\boldsymbol{\beta}}=\frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{sin}\boldsymbol{\gamma}}=\mathbf{2}\boldsymbol{R},\ \text{unde } R \text{ este raza cercului circumscris triunghiului.}}$$

2. Să se demonstreze că suma pătratelor laturilor oricărui paralelogram este egală cu suma pătratelor diagonalelor.

Rezolvare:

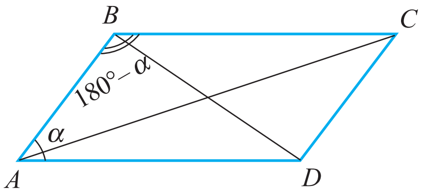


Fig. 4.42

Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\angle A)=\alpha$ (fig. 4.42). Atunci $m(\angle B)=180°-\alpha$. Scriem teorema cosinusului pentru triunghiurile ABD şi ABC:

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\alpha,$$

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos(180°-\alpha).$$

Adunând aceste egalități membru cu membru şi ținând cont de egalitatea $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, obținem că

$BD^2+AC^2=AB^2+AD^2+AB^2+BC^2$, adică

$\boxed{\boldsymbol{BD^2+AC^2=2(AB^2+AD^2)}}$ c.c.t.d.

Observație

Valori ale sinusului, cosinusului, tangentei şi cotangentei pentru unele unghiuri frecvent folosite sunt prezentate în tabelul 1, secvența 1.2, modulul 8.

Probleme propuse

Profilul real

A_1

1. Lungimile laturilor paralelogramului sunt de $\sqrt{3}$ cm şi $\sqrt{7}$ cm, iar o diagonală este de 2 cm. Să se determine lungimea celeilalte diagonale.
2. Într-un cerc cu raza de 10 cm este înscris un triunghi cu două unghiuri de 60° şi 15°. Să se afle perimetrul triunghiului.
3. Lungimile a două laturi ale unui triunghi sunt de 2 m şi 3 m, iar sinusul unghiului format de ele este $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Să se calculeze lungimea laturii a treia.
4. ***Lucrați în perechi!*** Distanțele de la centrul cercului înscris într-un triunghi dreptunghic până la vârfurile unghiurilor ascuțite sunt de $\sqrt{5}$ cm şi $\sqrt{10}$ cm. Să se afle măsurile unghiurilor ascuțite.

B₁

5. Un triunghi are laturile de 4 m, 5 m şi 6 m. Să se determine lungimile proiecțiilor laturilor de 4 m şi 5 m pe latura a treia.
6. O latură a unui triunghi este de 3 cm, unul din unghiurile alăturate acestei laturi este de 120°, iar latura opusă acestui unghi este de 7 cm. Să se afle lungimea laturii a treia.
7. ***Lucrați în perechi!*** Să se determine lungimea medianei triunghiului ABC corespunzătoare laturii opuse vârfului C, dacă $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

C₁

8. Înălțimea şi mediana unui triunghi împart unghiul din care sunt construite în trei unghiuri congruente. Să se afle lungimile laturilor triunghiului, dacă mediana este de 5 cm.
9. Printr-un vârf al unui pătrat cu latura a, prin mijlocul unei laturi care nu conține acest vârf şi prin centrul pătratului este construit un cerc. Să se determine raza acestui cerc.

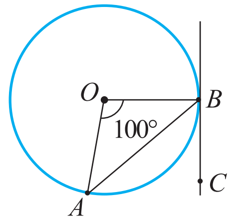
Probleme recapitulative

Profilurile umanistic, arte, sport

A

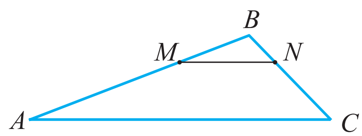
1. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 112 cm, iar ipotenuza sa este de 113 cm. Să se determine perimetrul triunghiului.
2. Bisectoarea unui unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic împarte cateta opusă în segmente cu lungimea de 4 cm şi 5 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.
3. Laturile congruente ale unui triunghi isoscel au lungimea de 4 cm, iar medianele corespunzătoarelor lor sunt de 3 cm. Să se afle lungimea bazei triunghiului.
4. (BAC 2016) În desenul alăturat, punctele A şi B aparțin cercului de centru O, astfel încât $m(\angle AOB) = 100°$, iar dreapta BC este tangentă la cerc. Scrieți în casetă măsura în grade a unghiului ABC.

$$m(\angle ABC) = \boxed{}.$$



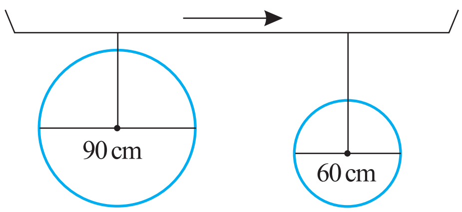
5. (BAC 2018) În desenul alăturat este reprezentat triunghiul ABC, în care $MN \parallel AC$, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $BN = 1$ cm, $NC = 2$ cm, $AM = 4$ cm. Să se scrie în casetă lungimea laturii AB.

$$AB = \boxed{}\ \text{cm}.$$



B

6. În fotografia, făcută din avion, să vede că un lan de porumb are forma unui dreptunghi cu dimensiunile 4×3 cm. Ştiind că raportul de asemănare între fotografie şi plan este 1:10000, să se afle dimensiunile reale ale lanului de porumb.
7. În triunghiul dreptunghic ABC, $BC = 8$ cm, $AB = 10$ cm. Pe prelungirea catetei AC după punctul C se ia punctul D, astfel încât punctul C se află între A şi D. Să se afle DB, dacă $DB = DA$.
8. (BAC 2013) Diametrele roților din față şi din spate ale unei căruțe au lungimile egale cu 60 cm, respectiv 90 cm. Calculați ce distanță (în metri) a parcurs căruța, dacă se ştie că roata din față a făcut cu 100 de rotații mai mult decât cea din spate. (Pentru calcule folosiți $\pi \approx 3$.)



9. Fie triunghiul ABC cu $BC=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ cm, $m(\angle ABC)=45°$, $m(\angle ACB)=30°$. Să se afle perimetrul triunghiului ABC.

10. Într-un cerc sunt construite coardele concurente AB şi CD. Măsurile unghiurilor ABC şi ACD sunt de 50°, respectiv de 40°. Să se afle măsura unghiului DAC.

C

11. Două cercuri de aceeaşi rază, 7 cm, sunt tangente exterior. O dreaptă intersectează cercurile în punctele A, B, C şi D, astfel încât $AB = BC = CD$. Să se afle AB.

12. ***Lucraţi în perechi!*** Din punctul A, situat în exteriorul unui cerc de rază 8 cm, este dusă o secantă de lungimea 10 cm, care este împărţită de cerc în două segmente de aceeaşi lungime. Să se afle distanţa de la punctul A până la centrul cercului.

Profilul real

A_1

1. Înălţimea corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel este de 20 cm, iar înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sunt de 24 cm. Să se afle lungimile laturilor triunghiului.

2. ***Lucraţi în perechi!*** Într-un triunghi cu laturile de 12 cm, 15 cm şi 18 cm este înscris un semicerc, astfel încât semicercul este tangent la laturile mai mici, iar latura mai mare conţine diametrul semicercului. Să se afle lungimile segmentelor în care este împărţită latura mai mare de centrul semicercului.

B_1

3. Raza cercului înscris într-un triunghi isoscel are lungimea de 1,5 cm, iar a cercului circumscris – de $\frac{25}{8}$ cm. Să se afle lungimile laturilor, dacă ele se exprimă prin numere întregi.

4. ***Lucraţi în perechi!*** Într-un atelier de tăiere a tablei rămân deşeuri în formă de triunghi echilateral cu latura de 240 mm. Pentru un nou produs introdus în fabricaţie se vor executa piese în formă de pătrat cu latura de 80 mm şi în formă de dreptunghi cu dimensiunile 190×220 mm. Care din aceste piese se pot executa din deşeuri?

5. Înălţimea dusă din vârful unui unghi alăturat bazei unui triunghi isoscel este de două ori mai mică decât lungimea laturii corespunzătoare. Să se afle măsurile unghiurilor acestui triunghi (să se analizeze ambele cazuri posibile).

6. ***Lucraţi în perechi!*** Două cercuri de raze r şi R sunt tangente exterior. O dreaptă intersectează aceste cercuri astfel, încât cercurile determină pe dreaptă trei segmente congruente. Să se afle lungimile acestor segmente.

7. Un cerc de lungime 12π cm este împărţit de punctele A, B, C în trei arce ale căror lungimi se raportă ca 1:2:3. Determinaţi aria triunghiului ABC.

C_1

8*. Cercul înscris în triunghiul ABC împarte mediana BB_1 $(B_1 \in AC)$ în trei segmente congruente. Să se afle raportul lungimilor laturilor triunghiului ABC.

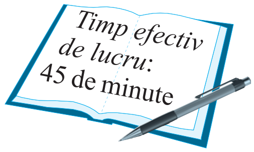
9. Care este lungimea traiectoriei parcurse de extremitatea orarului cu lungimea de 18 mm al unui ceasornic în:
a) 1 oră; b) 24 de ore? $(\pi \approx 3{,}14.)$

10. ***Lucraţi în perechi!*** Care este lungimea traiectoriei parcurse de extremitatea minutarului cu lungimea de 30 cm al unui ceasornic în:
a) 1 oră; b) 12 ore; c) 24 de ore? $(\pi \approx 3{,}14.)$

11. Un ciclist se deplasează pe o pistă circulară cu raza de 240 m. Într-un minut el parcurge 300 m. În câte minute ciclistul va parcurge un cerc? $(\pi \approx 3{,}14.)$

12. Un autoturism are lăţimea de 1,2 m şi se deplasează pe o pistă circulară cu raza interioară de 100 m, păstrând permanent distanţa de 50 cm de la marginea pistei. Să se determine diferenţa dintre drumul parcurs de roţile exterioare şi cele interioare, dacă automobilul parcurge un cerc. $(\pi \approx 3{,}14.)$

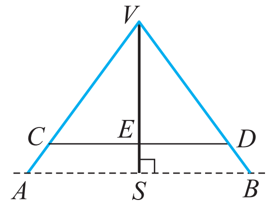
Test sumativ



Profilurile umanistic, arte, sport

1. Ipotenuza triunghiului dreptunghic ABC are lungimea de 9 cm, iar o catetă a sa – de 6 cm. Din vârful C al unghiului drept se duc mediana CM şi înălţimea CD. Aflaţi MD.

2. O scară dublă are lungimea unui braţ [VA] de 5 m. Pentru fixare, se foloseşte un fir [CD], la distanţa de 1 m pe braţ ([AC]), de la sol.
a) Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „$\Delta VCD \sim \Delta VSB$ ”.
b) Aflaţi lungimea firului, dacă înălţimea scării ([VS]) este de 4 m.

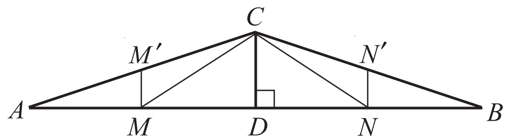


3. Dintr-o ţeavă cu raza de 125 mm pleacă trei ţevi de acelaşi diametru. Aflaţi diametrul acestor trei ţevi, astfel încât ele să preia tot debitul.

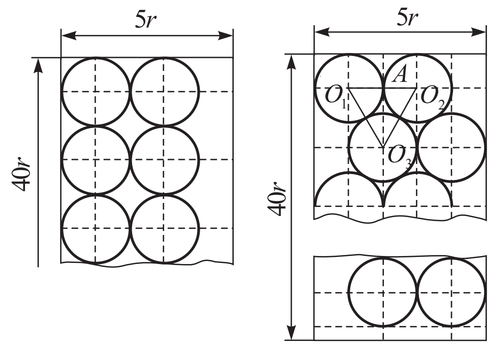
4. Fie ABC triunghi dreptunghic în A şi [BD] – bisectoarea unghiului B ($D \in AC$). Ştiind că $CD = 5$ cm, $AD = 4$ cm, determinaţi lungimile laturilor triunghiului.

Profilul real

1. Un acoperiş triunghiular are deschiderea $AB = d$, iar panta $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{3}$.
a) Aflaţi valoarea de adevăr a propoziţiei: „$\Delta ACB \sim \Delta MCN$.”
b) Determinaţi lungimea grinzii CN, dacă $DN = NB$.



2. Calculaţi câte discuri de rază r se pot confecţiona prin tăierea neraţională şi prin tăierea raţională a unei benzi de metal care are lăţimea $5r$ şi lungimea $40r$ (în figură se arată tăierea neraţională (a) şi cea raţională (b)).



a) b)

3. Fie triunghiul echilateral ABC cu latura a. Se consideră cercul care are ca diametru înălţimea CD. Prin punctele A şi C se duc tangente la acest cerc, care se intersectează în punctul E. Aflaţi perimetrul triunghiului ACE.

4. Arătaţi că într-un triunghi oarecare cu laturile a, b şi c este adevărată relaţia:

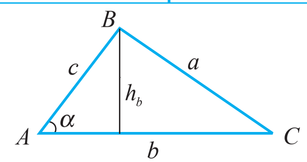
$$\frac{\operatorname{tg}(\angle A)}{\operatorname{tg}(\angle B)} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Figuri geometrice în plan

Sistemul de axiome

1. Axiome de incidență (**I**)
2. Axiome de ordine (**O**)
3. Axiome de măsurare (**M**) şi de construcție (**C**) a segmentelor şi unghiurilor
4. Axioma de existență a unui triunghi congruent cu un triunghi dat (**PT**)
5. Axioma paralelelor (**P**)

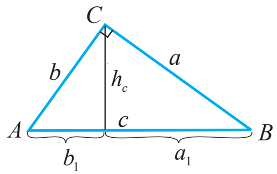
Triunghiuri



$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$2p = a+b+c$

Triunghiul dreptunghic

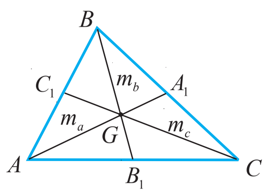


$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 = ca_1$

$b^2 = cb_1$

$h_c^2 = a_1 b_1$



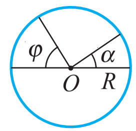
$[AA_1], [BB_1], [CC_1]$ – mediane

$A_1G = \frac{1}{3}m_a$

$GA = \frac{2}{3}m_a$

$4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$

Cercul

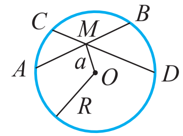


$\mathscr{A}_{\text{cerc}} = \pi R^2$

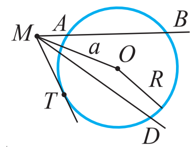
$\mathscr{A}_{\text{sect}} = \frac{1}{2}R^2\alpha; \ \mathscr{A}_{\text{sect}} = \pi R^2 \frac{\varphi}{360°}$

α – măsură în radiani

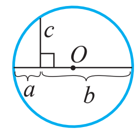
φ – măsură în grade



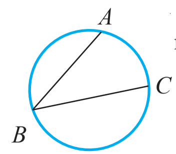
$AM \cdot MB = CM \cdot MD = R^2 - a^2$



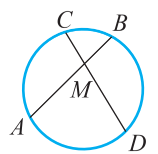
$AM \cdot MB = CM \cdot MD = a^2 - R^2 = MT^2$



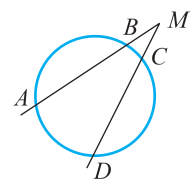
$c^2 = ab$



$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\smile AC)$



$m(\angle AMD) = \frac{m(\smile AD) + m(\smile CB)}{2}$

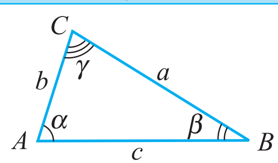


$m(\angle AMD) = \frac{m(\smile AD) - m(\smile BC)}{2}$

Relații metrice în triunghiul arbitrar

Teorema sinusurilor

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.



Teorema cosinusului

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Teorema lui Pitagora generalizată

Pătratul lungimii unei laturi a oricărui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi plus/minus produsul dublu dintre lungimea uneia din aceste două laturi şi proiecția celeilalte laturi pe dreapta suport a primei.

MODULUL 5

Monoame. Polinoame. Fracții algebrice

Ceea ce cunoaştem este prea puțin.
Ceea ce nu ştim este imens.
Laplace

Obiective

- *recunoaşterea şi aplicarea monoamelor, polinoamelor, fracțiilor algebrice în diverse contexte;
- *efectuarea operațiilor de adunare, scădere, înmulțire şi împărțire a monoamelor, polinoamelor, fracțiilor algebrice;
- *descompunerea în factori a polinoamelor;
- *determinarea rădăcinilor polinoamelor de o singură nedeterminată.

§1 Monoame. Operații cu monoame

1.1. Noțiunea de monom

În multitudinea de expresii algebrice, de exemplu $8Y$, $-3x^2+y$, $2\sqrt{ab^2}$, $\sqrt{7}ab$, $X^5Y^2Z^3$, 2023, $2+\sqrt{3}xy$, $(2+\sqrt{3})XY$, identificăm:

a) expresii în care asupra literelor se efectuează operațiile de adunare, scădere, înmulțire, ridicare la putere cu exponent natural: $-3x^2+y$, $\sqrt{7}ab$, 2023, $2+\sqrt{3}xy$;

b) expresii care conțin litere sub radical: $2\sqrt{ab^2}$;

c) expresii care reprezintă produs de factori, fiecare dintre ei fiind o expresie numerică sau o literă cu exponent natural: $8Y$, $X^5Y^2Z^3$, 2023, $(2+\sqrt{3})XY$.

Expresiile de felul celor din a) se numesc expresii algebrice ***raționale***, cele din b) – expresii ***iraționale***, cele din c) – ***monoame***.

Rețineți!

Monomul este expresia algebrică rațională ce reprezintă produs de factori, fiecare dintre ei fiind o expresie numerică sau o literă cu exponent natural.

- Un monom este format din ***coeficient*** şi ***partea literală***.
- Literele care se folosesc la scrierea monoamelor se numesc ***nedeterminate***.
- Nedeterminatele se notează, de regulă, cu literele mari ale alfabetului latin (X, Y, Z etc.).
- ***Gradul unui monom în raport cu o nedeterminată*** este exponentul nedeterminatei acestuia, scrise ca o putere.
- ***Gradul unui monom de mai multe nedeterminate*** este egal cu suma exponenților tuturor nedeterminatelor. Monomul $3X^3Y$ are gradul 4, dar gradul 3 în raport cu X.

$\boxed{3}\,X^3Y$

$\boxed{(2+\sqrt{3})}\,X$

$\boxed{\sqrt{2}}\,XZ^2$

1.2. Operații cu monoame

Rețineți!

Monoamele care au aceeaşi parte literală, abstracţie făcând de ordinea scrierii factorilor, se numesc ***monoame asemenea***.

- ***Suma***, ***diferența*** monoamelor M_1, M_2 este expresia $M_1 + M_2$ (respectiv $M_1 - M_2$)
- ***Reducerea termenilor asemenea*** este operația prin care o sumă de monoame asemenea se înlocuieşte cu un monom asemenea cu ele, care are coeficientul egal cu suma coeficienților termenilor asemenea.
  Exemplu: $2X^2Y - \sqrt{3}X^2Y + 3X^2Y = (5-\sqrt{3})X^2Y$.
- ***Produsul*** monoamelor este monomul al cărui coeficient este produsul coeficienților factorilor şi factorii literali reprezentați prin puteri cu aceeaşi bază sunt înlocuiți cu produsul lor.
  Exemplu: $2X^2Y \cdot \sqrt{3}XYZ = 2\sqrt{3}X^3Y^2Z$.
- ***Ridicarea la putere*** cu exponent natural a unui monom se efectuează conform proprietății de ridicare la putere a unui produs $((xy)^n = x^n \cdot y^n)$.
  Exemplu: $(2X^2Y)^3 = 8X^6Y^3$.
  Puterea cu exponent 0 a unui monom nenul este monomul 1.
- Monomul R se numeşte ***câtul monoamelor*** P şi Q, dacă $Q \cdot R = P$.
  Exemplu: $6X^3Y^2Z : 5X^2YZ = \frac{6}{5}XY$, fiindcă $\frac{6}{5}XY \cdot 5X^2YZ = 6X^3Y^2Z$.
  În caz general, raportul a 2 monoame este o fracție algebrică.
  Nu există împărțirea la monomul nul.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁

1. Să se determine care dintre expresii sunt monoame:
a) $2{,}05,\ \sqrt{X}Y,\ X,\ \sqrt{15}YZ;\ Z^{2010},\ \frac{XY}{Z},\ X^2+Y^2;$
b) $-Y^8,\ 3\sqrt{2}XY,\ Z,\ \sqrt{XY},\ Z-X^3,\ \frac{X+Y}{Z},\ Y^{2012}.$

2. Să se indice coeficientul şi partea literală a monomului:
a) $-8XY$; b) $2X^2YZ$;
c) $-\sqrt{3}XZ^2$; d) $3{,}9Y^4Z^{10}\cdot 2$.

3. Să se scrie monoamele astfel, ca nedeterminata să figureze o singură dată:
a) $XYYXZ$; b) $YZYZYZ$;
c) $2XYX^2Y^2Z\sqrt{3}$; d) $XZYZYZ$.

4. *Investigați!* Să se determine gradul monomului:
a) X^3YZ; b) $-2XZ^5$; c) $0{,}1X^2Y$; d) $\sqrt{3}YZ$.

5. Să se indice monoamele asemenea:
a) $5XY,\ 3X^2,\ -XY,\ Z^3Y,\ -0{,}25X^2,\ YZ^3,\ XYZ$;
b) $XY^2,\ -8{,}5Y^3,\ -2Y^2X,\ 0{,}8Y^3,\ X^3Y^3Z^3,\ XY$.

6. Să se reducă termenii asemenea:
a) $XY-3Y^4+2{,}5XY+8Y^4$; b) $3Z^2-2XY-0{,}2Z^2+10XY$.

7. Să se efectueze:
a) $-4X^2Y\cdot 3XY^2$; b) $8{,}2XZ\cdot 5X^3YZ$;
c) $\sqrt{3}YZ\cdot\sqrt{3}XZ^3$; d) $7\frac{1}{3}X\cdot 2\frac{1}{2}XY$.

8. *Lucrați în perechi!* Să se efectueze:
a) $(3X^5Y)^3$; b) $(-2XYZ^4)^2$;
c) $(\sqrt{2}XY^3)^4$; d) $(1{,}5ZY^3)^3$.

9. Să se efectueze:
a) $16X^3Y:(-2XY)$; b) $-6{,}4Y^2Z^3:0{,}4YZ$;
c) $2\sqrt{3}X^2Z^5:\sqrt{3}XZ^2$; d) $7\frac{1}{3}X^3Y^3Z^3:\frac{1}{3}XYZ$.

10. Să se efectueze:
a) $7{,}3XY-8Y^3+2(0{,}5Y^3+XY)-ZY$;
b) $3\frac{1}{4}ZY+4\left(\frac{1}{8}ZY-Z^2\right)+3Z^2+XY$.

11. *Lucrați în perechi!* Să se efectueze:
a) $3XY\cdot 0{,}2X^2Y^3Z-(2XY)^3+(1{,}2XY)^2\cdot XY$;
b) $-5ZY\cdot 0{,}4Z^3YX+(0{,}1ZY^2)^2\cdot X^3Y-(-XYZ)^3$.

B₁

12. Să se efectueze:
a) $18X^3Y^5:0{,}3XY^4-(2X^2Y+4{,}8X^4Z:1{,}6XZ)$; b) $-9XY^3Z^2:30Y^2Z-(-7XYZ+12X^2Z^2:0{,}4XZ^2)$.

13. ***Investigați!*** Să se completeze cu exponenți, astfel încât gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele să fie 10: a) $3X^{\square}Y^2Z^{\square}$; b) $(Y^2Z^3)^{\square}$; c) $(X^{\square}Y^{\square}Z)^{\square}$; d) $(-\sqrt{5}X^2Y^{\square}Z^{\square})^2$.

14. ***Investigați!*** Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției:
a) Monoamele XY şi X^2Y^2 sunt asemenea. b) Monoamele $26X^2Y$ şi $-X^2Y$ se pot reduce.

A/F

C₁

15. ***Investigați!*** Să se determine legitatea şi să se scrie monomul lipsă:

$\sqrt{2}X^2Y^3$	3	$2\sqrt{2}X^6Y^9$
$-\sqrt{3}ZY^5$	2	?

16. Să se completeze şirul monoamelor:
a) $XYZ,\ X^2YZ,\ X^2Y^2Z,\ \square$; b) $X^8Y^4Z^2,\ X^8Y^4,\ X^8Y^2,\ \square$.

§2 Polinoame

2.1. Operații cu polinoame

Definiție Se numeşte **polinom** un monom sau o sumă de monoame.

Rețineți! Polinoamele se notează cu literele mari ale alfabetului latin (P, Q, R, H etc.):
$P(X)=X^3-2X^2+5,\ Q(X,Y)=3X^2Y-XY+X,\ R(X,Y,Z)=XYZ-3.$
Coeficienții polinomului sunt coeficienții termenilor săi. Polinomul al cărui coeficienți sunt toți egali cu 0 se numeşte ***polinom nul***: 0. Termenul care nu conține nedeterminate se numeşte ***termen liber***. ***Gradul polinomului P*** este gradul maxim al termenilor săi nenuli. Se notează „grad P”.
De exemplu, pentru polinomul $P(X)=X^3-2X^2+5$ avem $\text{grad}\,P(X)=3$.
Un polinom cu doi termeni se numeşte ***binom***, iar cu trei termeni – ***trinom***.

Exercițiu rezolvat

Fie monoamele: $7X^3Y,\ \sqrt{3}XYZ,\ X^6,\ -7XZ,\ 5.$
a) Formați din aceste monoame un polinom în nedeterminatele X, Y, altul în nedeterminata X şi un al treilea – în nedeterminatele X, Y, Z.
b) Enumerați coeficienții şi termenul liber ai primului polinom din a).

Rezolvare:
a) $P(X,Y)=7X^3Y+X^6-5,\ Q(X)=X^6+5,\ T(X,Y,Z)=7X^3Y+\sqrt{3}XYZ-X^6-7XZ+5.$
b) Coeficienții lui $P(X, Y)$ sunt 7, 1, –5, iar –5 este termenul liber.

Valoarea numerică a unui polinom pentru valorile indicate ale nedeterminatelor este numărul obținut prin efectuarea tuturor operațiilor după înlocuirea valorilor indicate ale nedeterminatelor. De exemplu, valoarea numerică a polinomului $P(X, Y)$, determinat în exercițiul a) rezolvat mai sus, pentru $X=\sqrt{2},\ Y=5$ este:

$$P(\sqrt{2},5)=7\cdot(\sqrt{2})^3\cdot 5+(\sqrt{2})^6-5=70\sqrt{2}+8-5=70\sqrt{2}+3.$$

Suma (respectiv ***diferența***) a două polinoame P, Q este polinomul $P+Q$ (respectiv $P-Q$).

De regulă, în expresia obținută se reduc termenii asemenea.

De exemplu, diferența polinoamelor $P(X, Y)$ și $Q(X)$ din exercițiul rezolvat este polinomul $P - Q = 7X^3Y + X^6 - 5 - (X^6 + 5) = 7X^3Y - 10$.

Rețineți!

Proprietăți ale adunării polinoamelor

Pentru orice polinoame P, Q, R sunt adevărate proprietățile:

1° ***Comutativitatea***: $P + Q = Q + P$.

2° ***Asociativitatea***: $(P + Q) + R = P + (Q + R)$.

3° Polinomul nul este element neutru la adunarea polinoamelor: $P + 0 = P$.

4° Orice polinom P are ***opusul*** său, $-P$: $P + (-P) = 0$.

Definiție

Produsul a două polinoame P, Q este polinomul $P \cdot Q$, ce reprezintă suma produselor fiecărui termen al polinomului P cu fiecare termen al polinomului Q.

De regulă, în suma obținută se efectuează reducerea termenilor asemenea.

De exemplu: $(7X^3Y + X^6 - 5) \cdot (X^6 + 5) =$

$= 7X^3Y \cdot X^6 + X^6 \cdot X^6 - 5 \cdot X^6 + 7X^3Y \cdot 5 + X^6 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 7X^9Y + X^{12} + 35X^3Y - 25$.

Proprietăți ale înmulțirii polinoamelor

Pentru orice polinoame P, Q, R sunt adevărate proprietățile:

1° ***Comutativitatea***: $P \cdot Q = Q \cdot P$.

2° ***Asociativitatea***: $(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$.

3° $P \cdot 0 = 0$.

4° Polinomul 1 este ***element neutru*** la înmulțirea polinoamelor: $P \cdot 1 = 1 \cdot P = P$.

5° Înmulțirea polinoamelor este ***distributivă față de adunare/scădere***:
$P \cdot (Q \pm R) = P \cdot Q \pm P \cdot R$.

Utilizarea acestor proprietăți facilitează efectuarea calculelor.

Exemplu

$(XY - 3Z) \cdot (1 - X^3) + (XY - 3Z)(1 + X^3) = (XY - 3Z) \cdot (1 - X^3 + 1 + X^3) =$
$= (XY - 3Z) \cdot 2 = 2XY - 6Z$.

2.2. Descompunerea în factori a polinoamelor

Un rol important în efectuarea calculelor îl are descompunerea în factori a polinoamelor, adică reprezentarea lor ca produs de polinoame.

Rețineți!

Iată unele ***metode*** frecvent utilizate pentru descompunerea în factori a polinoamelor:

- ***metoda factorului comun***: $P \cdot Q + P \cdot R + P \cdot H = P(Q + R + H)$.
- ***metoda grupării termenilor***: $P \cdot Q + R \cdot Q + P \cdot H + R \cdot H =$
  $= (P \cdot Q + P \cdot H) + (R \cdot Q + R \cdot H) = P(Q + H) + R(Q + H) = (Q + H)(P + R)$.
- ***descompunerea în factori*** a trinomului de gradul doi: $aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$ asociate acestui trinom;
- utilizarea ***formulelor de calcul*** prescurtat;
- metode combinate.

Exemple

Utilizând metodele adecvate, să se descompună în factori polinomul:

a) $(6X - 5)^2 - (25X^2 - 40X + 16)$; b) $X^6 + 2X^3 - 3$.

Rezolvare:

a) Observăm că $25X^2-40X+16=(5X-4)^2$.

Deci, $(6X-5)^2-(5X-4)^2=(6X-5+5X-4)\cdot(6X-5-(5X-4))=(11X-9)(X-1)$.

b) Dacă notăm $X^3=t$, atunci trinomul t^2+2t-3 se descompune în $(t-1)(t+3)$, deci $X^6+2X^3-3=(X^3-1)(X^3+3)=(X^3-1^3)(X^3+(\sqrt[3]{3})^3)=$
$=(X-1)(X^2+X+1)(X+\sqrt[3]{3})(X^2-\sqrt[3]{3}X+\sqrt[3]{9})$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁

1. Fie polinoamele $P(X)=X^3-3X^2+\sqrt{2}X+1$ şi $Q(X,Y)=X^4-X^3+X^2Y-XY^2+\sqrt{5}$.
a) Să se determine gradele acestor polinoame, să se enumere coeficienții polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X, Y)$.
b) Să se calculeze valoarea numerică a polinomului $P(X)$ pentru $X=2$.
c) Să se calculeze valoarea numerică a polinomului $Q(X, Y)$ pentru $X=-2$, $Y=1$.

2. Fie polinoamele $P(X)=-X^4-8X^3+X^2-3X$ şi $Q(X)=X^3+5X^2$.
1) Să se efectueze: $P(X)+Q(X)=S(X)$; $P(X)-Q(X)=D(X)$; $Q(X)-P(X)=R(X)$.
Să se calculeze şi să se compare: a) $S(3)$ cu $P(3)+Q(3)$; b) $D(-1)$ cu $P(-1)-Q(-1)$.
2) Să se stabilească o relație între polinoamele $D(X)$ şi $R(X)$.

3. ***Lucrați în perechi!*** Fie polinoamele
$P(X)=5X^2-1$; $Q(X)=5X^2+1$; $R(X)=X^4+2X^2+1$.
Să se afle:
a) $P(X)+Q(X)-R(X)$; b) $P(X)\cdot Q(X)$;
c) $P(X)\cdot R(X)$; d) $P(X)\cdot Q(X)-R(X)$;
e) $P^2(X)$; f) $P^2(X)\cdot Q^2(X)$.

4. ***Investigați!*** Să se completeze până la pătratul unui binom:
a) $16X^2+...+1$; b) $9X^2-...+25Y^2$;
c) $X^2+10XY+...$; d) $3X^2-...+64Y^2$.

5. Aplicând metoda grupării termenilor, să se descompună în factori:
a) $7X^4-9X^3-7X^2+9X$; b) $X^4+X^3Y-X^2-XY$;
c) $X^3-5X^2+4X-20$.

6. Să se reprezinte ca produs de factori:
a) $25X^2-10X+1$; b) $0{,}25X^2+X+1$;
c) $X^3-6X^2+12X-8$; d) X^3+3X^2+3X+1.

7. Aplicând formulele: diferența pătratelor, suma (diferența) cuburilor, să se descompună în factori polinomul:
a) $0{,}64X^2-Y^2$; b) $5X^2-45Y^2$;
c) $125X^3-64Y^3$; d) $729X^3+1$.

8. Să se descompună în factori trinomul:
a) X^2-2X-8; b) $4X^2-3X-1$;
c) $-X^2+X+2$.

9. Fie polinoamele $P(X)=2X^3-X$ şi $Q(X,Y)=X^2+Y^2$.
Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor.
a) $Q^2(X,Y)=X^4+2X^2Y^2+Y^4$.
b) $P(X)+Q(X)=2X^3+X^2-X+Y^2$.

B₁

10. ***Lucrați în grup!*** Fie polinoamele
$P(X)=8X^3-X^2+10X-\sqrt{7}$ şi $Q(X)=mX^3+kX^2+pX+n$ $(m,n,k,p\in\mathbb{R})$.
a) Să se afle valorile parametrilor reali m, n, k, p pentru care polinoamele $P(X)$ şi $Q(X)$ sunt egale.
b) Să se precizeze gradele polinoamelor $P(X)$, $Q(X)$ în funcție de valorile parametrilor.
c) Pentru care valori ale parametrilor reali m, n, k, p polinomul $Q(X)$ este nul?
d) Să se calculeze: $P(-1)$, $P(0)$, $Q(-1)$, $Q(0)$.

11. Fie polinoamele $P(X)=X^5-7kX^2+2X-k$ şi $Q(X)=-X^5+X^2-2X+k$.
Să se afle valoarea parametrului real k pentru care $S(X)=P(X)+Q(X)$ este polinom nul.

12. Fie polinomul $P(X)=aX^4+2X^2+bX-X^3+c$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.
a) Să se afle valorile coeficienților a, b, c, ştiind că polinomul $P(X)$ este egal cu $5X^4-X^3+2X^2-8$.
b) Să se determine polinomul $Q(X)$, ştiind că $P(X)+Q(X)=0$.

13. Să se descompună în factori polinomul:
a) $X^3+2X^2(X-2)-8$; b) X^6-4X^3+4;
c) $X^5-X^3Y^2+5X^2+5XY$; d) X^4-X^2+2X+2.

14. ***Lucrați în perechi!*** Să se descompună în factori trinomul:
a) $8X^2+3X-0{,}5$; b) $-0{,}1X^2-X-20$; c) $X^2-\sqrt{5}X-2$.

C₁

15. Fie polinomul $R(X)=aX^3+bX^2+cX+d$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$.
Să se afle valorile coeficienților a, b, c, d, dacă: $R(0)=1$, $R(-1)=0$, $R(1)=-1$, $a=c$.

16. Aplicând formulele studiate, să se descompună în factori cu coeficienți întregi polinomul:
a) $(6X+3)^2-(5X-4Y)^2$; b) $8X^3-(XY-5)^3$; c) $125X^3+(X+1)^3$.

17. Să se determine un polinom $P(X)$ de gradul doi cu coeficienți reali, astfel încât $P(\alpha^3)=(P(\alpha))^3$ pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$.

18. Să se descompună în factori polinomul:
a) X^8+3X^4-4; b) $X^{4n}-16$, $n\in\mathbb{N}^*$; c) $X^{2n+1}-X$, $n\in\mathbb{N}^*$.

§3 Polinoame de o singură nedeterminată

3.1. Noțiuni generale

Definiție

Expresia de forma $a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$, (1)
unde $n\in\mathbb{N}$ și $a_i\in\mathbb{R}$ pentru orice $i=0, 1, 2, ..., n$ (se mai notează $i=\overline{0, n}$), se numește **polinom** în nedeterminata X.

Dacă numerele $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ aparțin mulțimii $\mathbb{R}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, atunci expresia (1) este polinom în nedeterminata X cu coeficienți reali (corespunzător, raționali, întregi).

Rețineți!

Numerele $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ se numesc ***coeficienți*** ai polinomului (1), expresiile $a_0, a_1X, a_2X^2, ..., a_nX^n$ se numesc ***termeni*** ai acestui polinom, iar coeficientul a_0 se numește ***termenul liber*** al polinomului (1).

În cazul în care $n=0$, expresia (1) are forma a_0. Așadar, orice număr este un polinom și astfel de polinoame se numesc ***polinoame constante***.

Exemplu

Următoarele expresii sunt polinoame în nedeterminata X:
$2+X+X^2+0X^3+0X^4$; $7+9X^2+3X+5X^3$; $\sqrt{3}$.

Rețineți!

Forma canonică a polinomului nenul (1) este polinomul $a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n$, $a_n\neq 0$, unde n este cel mai mare număr natural k, astfel încât $1\le k\le n$ și $a_k\neq 0$.

Exemplu

Forma canonică a polinoamelor $2+0X+3X^2$, $2+0X+3X^2+0X^3$ este $2+3X^2$, iar forma canonică a polinoamelor $7+3X^2+X$ și $7+X+3X^2+0X^3+0X^4$ este $7+X+3X^2$.

Definiție

Două **polinoame** în nedeterminata X sunt **egale** dacă formele canonice ale acestor polinoame coincid.

Exemple

1. Polinoamele $1+3X+\sqrt{5}X^2$ și $1+\sqrt{5}X^2+3X+0X^3+0X^4$ sunt egale.
2. Polinoamele $2+aX+5X^2+4X^3+8X^4$ și $2+7X+bX^2+4X^3+cX^4+dX^5$ sunt egale dacă și numai dacă $a=7$, $b=5$, $c=8$, $d=0$.

Reţineţi!

1. Polinomul arbitrar $a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$ este egal cu polinomul $a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n+0X^{n+1}+\ldots+0X^{n+k}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}$.

2. Polinoamele $a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_mX^m$, $a_m\neq 0$, şi $b_0+b_1X+b_2X^2+\ldots+b_nX^n$, $b_n\neq 0$, sunt egale dacă şi numai dacă $m=n$ şi $a_i=b_i$ pentru orice $i=\overline{0,m}$ (sunt egali coeficienţii termenilor respectivi).

Exerciţiu rezolvat

Pentru care valori reale ale parametrilor a şi b sunt egale polinoamele $P(X)=a(2+3X+5X^2)+(b+X)(1+X+X^2)$ şi $Q(X)=1+2X+2X^2+X^3$?

Rezolvare:

Aducem $P(X)$ la forma canonică efectuând operaţiile respective şi egalăm polinoamele:

$2a+3aX+5aX^2+b+bX+bX^2+X+X^2+X^3=1+2X+2X^2+X^3$,

$2a+b+(3a+b+1)X+(5a+b+1)X^2+X^3=1+2X+2X^2+X^3$.

Din definiţia egalităţii a două polinoame obţinem:

$$\begin{cases}2a+b=1,\\3a+b+1=2,\\5a+b+1=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=1,\\3a+b+1=2,\\2a=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0,\\b=1.\end{cases}$$

Răspuns: $a=0$, $b=1$.

De regulă, polinoamele în nedeterminata X se notează cu $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$ etc.

Definiţii

Fie polinomul $P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$, $a_n\neq 0$. Termenul a_nX^n se numeşte **termenul principal** al polinomului $P(X)$, iar numărul a_n se numeşte **coeficientul dominant** al polinomului $P(X)$.

Exemplu

Considerăm polinoamele $P(X)=2+3X+X^2+0X^3$ şi $Q(X)=\sqrt{2}+3\sqrt{3}X+0X^2+5X^3$. Observăm că grad $P(X)=2$ şi grad $Q(X)=3$. Coeficientul dominant al polinomului $P(X)$ este 1, iar coeficientul dominant al polinomului $Q(X)$ este 5.

Observaţii

1. Pentru polinomul nul gradul nu se defineşte.

2. Orice număr nenul este un polinom care are gradul zero.

Notă. Pentru a simplifica scrierea polinoamelor concrete, convenim să nu scriem termenii polinomului care au coeficienţii egali cu zero, să notăm termenii de forma $1X^k$ cu X^k, iar expresia de forma $+(-a)X^k$ cu $-aX^k$.

De exemplu, polinomul $3+(-4)X+1X^2+0X^3+0X^4+(-5)X^5$ se scrie $3-4X+X^2-5X^5$.

Exerciţiu rezolvat

Să se afle gradul polinomului:

$$P(X)=3a+2X+(a^2-1)X^2+(a^3+3a+4)X^3+(a^2-a-2)X^4.$$

Rezolvare:

Pentru diferite valori ale parametrului real a se obţin polinoame diferite. De aceea, gradul polinomului $P(X)$ depinde de valoarea parametrului a. Dacă $a^2-a-2\neq 0$, adică $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, atunci grad $P(X)=4$. Pentru $a=-1$, $P(X)=-3+2X$ şi grad $P(X)=1$. Pentru $a=2$, $P(X)=6+2X+3X^2+18X^3$ şi grad $P(X)=3$.

Fie A o submulţime nevidă a mulţimii $\mathbb{R}$. Notăm prin $A[X]$ mulţimea polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi din A. În particular, notăm cu $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$ mulţimile polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi reali, raţionali, respectiv întregi. Deoarece $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, atunci $\mathbb{Z}[X]\subset\mathbb{Q}[X]\subset\mathbb{R}[X]$ şi $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}\subset\mathbb{R}[X]$.

Definiție

Fie $P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+...+a_nX^n\in\mathbb{R}[X]$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$.
Numărul $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+...+a_n\alpha^n$ se numeşte **valoarea** polinomului $P(X)$ în $X=\alpha$ şi se notează cu $P(\alpha)$. Dacă $P(\alpha)=0$, atunci α se numeşte **rădăcină** a polinomului $P(X)$.

Exemplu

Fie $P(X)=2+X+3X^2$. Atunci $P(-2)=2+(-2)+3(-2)^2=12$.

Observații

1. Dacă A este una dintre mulțimile $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ şi $P(X)\in A[X]$, atunci $P(\alpha)\in A$ pentru orice $\alpha\in A$.
2. Valoarea oricărui polinom în zero este egală cu termenul liber al acestui polinom $P(0)=a_0$.

Definiție

Fie A una dintre mulțimile $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ şi $P(X)\in A[X]$. Funcția $f\colon A\to A$, $f(x)=P(x)$, se numeşte **funcția polinomială asociată polinomului** $P(X)$.

Exemplu

Funcția polinomială asociată polinomului $P(X)=2+4X^2+3X^3\in\mathbb{R}[X]$ este $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+4x^2+3x^3$.

3.2. Adunarea, scăderea şi înmulțirea polinoamelor

Rețineți!

Suma, diferența, produsul polinoamelor de o singură nedeterminată se efectuează după aceleaşi reguli ca şi polinoamele de mai multe nedeterminate, deci aceste operații se bucură de aceleaşi proprietăți.

Exercițiu rezolvat

Să se scrie în forma canonică suma, diferența şi produsul polinoamelor:
$P(X)=X^3-6X^2+12X-8$ şi $Q(X)=X^3+3X^2+1$.
Rezolvare:
$P(X)+Q(X)=-7+12X-3X^2+2X^3$; $P(X)-Q(X)=-9+12X-9X^2$;
$P(X)\cdot Q(X)=(-8+12X-6X^2+X^3)\cdot(1+3X^2+X^3)=$
$=-8+12X-30X^2+29X^3-6X^4-3X^5+X^6$.

Rețineți!

1. Dacă $P(X)$ şi $Q(X)$ sunt polinoame nenule, atunci:
a) $\operatorname{grad}(P(X)+Q(X))\le\max(\operatorname{grad}P(X),\operatorname{grad}Q(X))$ $(Q(X)\ne-P(X))$;
b) $\operatorname{grad}(P(X)\cdot Q(X))=\operatorname{grad}P(X)+\operatorname{grad}Q(X)$.

2. Dacă $R(X)=P(X)+Q(X)$, $S(X)=P(X)\cdot Q(X)$, atunci pentru orice $a\in\mathbb{R}$ au loc egalitățile numerice:
a) $R(a)=P(a)+Q(a)$; b) $S(a)=P(a)\cdot Q(a)$.

3.3.1. Împărțirea polinoamelor. Teorema împărțirii cu rest

În calculul cu numere întregi, adeseori se aplică teorema împărțirii cu rest. O teoremă asemănătoare este adevărată şi pentru polinoame.

Teorema 1

(teorema împărțirii cu rest)
Pentru orice polinoame $D(X)$, $I(X)\in\mathbb{R}[X]$, $I(X)\ne0$, există polinoamele $C(X)$, $R(X)\in\mathbb{R}[X]$, unic determinate, astfel încât
$D(X)=I(X)C(X)+R(X)$, unde $R(X)=0$ sau $\operatorname{grad}R(X)<\operatorname{grad}I(X)$. (2)

În (2), polinomul $D(X)$ se numește ***deîmpărțit***, $I(X)$ – ***împărțitor***, $C(X)$ – ***cât***, iar $R(X)$ – ***rest***. Dacă $R(X)=0$, atunci $I(X)$, $C(X)$ se numesc ***divizori*** ai lui $D(X)$ (se notează $I(X)\,|\,D(X)$, $C(X)\,|\,D(X)$), iar $D(X)$ se numește ***multiplu*** al acestor polinoame sau se spune că $D(X)$ este divizibil cu $I(X)$, $C(X)$.

Rețineți!

Împărțirea cu rest a polinomului $D(X)$ la $I(X)$ necesită efectuarea celor patru operații aritmetice (adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea) asupra coeficienților acestor polinoame. Dacă polinoamele $D(X)$ și $I(X)$ au coeficienți numere reale (respectiv, raționale), atunci câtul $C(X)$ și restul $R(X)$ sunt polinoame cu coeficienți reali (respectiv, raționali).

Reprezentăm un algoritm de aflare a câtului și restului împărțirii a două polinoame, numit ***algoritmul împărțirii cu rest a polinoamelor***.

Pentru a împărți polinomul $D(X)$ la polinomul nenul $I(X)$:

1) scriem ambele polinoame în ordinea descreșterii gradelor termenilor acestora;

2) efectuăm împărțirea în coloniță (similar împărțirii numerelor naturale) astfel încât termenii câtului să reprezinte rezultatele împărțirii termenului principal al deîmpărțitului (și a celor apăruți ulterior) la termenul principal al împărțitorului;

3) împărțirea se efectuează până când la rest se va obține un polinom de grad mai mic decât gradul împărțitorului.

Exercițiu rezolvat

Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $D(X)=3X^4+8X^3-4X^2-2X+1$ la trinomul $I(X)=2X^2+2X-3$.

Rezolvare:

$$3X^4:2X^2=\frac{3}{2}X^2$$

$$5X^3:2X^2=\frac{5}{2}X$$

$$-\frac{9}{2}X^2:2X^2=-\frac{9}{4}$$

$$\left(-\frac{3}{2}X^2\right)\cdot(2X^2+2X-3)=-3X^4-3X^3+\frac{9}{2}X^2$$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3X^4+8X^3-4X^2-2X+1 & \overbrace{2X^2+2X-3}^{I(X)} \\ \cline{3-3}
+ & -3X^4-3X^3+\frac{9}{2}X^2 & \underbrace{\frac{3}{2}X^2+\frac{5}{2}X-\frac{9}{4}}_{C(X)} \\ \cline{2-2}
 & 5X^3+\frac{1}{2}X^2-2X+1 & \\
+ & -5X^3-5X^2+\frac{15}{2}X & \\ \cline{2-2}
 & -\frac{9}{2}X^2+\frac{11}{2}X+1 & \\
+ & \frac{9}{2}X^2+\frac{9}{2}X-\frac{27}{4} & \\ \cline{2-2}
 & \underbrace{10X-\frac{23}{4}}_{R(X)} &
\end{array}$$

Răspuns: Câtul este $C(X)=\frac{3}{2}X^2+\frac{5}{2}X-\frac{9}{4}$, iar restul este $R(X)=10X-\frac{23}{4}$.

Exercițiu • Verificați egalitatea: $D(X)=I(X)\cdot C(X)+R(X)$.

3.3.2. Împărțirea polinoamelor la binomul $X-c$

Considerăm un polinom $P(X)$, $\operatorname{grad}P(X)\ge 1$, și binomul $(X-c)$. Din teorema împărțirii cu rest rezultă că există polinoamele $C(X)$, $R(X)$, astfel încât

$$P(X)=(X-c)C(X)+R(X),\ \text{unde}\ R(X)=0\ \text{sau}\ \operatorname{grad}R(X)<\operatorname{grad}(X-c)=1. \quad (3)$$

Deoarece $\operatorname{grad}R(X)=0$ sau $R(X)=0$, rezultă că $R(X)$ este un polinom constant, adică $R(X)=r$, unde $r\in\mathbb{R}$. Substituind în egalitatea (3) $X=c$ și $R(X)=r$, avem $P(c)=(c-c)\,Q(c)+r$, de unde rezultă că $r=P(c)$. Astfel, am obținut următorul rezultat:

Teorema 2 **(teorema lui Bézout[1])**
Restul împărțirii unui polinom $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ la binomul $(X-c) \in \mathbb{R}[X]$ este egal cu $P(c)$.

Această teoremă furnizează o metodă de a determina restul împărțirii unui polinom arbitrar la binomul $X-c$ fără a efectua împărțirea.

Consecință Numărul c este rădăcină a polinomului $P(X)$ dacă şi numai dacă $P(X)=(X-c)\cdot C(X)$ ($P(X)$ e divizibil cu $X-c$).

Exemplu Restul împărțirii polinomului $P(X)=X^4+2X^3-14X^2-2X+18$ la binomul $X-3$ este $r=P(3)=3^4+2\cdot 3^3-14\cdot 3^2-2\cdot 3+18=21$.

Exercițiu rezolvat Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)=X^4+mX^2+mX-1$ la binomul $X-m$, dacă la împărțirea lui $P(X)$ la binomul $X-1$ se obține restul –6.

Rezolvare:

Conform teoremei lui Bézout $P(1)=-6$, deci $1^4+m\cdot 1+m\cdot 1-1=-6 \Rightarrow m=-3$ şi $P(X)=X^4-3X^2-3X-1$. Restul căutat este $P(m)=P(-3)=62$.

Considerăm polinomul $P(X)=a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+..+a_1X+a_0$, $a_m\neq 0$. În baza teoremei 2, există $C(X)$ şi r, astfel încât $P(X)=(X-c)C(X)+r$.

Practic, calculul coeficienților $b_{m-1}, b_{m-2}, \dots, b_1, b_0$ ai câtului $C(X)$ şi al restului r se poate face utilizând următorul tabel, numit ***schema lui Horner***[2]:

	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0
c	$b_{m-1}=a_m$	$b_{m-2}=a_{m-1}+cb_{m-1}$	$b_{m-3}=a_{m-2}+cb_{m-2}$	...	$b_0=a_1+cb_1$	$r=a_0+cb_0$

Exercițiu rezolvat Folosind schema lui Horner, să se determine câtul şi restul împărțirii polinomului $P(X)=2X^4-4X^3-2X^2+5$ la binomul $X-3$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul (se scriu inclusiv coeficienții nuli):

	2	–4	–2	0	5
3	2	$-4+3\cdot 2=2$	$-2+3\cdot 2=4$	$0+3\cdot 4=12$	$5+3\cdot 12=41$

Răspuns: Câtul împărțirii este $C(X)=2X^3+2X^2+4X+12$, iar restul este $r=41$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁

1. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încât $P(X)=Q(X)$, dacă:
   a) $P(X)=4+(c+b)X+(c+b)X^2+cX^3+aX^4$, $Q(X)=4a+(2a-1)X+X^2+(a+2)X^3+X^4$;
   b) $P(X)=2b+(2a+1)X+3X^2$, $Q(X)=2a-b+(3b+1)X+aX^2+cX^3$.
2. Să se afle gradul polinomului $P(X)\in \mathbb{R}[X]$ în funcție de a, dacă:
   a) $P(X)=3+aX+(a+1)X^2+(a^2-1)X^3$; b) $P(X)=a+(a^2-1)X+(a^2+2a-3)X^2+(a^2+3a-4)X^4$.
3. Să se calculeze $P(1)$, $P(-2)$, $P(3)$, $Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, dacă $P(X)=2+X-X^2-2X^3-X^4+X^5$ şi $Q(X)=X^4-10X^2+6$.
4. (BAC 2022) Determinați restul împărțirii polinomului $P(X)=2X^3+X^2-5X+1$ la binomul $X-2$.
5. Să se determine $P(c)$, dacă $P(X)=X^7+6X^6+3X^5-15X^4-17X^3+2X^2+3X+1$, $c=2$.
6. Să se calculeze $P(X)+Q(X)$, $P(X)-Q(X)$ şi $P(X)\cdot Q(X)$, dacă $P(X)=-5X+3X^2+2X^3$, $Q(X)=1+2X-3X^2$.

[1] Etienne Bézout (1730–1783) – matematician francez
[2] William George Horner (1786–1837) – matematician britanic

7. Să se determine câtul $C(X)$ și restul $R(X)$ împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$, dacă:
a) $P(X)=X^6-3X^4+2X^3-3X+4,\ Q(X)=X-2;$ b) $P(X)=2X^5+5X^4+4X^3-7X^2+2X+1,\ Q(X)=X+3;$
c) (BAC 2022) $P(X)=2X^3+X^2-5X+1,\ Q(X)=X-2.$

B₁

8. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)$, unde:
a) $P(X)=2X^4+3X^3-2X^2+3X+1,\ \ Q(X)=X+1$ (inclusiv folosind schema Horner);
b) $P(X)=3X^5-2X^4-3X^2+5X+4,\ Q(X)=X^3+2X+3;$
c) $P(X)=2X^3+3X^2-5X,\ Q(X)=3X^2+2X-1;$
d) $P(X)=2X^6+3X^5-4X^4+2X^3-3X^2+2X+1,\ Q(X)=X^2-3X+2.$

9. Care dintre punctele $A(1;1)$ și $B(2;9)$ aparțin graficului funcției polinomiale asociate polinomului $P(X)=X^3+2X-3\in\mathbb{R}[X]$?

10. Resturile împărțirii polinomului $P(X)$ la binoamele $X-2$ și $X-3$ sunt 2, respectiv 5. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la trinomul X^2-5X+6.

11. Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la trinomul $X^2+7X+12$ este $3X+14$. Să se afle resturile împărțirii polinomului $P(X)$ la binoamele $X+3$ și $X+4$ respectiv.

12. Să se determine valorile parametrului real *a* pentru care restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$ este *r*, dacă: a) $P(X)=X^4+aX^3-6X^2+3X+4,\ \ Q(X)=X+3,\ r=-5;$
b) $P(X)=X^3+(a^2+3)X^2+2aX+4a+5,\ Q(X)=X-2,\ r=37.$

13. Să se determine polinomul de gradul doi $P(X)\in\mathbb{R}[X]$, dacă:
a) $P(1)=4,\ P(-1)=2,\ P(-2)=4;$ b) $P(1)=6,\ P(-3)=18,\ P(2)=13.$

C₁

14. Ce condiții trebuie să satisfacă numerele *a*, *b* și *c* pentru ca $P(X)$ să fie divizibil la polinomul $Q(X)=X^2+cX+1$:
a) $P(X)=X^4+aX+b;$ b) $P(X)=X^3+aX+b;$ c) $P(X)=X^5+aX+b$?

15. Să se determine restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)$, dacă:
a) $P(X)=X^{42}-3X^{21}+4,\ \ Q(X)=X^2-1;$ b) $P(X)=X^{19}+X^{13}+2X^{10}+2X^3+2,\ Q(X)=X^2+1;$
c) $P(X)=X^{18}-2X^{17}+3X^{12}-X^6+2X^5-1,\ Q(X)=X^4-1.$

16. Resturile împărțirii polinomului $P(X)$ la binoamele $X-1,\ X-2,\ X-3$ sunt, respectiv, 2, 3 și 4. Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $(X-1)(X-2)(X-3)$.

17*. Fie $P(X)\in\mathbb{R}[X]$, astfel încât $(x+1)P(x)+(x-1)P(x+3)=4x+6$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Să se afle restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $(X-1)(X-2)$.

§4 Rădăcinile polinoamelor

4.1. Noțiunea de rădăcină multiplă a polinomului

Diverse aplicații ale polinoamelor (rezolvarea ecuațiilor, rezolvarea problemelor textuale, interpolarea funcțiilor ș.a.) se bazează pe noțiunea de rădăcină a polinomului.

Exercițiu rezolvat

Să se determine dacă numerele 2 și 3 sunt rădăcini ale polinomului

$$P(X)=X^5-4X^4+4X^3+X^2-4X+4.$$

Rezolvare:

Așa cum $P(2)=0$, iar $P(3)\neq 0$ (Verificați!), conchidem că numărul 2 este rădăcină a polinomului $P(X)$, iar numărul 3 nu este rădăcină.

Efectuând împărțirea la $X-2$, obținem: $P(X)=(X-2)(X^4-2X^3+X-2)$.
Observăm că 2 este rădăcină și a câtului $C(X)=X^4-2X^3+X-2$, și $C(X)=(X-2)(X^3+1)$,

prin urmare, $P(X)=(X-2)^2(X^3+1)$. Astfel, $P(X)$ este divizibil cu $(X-2)^2$, însă putem verifica uşor că $P(X)$ nu este divizibil cu $(X-2)^3$. În astfel de situații spunem că avem rădăcină multiplă.

Definiție

Numărul m, $m \in \mathbb{N}^*$, se numeşte **ordin de multiplicitate al rădăcinii** α a polinomului $P(X)$ dacă $(X-\alpha)^m$ divide $P(X)$, iar $(X-\alpha)^{m+1}$ nu divide $P(X)$.

Dacă $m=1$, atunci α se numeşte ***rădăcină simplă***; dacă $m \geq 2$, atunci α se numeşte ***rădăcină multiplă*** de ordin m a polinomului $P(X)$. Rădăcina unui polinom care are ordinul de multiplicitate 2 (respectiv 3) se numeşte ***rădăcină dublă*** (respectiv ***triplă***).

Ordinul de multiplicitate al unei rădăcini poate fi determinat cu ajutorul schemei lui Horner, efectuând succesiv împărțirea polinomului $P(X)$ la $X-\alpha$ $(P(X)=(X-\alpha)\cdot C_1(X))$, apoi a câtului obținut $C_1(X)$ la $X-\alpha$ $(C_1(X)=(X-\alpha)\cdot C_2(X),\ P(X)=(X-\alpha)^2\cdot C_2(X))$ ş.a.m.d., până se obține un cât $C_s(X)$ care nu este divizibil cu $X-\alpha$.

Deci, $P(X)=(X-\alpha)^s\cdot C_s(X)$. Numărul s va fi ordinul de multiplicitate al rădăcinii α a polinomului $P(X)$, deoarece $(X-\alpha)^{s+1}$ nu divide $(X-\alpha)^s\cdot C_s(X)$.

În exercițiul precedent, numărul 2 este rădăcină dublă pentru
$P(X)=X^5-4X^4+4X^3+X^2-4X+4$.

Este firească întrebarea dacă un polinom arbitrar are rădăcini. Teorema fundamentală a algebrei afirmă că orice polinom din $\mathbb{R}[X]$, al cărui grad e mai mare sau egal cu 1 are cel puțin o rădăcină, însă ea nu e neapărat reală.

Rețineți!

Orice polinom de grad impar cu coefcienți reali are cel puțin o rădăcină reală.

O metodă utilă de determinare a rădăcinilor unui polinom cu coeficienți întregi (eventual, şi descompunerea lui în factori) este „căutarea" lor printre divizorii termenului liber al polinomului.

Exercițiu rezolvat

Să se descompună în factori polinomul: $P(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1$.

Rezolvare:

Punem la încercare numerele ± 1 care sunt divizori ai termenului liber 1. Uşor, se calculează că $P(1)=0$, deci, în baza teoremei Bézout, $P(X)$ se divide cu $X-1$: $P(X)=(X-1)(X^3-X^2+X-1)$. La fel procedăm şi în cazul câtului $C(X)=X^3-X^2+X-1$, pentru care $X=1$ este rădăcină, deci $C(X)=(X-1)(X^2+1)$. Astfel am reuşit să aflăm rădăcinile lui $P(X)$: $X_0=1$ – rădăcină dublă şi să-l descompunem în factori: $P(X)=(X-1)^2(X^2+1)$.

4.2. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

Fie A una dintre mulțimile $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ şi $P(X)\in A[X]$, $\text{grad}\,P(X)=n$, $n\geq 1$. Polinomul $P(X)$ se numeşte ***reductibil peste*** A dacă există polinoamele $Q(X), C(X)\in A(X)$ de grad cel puțin unu, astfel încât $P(X)=Q(X)\cdot C(X)$. În caz contrar, el se numeşte ***ireductibil peste*** A.

Exemple

1. Orice polinom de grad 1 cu coeficienți din A este ireductibil peste A.
2. Polinomul $P(X)=X^2+3$ este ireductibil peste $\mathbb{R}$, fiindcă ecuația asociată $x^2+3=0$ n-are soluții reale.
3. Polinomul $Q(X)=X^2-3$ este reductibil peste $\mathbb{R}$, deoarece $Q(X)=(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$, însă este ireductibil peste $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$.

În baza consecinței din teorema Bézout, cunoscând rădăcinile unui polinom, îl putem descompune în produs de factori. Mai mult, e demonstrabil că orice polinom $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, grad $P \geq 1$, poate fi reprezentat sub forma:

$$P(X) = a_n(X-\beta_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (X-\beta_s)^{k_s} \cdot (X^2+b_1X+c_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (X^2+b_mX+c_m)^{t_m},$$

unde $\beta_1, \ldots, \beta_s, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_m, a_n$ sunt numere reale, $k_1, \ldots, k_s, t_1, \ldots, t_m$ sunt numere naturale, $k_1 + \ldots + k_s + 2t_1 + \ldots + 2t_m = \text{grad}\, P(X)$, şi toate trinoamele nu au rădăcini reale.

Exercițiu rezolvat

Să se descompună polinomul $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$.

Rezolvare:

Prin înlocuire, obținem că $\alpha = 1$ este rădăcină a lui $P(X)$ şi a câtului $C(X)$ $(P(X) = (X-1) \cdot C(X))$. Efectuând împărțirea lui $P(X)$ la $(X-1)^2$, obținem $P(X) = (X-1)^2(X^2+1)$. Factorii $X-1$ şi X^2+1 sunt ireductibili peste $\mathbb{R}$.

Pentru a efectua operații cu fracții algebrice (şi nu numai) este utilă noțiunea de cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) a două sau mai multe polinoame.

Definiție

Un polinom $M(X)$ se numeşte c.m.m.m.c. al polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$ dacă
(*i*) $M(X)$ este multiplu comun al lor ($P(X) | M(X)$ şi $Q(X) | M(X)$);
(*ii*) $M(X)$ este divizor pentru oricare multiplu comun al polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$.

Rețineți!

O metodă de determinare a c.m.m.m.c. al polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$ se bazează pe descompunerea în factori ireductibili a acestora.

Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$ se poate determina ca ***produsul*** tuturor factorilor ireductibili (peste $\mathbb{R}$), ce se întâlnesc în aceste descompuneri, cu exponentul cel mai mare, dacă acel factor se întâlneşte în ambele descompuneri. C.m.m.m.c. se determină cu exactitatea unui factor numeric.

Exemplu

Fie $P(X) = (X+1)^2(2X+3)(X^2+X+1)$, $Q(X) = (X+1)^3(X^2+X+1)$ polinoame descompuse în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$. Atunci $M(X) = (X+1)^3(2X+3)(X^2+X+1)$ este c.m.m.m.c. al polinoamelor $P(X)$, $Q(X)$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁

1. Să se determine dacă α este rădăcină a polinomului $P(X)$, unde:
a) $P(X) = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 7X + 2$, $\alpha = -2$;
b) $P(X) = X^7 - 3X^6 + 2X^5 - 3X^4 - 14X^3 + 15X^2 - X + 3$, $\alpha = 3$.

2. Ştiind că $P(\alpha) = 0$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului $P(X)$, dacă:
a) $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$, $\alpha = 1$;
b) $P(X) = X^3 + 5X^2 + 5X + 4$, $\alpha = -4$;
c) $P(X) = X^3 - 21X^2 - 73X + 24$, $\alpha = 24$.

3. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul:
a) $X^3 - 1$; b) $X^4 - 16$; c) $X^4 - 3X^2 - 4$; d*) $X^4 - 10X^2 + 1$.

4. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii α a polinomului $P(X)$, dacă:
a) $P(X) = X^5 - 3X^4 + 4X^3 - 4X^2 + 3X - 1$, $\alpha = 1$;
b) $P(X) = X^5 - 2X^4 - 5X^3 + 10X^2 + 4X - 8$, $\alpha = 2$.

B₁

5*. Să se determine c.m.m.m.c. al polinoamelor $P(X)$, $Q(X)$, dacă:
a) $P(X)=(X-1)^3(X+2)^4(X+1)(X+3)^3$, $Q(X)=(X+2)^3(X+3)^4(X+4)(X-5)$;
b) $P(X)=(X^2+1)^2(X^2-1)^4(X+3)^3$, $Q(X)=(X+1)^3(X^2+1)(X-1)^5$;
c) $P(X)=(X^4-1)^2(X^3-1)(X-3)^2$, $Q(X)=(X^2-9)^3(X^2+X+1)(X-1)^3$.

6. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii α a polinomului $P(X)$, unde:
a) $P(X)=X^3-4X^2-3X+18$, $\alpha=3$;
b) $P(X)=X^4+2X^3-12X^2-40X-32$, $\alpha=-2$.

7. Să se determine rădăcinile reale ale polinomului și să se descompună polinomul în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$:
a) $X^4-2X^3+4X^2-2X+3$; b) $X^4+2X^3+8X^2+2X+7$;
c) $X^4-2X^3+4X^2+2X-5$; d) X^4+X^3-X-1.

C₁

8. Să se determine numerele $a, b, c\in\mathbb{R}$, astfel încât ele să fie rădăcini ale polinomului X^3-aX^2+bX-c.

9. Să se arate că 1 este rădăcină dublă a polinomului $X^{3n}-nX^{n+2}+nX^{n-1}-1$, $n\geq 2$.

10*. Să se arate că $P(X)$ se divide cu $Q(X)$, dacă:
a) $P(X)=X^{n+1}-(n+1)X+n$, $Q(X)=(X-1)^2$; b) $P(X)=(2n-1)X^{2n}+2nX^{2n-1}+1$, $Q(X)=(X+1)^2$.

11*. Să se arate că, dacă $n\geq 3$, atunci polinomul $X^n-(n-1)X^2+(n-2)X$ se divide cu $(X-1)^2$, dar nu se divide cu $(X-1)^3$.

12. (BAC 2024) Determinați valorile reale ale lui a și b, pentru care $x=2$ este rădăcină dublă a polinomului $P(X)=X^4-2X^3+aX+b$.

13. Fie o placă metalică de formă dreptunghiulară cu lungimea de 10 dm și lățimea de 8 dm. Din fiecare colț al acestei plăci se taie câte un pătrat cu latura de x dm. Din placa rămasă se face o cutie deschisă cu înălțimea de x dm. Să se determine valoarea lui x pentru care volumul cutiei formate să fie egal cu $24\ \text{dm}^3$.

§5 Fracții algebrice

Definiție

Raportul $\frac{P}{Q}$ a două polinoame $P, Q, Q\neq 0$, se numește ***fracție algebrică*** sau ***fracție rațională***.

Rețineți!

Domeniul valorilor admisibile (DVA) al unei fracții algebrice (cu o nedeterminată) este mulțimea tuturor numerelor reale pentru care numitorul fracției este diferit de zero.

Exercițiu rezolvat

Să se afle DVA al fracției: $\frac{P(X)}{Q(X)}=\frac{X(1-X^2)}{(X+1)(X-4X^3)}$.

Rezolvare:
Rezolvăm ecuația asociată polinomului $Q(X)$: $(x+1)(x-4x^3)=0$.
Soluțiile ei sunt $S=\{-1; -0{,}5; 0; 0{,}5\}$. Deci, DVA al fracției este $\mathbb{R}\setminus S$.

Cu fracțiile algebrice se efectuează mai multe operații.

• ***Simplificarea fracțiilor***

Rețineți!

Pentru simplificarea fracției e necesar să descompunem în produs de factori ireductibili (peste $\mathbb{R}$) numitorul și numărătorul ei, apoi să simplificăm fracția obținută ca și fracțiile numerice.

Exemplu

Fracția din exercițiul de mai sus se simplifică astfel:
$$\frac{P(X)}{Q(X)}=\frac{X(1-X)(1+X)}{(X+1)X(1-2X)(1+2X)}=\frac{1-X}{1-4X^2}.$$

• ***Amplificarea fracțiilor***

Rețineți!

A amplifica o fracție algebrică înseamnă a înmulți numărătorul și numitorul fracției la (cu) același polinom de grad cel puțin egal cu 1.
Prin simplificarea (amplificarea) unei fracții algebrice se poate modifica DVA.

Definiții

• Fracția algebrică care nu se poate simplifica printr-un polinom de grad nenul se numește **ireductibilă**.

• Două fracții algebrice $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ și $\frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ se consideră **egale** (pe DVA comun) dacă în egalitatea $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}=\frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ produsul mezilor este egal cu produsul extremilor: $P_1(X)\cdot Q_2(X)=P_2(X)\cdot Q_1(X)$.

• ***Adunarea*** fracțiilor algebrice

Rețineți!

Suma a două fracții algebrice cu același numitor este o fracție algebrică care are numărătorul egal cu suma algebrică a numărătorilor fracțiilor inițiale, iar numitorul ei coincide cu numitorul fracțiilor inițiale.
Pentru a aduna pe DVA comun două fracții algebrice cu numitori diferiți, fracțiile se aduc la același numitor (prin simplificare, amplificare sau determinând c.m.m.m.c. al polinoamelor de la numitori), apoi rezultatele se adună ca fracții cu același numitor.

De regulă, în fracția obținută în rezultatul adunării se fac simplificări până se obține o fracție ireductibilă.

Exemplu

Să se determine suma $S=\frac{3}{X^2-3X}+\frac{1}{X}+\frac{1}{X-3}$.

Rezolvare:

DVA comun este $\mathbb{R}\setminus\{0;\,3\}$. Pe acest DVA avem:

$$S=\frac{3}{X^2-3X}+\frac{X-3}{X(X-3)}+\frac{X}{X(X-3)}=\frac{3+X-3+X}{X(X-3)}=\frac{2X}{X(X-3)}=\frac{2}{X-3}.$$

Rețineți!

• Operațiile de ***înmulțire***, ***împărțire***, ***ridicare la putere*** cu exponent întreg ale fracțiilor algebrice se efectuează după aceleași reguli ca și operațiile respective cu fracțiile ordinare.

Aceste operații se execută pe DVA comun și, de regulă, în fracția rezultat se efectuează toate simplificările posibile, deci DVA al expresiei obținute poate fi diferit de cel inițial.

Exemplu

Să se efectueze operațiile: a) $\frac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3}:\frac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}}$; b) $\left(\frac{X-1}{X^2}\right)^{-3}$.

Rezolvare:

a) DVA comun este $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3}\}$.

Avem: $\frac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3}:\frac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}}=\frac{X^3-(\sqrt{2})^3}{X^2-\sqrt{3}X+3}\cdot\frac{X^3+(\sqrt{3})^3}{X^2+\sqrt{2}X+2}=$

$$=\frac{(X-\sqrt{2})(X^2+\sqrt{2}X+2)(X+\sqrt{3})(X^2-\sqrt{3}X+3)}{(X^2-\sqrt{3}X+3)(X^2+\sqrt{2}X+2)}=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3}).$$

DVA al câtului este $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3}\}$, deși DVA al expresiei obținute este $\mathbb{R}$.

b) DVA este $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Conform regulii de ridicare la putere, obținem:

$\left(\frac{X-1}{X^2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{X-1}{X^2}\right)^3}=\frac{(X^2)^3}{(X-1)^3}=\frac{X^6}{(X-1)^3}$. DVA al rezultatului este deja $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Exerciții propuse

Profilul real

A₁

1. Să se afle DVA comun al perechilor de fracții algebrice:

a) $\frac{X+5}{4}$ și $\frac{X-6}{2}$; b) $\frac{1}{X-3}$ și $\frac{X}{X+3}$; c) $\frac{X-4}{3X+6}$ și $\frac{3X-1}{X^2+2X}$.

2. Să se scrie fiecare sumă de două fracții algebrice din exercițiul **1** sub formă de fracție ireductibilă.

3. Să se precizeze DVA al fracțiilor ireductibile obținute în **2**.

4. Să se calculeze valoarea fracției obținute ca rezultat al adunării fracțiilor din exercițiul **1** c) pentru:

a) $X=-1$; b) $X=0{,}25$; c) $X=2$.

B₁

5. Să se efectueze pe DVA al expresiei:

a) $\frac{X+3}{X^2+2X}+\frac{X-3}{4-X^2}$; b) $\frac{(X+4)^2}{X^2+4X}+\frac{(X-4)^2}{X^2-4X}$; c) $\frac{3-X^2}{9-X^2}+\frac{X+3}{X-3}$;

d) $\frac{-125}{X^2-5X}+\frac{X^2}{X-5}$; e) $\frac{X^3}{X^2-64}-\frac{X}{X-8}+\frac{2}{X+8}$; f) $\left(\frac{1}{X-1}\right)^{-1}+\frac{X}{X+1}-\frac{X+2}{X^2-1}$.

6. Să se scrie sub formă de fracție algebrică ireductibilă pe DVA:

a) $\frac{2X-6}{X^2}\cdot\frac{X^3}{X-3}$; b) $\frac{\sqrt{3}X^2}{2X-2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}X-2}{3X^3}$; c) $\frac{X^2-100}{2X^5}\cdot\frac{-X^2}{X-10}$;

d) $(X^2-4):\frac{(X+2)^2}{X-2}$; e) $\frac{(Y-5)^2}{3Y+18}:\frac{3Y^2-75}{Y^2-36}$; f) $\left(\frac{X^2-4}{X}\right)^{-2}:\frac{X^2+1}{X-2}$.

C₁

7. Să se aducă la forma cea mai simplă pe DVA:

a) $\left(X-\frac{3}{X-1}\right)\cdot\left(\frac{2(1-X)}{6+2X-2X^2}\right)$; b) $(X^2-3X+2)X\cdot\left(\frac{3X}{X-2}-\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X^2-3X+2}\right)$;

c) $\left(\frac{8X^3+1}{8X^2+1}\right)^{-1}\cdot\frac{4X^2-2X+1}{4X^2-1}\cdot(1-2X)^2$; d) $\frac{4X^2-1}{8X^3+1}:\left(\frac{4X^2-4X+1}{4X^2-2X+1}\cdot\frac{1}{2X+1}\right)$.

8. Fie $E(X)=\frac{X^2+3X+2}{X-2}$. a) Să se scrie expresia sub forma $E(X)=aX+b+\frac{c}{X-2}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$.

b) Să se determine $X\in\mathbb{Z}$, astfel încât $E(X)\in\mathbb{Z}$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real

A₁

1. Să se determine produsul $P\cdot Q$: $P(X)=6X^2-3-7X^3-2X^2+3$; $Q(Y)=7Y^3-8-6Y^2+3Y+4Y^2-7Y^3+20$.

2. Să se scrie în forma canonică suma, diferența și produsul polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$:

a) $P(X)=3X^2$; $Q(X)=2X^2-10X+4$; b) $P(X)=-X^2-1$; $Q(X)=-3X^3+6X+2$.

3. Să se scrie în forma canonică:

a) $(3X+2)^3$; b) $(-\sqrt{3}+Y)^3$; c) $(3Y-1)(9Y^2+3Y+1)$; d) $(3X+1)(9X^2-3X+1)$.

4. Să se determine care dintre elementele mulțimii $\{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$ sunt rădăcini ale polinomului:

a) $P(X)=X^3-25X$; b) $P(X)=X^3-2X^2-X-2$; c) $P(X)=X^3-4X^2+3X$.

B₁

5. Să se descompună în factori polinomul:

a) $4X^2+4XY+Y^2$; b) $Z^2-Z+0{,}25$;
c) $9X^2+42X+49$; d) $9X^2-6X+1$.

6. Aplicând formulele studiate, să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul:

a) $16Y^2-25(Y+4)^2$; b) $(2X-9)^2-81$;
c) $64X^3+1$; d*) Z^6-125.

7. Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ grupând termenii polinomului:

a) $X^2 - 5XY + X - 5Y$; b) $2Y^3 - 4Y^2 + Y - 2$;

c) $X^3 - YX^2 - 8X + 8Y$; d) $X^3 + X^2 + \sqrt{3}X + \sqrt{3}$.

8. Să se afle câtul $C(X)$ și restul $R(X)$ împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$:

a) $P(X) = X^2 + X - 20,\ Q(X) = X - 4$;

b) $P(X) = 6X^3 + X^2 - 29X + 20,\ Q(X) = 2X - 3$;

c) (BAC 2023) $P(X) = X^3 - 2X^2 + 16,\ Q(X) = X^2 - 1$.

9. Aplicând teorema lui Bézout, să se determine restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X - \alpha$, dacă:

a) $P(X) = 2X^3 + 4X + 1,\ \alpha = 1$; b) $P(X) = -3X^4 - 5X^2 + 6X - 21,\ \alpha = -2$.

10. Să se stabilească dacă polinomul $P(X)$ se divide la polinomul $Q(X)$:

a) $P(X) = X^4 - 64,\ Q(X) = X + 4$; b) $P(X) = 2X^3 - 5X + 1,\ Q(X) = (X-3)(X+1)$.

11. Fie fracția algebrică $\dfrac{X^2(1-X)}{(X+1)^2(4X - X^3)}$.

a) Să se afle DVA. b) Să se simplifice fracția. c) Să se afle valoarea ei pentru $X = \sqrt{2} - 1$.

C_1

12. Să se afle valorile parametrului real a, știind că polinomul $P(X)$ este multiplu al polinomului $Q(X)$:

a) $P(X) = 2X^3 - 5X^2 + aX + a,\ Q(X) = X - 3$; b) $P(X) = aX^3 + 3X^2 + (a-1)X - 2,\ Q(X) = (X-2)(X+2)$.

13. Să se efectueze pe DVA: $\left(\dfrac{1}{X^2 - 3X} + \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{X-3}\right)^{-3}$.

14*. Să se scrie un polinom $Q(X)$ în forma canonică, știind că rădăcinile lui sunt egale cu inversele rădăcinilor polinomului $P(X) = 3X^2 + X - 15$.

15. *Lucrați în grup!* Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali, cu gradul cel mult egal cu 2, astfel încât $P(\alpha) = 0$ pentru $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. Să se demonstreze că $P(X)$ este polinomul nul.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Profilul real

1. Fie polinomul $P(X) = 5X^2 - (X^4 - 4X^2 - X) - 1$.

a) Scrieți polinomul în forma canonică.

b) Completați caseta: $\operatorname{grad} P(X) = \square$.

c) Aflați câtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X) = X - 1$.

d) Aflați rădăcinile polinomului $P(X) - Q(X)$.

e) Determinați $C(X)$ și $R(X)$, astfel încât $P(X) = (X^2 - 1) \cdot C(X) + R(X)$, $\operatorname{grad} R(X) < 2$.

2. Fie expresia $E(X) = \dfrac{4}{X^2 + 8} - \dfrac{3}{X^2 + 5}$.

a) Aflați DVA al expresiei.

b) Aflați valorile reale ale lui X pentru care $E(X) \neq 0$.

c) Aflați $E(\alpha)$, dacă α este rădăcina pozitivă a polinomului $P(X) = X(X^2 - 4)$.

3. Descompuneți în factori polinomul $(XY + 5)^3 + 8X^3$.

4. Arătați că 1 este rădăcină dublă a polinomului $X^9 - 3X^5 + 3X^2 - 1$.

MODULUL 6 Funcții reale. Proprietăți fundamentale

Algebra nu este decât o geometrie scrisă, geometria nu este decât o algebră figurată.

Marie-Sophie Germain

Obiective

- identificarea şi utilizarea noțiunilor *funcție*, *graficul funcției* în diverse contexte;
- determinarea proprietăților fundamentale ale funcției şi ale graficului ei;
- clasificarea funcțiilor studiate după diferite criterii;
- aplicarea proprietăților funcțiilor în situații reale şi/sau modelate.

§1 Noțiunea de funcție. Recapitulare şi completări

1.1. Noțiunea de funcție. Moduri de a defini o funcție

În activitatea de zi cu zi este necesar uneori să stabilim relații (asocieri) între elementele unor mulțimi. De exemplu, fie A mulțimea tipurilor de produse dintr-o secție a unui magazin, B – mulțimea prețurilor produselor din această secție. Dacă am vrea să determinăm produsul x (din A) ştiind prețul y din B, s-ar crea o confuzie, pentru că ar putea fi mai multe produse care au prețul y. Dacă însă examinăm corespondența inversă, ştiind produsul x din A, să determinăm prețul lui y din B, atunci fiecărui x îi va corespunde un unic preț y din B.

În acest caz se spune că avem definită ***o funcție*** f de la A la B.

Definiție

Prin **funcție** se înțelege tripletul ordonat (A, B, f), unde A, B sunt mulțimi nevide, iar f este o corespondență (lege) care asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element $y \in B$. În alți termeni, funcția este o **aplicație** de la A la B: $f: A \to B$ (fig. 6.1 b)).

Dacă lui x i se asociază y, atunci se notează $y = f(x)$ şi se spune că y este ***imaginea*** lui x sau ***valoarea funcției*** f în punctul x. Mulțimea A se numeşte ***domeniu de definiție*** al funcției f şi se notează: $D(f)$, iar mulțimea B se numeşte ***codomeniul*** funcției f sau ***domeniul de valori***. Funcția (A, B, f) se mai scrie $f: A \to B$ şi se citeşte „f definită pe A cu valori în B" sau „f de la A la B". Mulțimea $B_1 = \{y \in B \mid (\exists x \in A)\ (f(x) = y)\}$ se numeşte ***imaginea mulțimii A*** sau ***mulțimea valorilor*** funcției f şi se notează $f(A)$ sau $E(f)$, sau Imf. Cu $f(x_0)$ se notează valoarea funcției f în punctul x_0. Deci, $E(f) = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Observație

Vom examina ***funcțiile reale*** (numerice) pentru care A şi B sunt submulțimi ale mulțimii $\mathbb{R}$.

Definiție

Funcțiile $f_1: A_1 \to B_1$ şi $f_2: A_2 \to B_2$ se numesc **funcții egale** dacă:
1) $A_1 = A_2$; 2) $B_1 = B_2$; 3) $f_1(x) = f_2(x)$ pentru orice x din A_1.

Exemple

1. Funcțiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, și $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x^2}$, sunt egale, întrucât $D(f) = D(g)$, coincid codomeniile și pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = g(x)$.
2. Funcțiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, și $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, nu sunt egale, deoarece codomeniile lor sunt diferite.
3. Este clar că funcțiile egale au și mulțimile de valori egale. Mulțimea de valori a funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$, este $\mathbb{R}_+$, fiindcă oricare ar fi $y \in \mathbb{R}_+$ există $x \in \mathbb{R}$, și anume $x = \pm y$, astfel încât $f(x) = y$. De altfel, și funcția $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2}$, are aceeași mulțime de valori.
4. Relația $y = \sqrt{-x^2 - 1}$ nu definește o funcție: nu există $x \in \mathbb{R}$ pentru care putem calcula y.

Rețineți!

- Pentru funcția $f\colon A \to B$, corespondența f se numește ***dependență funcțională***. În relația $y = f(x)$, cu $x \in A$, $y \in B$, variabila x se numește ***variabilă independentă*** sau ***argumentul funcției***, iar variabila y – ***variabilă dependentă***.
- Dacă este clar din context care sunt mulțimile A, B, atunci, în loc de $f\colon A \to B$, vom spune și vom scrie „funcția f”.

Dacă $f\colon A \to B$ este o funcție, $M \subseteq A$, $K \subseteq \operatorname{Im} f$, atunci prin ***imaginea mulțimii*** M la aplicația f vom înțelege submulțimea $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ a mulțimii B, iar prin ***preimaginea mulțimii*** K vom înțelege submulțimea $T = \{x \in A \mid f(x) \in K\}$ a mulțimii A.

Exercițiu rezolvat

Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, și mulțimile $M = [0, 2]$, $K = [3, 7]$.
Să se determine: a) imaginea mulțimii M; b) preimaginea mulțimii K.

Rezolvare:

a) Pentru a determina $f(M)$ – imaginea mulțimii M, ținem cont că $0 \le x \le 2$ și succesiv obținem: $0 \le x^2 \le 4$, $3 \le x^2 + 3 \le 7$, $3 \le f(x) \le 7$. Deci, $f(M) \subseteq [3, 7]$. Este adevărată și incluziunea inversă, $[3, 7] \subseteq f(M)$, deoarece ecuația $x^2 + 3 = t$, $t \in [3, 7]$, are soluții în intervalul $[0, 2]$. Așadar, $f(M) = [3, 7]$.

b) Din inegalitatea dublă $3 \le f(x) \le 7$ obținem $|x| \le 2$, adică preimaginea mulțimii K este mulțimea $T = [-2, 2]$.

Ne amintim

Funcția poate fi definită:
1) în ***mod sintetic*** – printr-un tabel, printr-o diagramă, printr-un grafic, prin enumerarea perechilor ordonate de numere;
2) în ***mod analitic*** – cu ajutorul unei expresii (formule).

1 *Modul sintetic de definire a funcției*

a)

x	-1	0	$3{,}14$	5
$f(x)$	7	1	0	$0{,}3$

b)

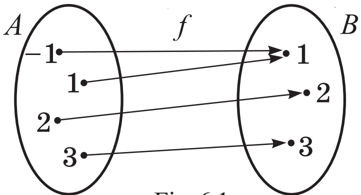


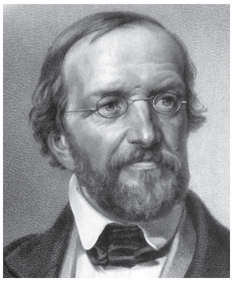
Fig. 6.1

a) Printr-un ***tabel*** poate fi definită o funcție al cărei domeniu de definiție este finit și conține un număr mic de elemente (fig. 6.1 a)).
b) Printr-o ***diagramă*** poate fi definită o funcție al cărei domeniu de definiție și codomeniu sunt reprezentate cu ajutorul diagramelor Euler-Venn (fig. 6.1 b)).
c) Printr-un ***grafic***.

2 *Modul analitic de definire a funcției*

Cel mai frecvent, o funcție se definește în ***mod analitic***, adică corespondența dintre valorile variabilei dependente și ale celei independente este dată de ***o formulă, o relație, o proprietate***.

Exemple



Johann Peter Gustav Lejeime Dirichlet (1805–1859) – matematician german

1. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$. Valoarea radicalului este univoc determinată, deci în mod unic va fi determinată valoarea funcției f pentru orice $x\in \mathbb{R}_+$.

2. ***Funcția „partea întreagă”.*** Notăm cu $[a]$, $a\in \mathbb{R}$, cel mai mare număr întreg care nu-l întrece pe a. De exemplu: $[3{,}1]=3$, $[-2{,}1]=-3$, $[2]=2$, $[\pi]=3$.
Funcția $g\colon \mathbb{R}\to \mathbb{Z}$, $g(x)=[x]$, se numește ***funcția partea întreagă*** a numărului și se notează [ ].
Se verifică ușor ***proprietățile funcției*** [ ]:
1° $[x]\le x$; 2° $[x+m]=[x]+m$, $m\in \mathbb{Z}$, $x\in \mathbb{R}$.

3. ***Funcția „partea fracționară”.*** Notăm cu $\{a\}=a-[a]$, $a\in \mathbb{R}$, partea fracționară a numărului a. De exemplu: $\{1{,}01\}=1{,}01-[1{,}01]=1{,}01-1=0{,}01$;
$\{-2{,}1\}=-2{,}1-[-2{,}1]=-2{,}1-(-3)=0{,}9$; $\{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-[\sqrt{2}]=\sqrt{2}-1$.
Funcția $h\colon \mathbb{R}\to[0,1)$, $h(x)=\{x\}$, se numește ***funcția partea fracționară*** a numărului și se notează { }.

4. ***Funcția lui Dirichlet*** este $f\colon \mathbb{R}\to\{0,1\}$, $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } x \text{ este rațional}\\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional.}\end{cases}$

Rețineți!

Deseori, se acceptă să se definească funcția numai prin formula $y=f(x)$, determinând, de fapt, numai dependența funcțională, care, de altfel, nu depinde de notația variabilelor, domeniul de definiție și codomeniul funcției urmând să fie determinate. În acest caz, ***domeniul de definiție $D=D(f)$ se consideră egal cu domeniul valorilor admisibile (DVA)*** al variabilei x în expresia $f(x)$, iar mulțimea $E(f)$ se consideră egală cu $f(D)$.

Exercițiu rezolvat

Să se afle mulțimile $D(f)$, $E(f)$ ale funcției f definite de $f(x)=\sqrt{x-3}+2$.

Rezolvare:
$D(f)$ este mulțimea soluțiilor inecuației $x-3\ge 0$, deci $D(f)=[3,+\infty)$.

Mulțimea valorilor unei funcții f definite analitic este mulțimea valorilor reale ale parametrului t, pentru care ecuația $f(x)=t$ are cel puțin o soluție în $D(f)$. În cazul dat, această ecuație ia forma $\sqrt{x-3}+2=t$ și în intervalul $[3,+\infty)$ este echivalentă cu fiecare din ecuațiile $\sqrt{x-3}=t-2$, $x-3=(t-2)^2$ pentru $t-2\ge 0$. Astfel, oricare ar fi $t\in[2,+\infty)$, ecuația $\sqrt{x-3}+2=t$ are soluție care aparține mulțimii $D(f)$.

Prin urmare, $f(D)=E(f)=[2,+\infty)$.

1.2. Operații cu funcții

Investigăm

Participanții $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la un concurs muzical sunt apreciați de către un juriu și, separat, de către spectatori.

	Juriul				Spectatorii			
Participanții	x_1	x_2	…	x_n	x_1	x_2	…	x_n
Punctele	y_1	y_2	…	y_n	z_1	z_2	…	z_n

,

unde $y, z\in\{0; 1; \ldots; 15\}$.

Punctele finale se obțin prin adunarea punctelor acordate de către juriu și de către spectatori (respectiv).

x_1	x_2	…	x_n
y_1+z_1	y_2+z_2	…	y_n+z_n

Primul tabel definește o funcție f, al doilea – o funcție g, al treilea – o funcție h de la $A=\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ la $B=[0; 30]$. De fapt, valorile funcției h se obțin adunând valorile respective ale funcțiilor f și g, de aceea h se consideră suma funcțiilor f și g și se notează $h=f+g$.

Definiție

Se numeşte **suma**, **produsul**, **câtul funcţiilor** $f: A \to \mathbb{R}$ şi $g: A \to \mathbb{R}$, respectiv
funcția $(f+g): A \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
funcția $(f \cdot g): A \to \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
funcția $\frac{f}{g}: A \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, pentru orice x din A.

Exercițiu rezolvat

Să se determine suma şi produsul funcţiilor
$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x} + 1$, şi $g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x+2}$.

Rezolvare:
În baza definiției, pentru funcțiile $f+g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f \cdot g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ obținem:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x+2}$, $(f \cdot g)(x) = (\sqrt{x}+1)\sqrt{x+2}$.

Rețineți!

Dacă funcțiile f, g au domenii de definiție diferite şi este necesar de a examina suma sau produsul lor, atunci ele se consideră definite pe mulțimea $D(f) \cap D(g)$.

Pentru a extinde aplicarea funcțiilor în diferite contexte, este necesar să se examineze şi alte operații cu funcții.

Definiție

Fie funcțiile $f: A \to B$ şi $g: B_1 \to E$, cu $B \subseteq B_1$. Funcția $h: A \to E$, definită prin egalitatea $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$, se numeşte **compusa (compunerea) funcției g cu funcția f** şi se notează $g \circ f$.

Enunțăm fără demonstrație:

Teorema 1

Pentru funcțiile $f: A \to B$, $g: B \to C$ şi $h: C \to D$, compunerea lor este asociativă: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Exercițiu rezolvat

Să se decidă dacă există compusele $g \circ f$, $f \circ g$, pentru $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g: [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 3$.

Rezolvare:
Aşa cum incluziunea $\mathbb{R} \subseteq [1, +\infty)$ este falsă, rezultă că nu se poate defini compusa $f \circ g$. Deoarece $\mathbb{R}_+ \subseteq [-2, +\infty)$, funcția $h = g \circ f$ este definită, are domeniul de definiție $[1, +\infty)$, codomeniul $\mathbb{R}$ şi $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 - 3 = x - 4$.

Rețineți!

Operația de compunere a funcțiilor, în general, nu este comutativă, adică $f \circ g \neq g \circ f$.

Un rol deosebit în compunerea funcțiilor îl au ***funcțiile identice***: $\varepsilon_M: M \to M$, $\varepsilon_M(x) = x$, $x \in M$.

Fie funcțiile $f: A \to B$, $\varepsilon_A: A \to A$, $\varepsilon_A(x) = x$, $\varepsilon_B: B \to B$, $\varepsilon_B(x) = x$. Să determinăm compusele $\varepsilon_B \circ f: A \to B$ şi $f \circ \varepsilon_A: A \to B$.

Avem: $(\varepsilon_B \circ f)(x) = \varepsilon_B(f(x)) = f(x)$, $x \in A$, şi $(f \circ \varepsilon_A)(x) = f(\varepsilon_A(x)) = f(x)$, $x \in A$. Prin urmare, funcțiile $f \circ \varepsilon_A$, $\varepsilon_B \circ f$ şi f au acelaşi domeniu de definiție A, acelaşi codomeniu B şi iau valori egale pentru orice $x \in A$. Rezultă că aceste trei funcții sunt egale: $f \circ \varepsilon_A = \varepsilon_B \circ f = f$.

Exerciții și probleme propuse

Profilul real

A₁

1. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=\frac{1}{x+4}$; b) $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$; c) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$.

2. Să se determine mulțimea valorilor funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^2-2$; b) $f(x)=x-x^2$; c) $f(x)=\frac{1}{x-1}$.

3. *Investigați!* Să se decidă dacă sunt egale funcțiile:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=2x,\ g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x)=2x$;
b) $f(x)=\frac{x}{x^2-2x},\ g(x)=\frac{1}{x-2}$;
c) $f, g: D \to \mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2},\ g(x)=\frac{2x-2}{x(x-2)}$.

4. Fie $A=\{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f: A \to B$, $f(x)=|x|+1$. Să se definească funcția f printr-o diagramă.

B₁

5. *Lucrați în perechi!* Să se determine domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; b) $f(x)=\frac{x-2}{|x|-2}$; c) $f(x)=\frac{1}{\{x\}}$; d) $f(x)=\frac{1}{[x]}$.

6. Să se determine domeniul de definiție și mulțimea valorilor funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=[x]$; b) $f(x)=\frac{1}{x-2}$; c) $f(x)=\frac{x-2}{3x+4}$.

7. *Lucrați în grup!* Să se afle suma, produsul și compusa $f \circ g$ ale funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=|x|,\ g(x)=x-1$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x+1},\ g(x)=x^3+1$; c) $f(x)=x^3-1,\ g(x)=\sqrt[3]{x-1}$.

C₁

8. Să se determine compusele $f \circ f,\ f \circ f \circ f,\ \ldots,\ \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}}$ ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^2$; b) $f(x)=x-1$.

9. Să se reprezinte sub formă de compusă a două funcții (diferite de cele identice) funcția $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $\Phi(x)=(x^{10}+1)^{17}$; b) $\Phi(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$.

10*. Fie funcțiile $f: A \to B,\ g: A \to C,\ f \neq g,\ M \subseteq A$. Există $M, M \neq \varnothing$, încât $f(x)=g(x), \forall x \in M$? Să se dea exemple.

11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x-5}$. Să se calculeze produsul $P=f(-2024)\cdot \ldots \cdot f(0) \cdot \ldots \cdot f(2024)$.

§2 Proprietățile fundamentale ale funcțiilor reale

Investigăm

Funcțiile reprezintă un instrument important pentru studiul proceselor, fenomenelor economice, sociale etc. De exemplu, la confecționarea motorului pentru automobil trebuie, printre altele, să se determine cantitatea de benzină consumată într-un minut pentru un anumit număr de turații (într-un minut). Deci, se va elabora/construi o funcție ce stabilește dependența dintre numărul de turații și cantitatea de benzină consumată (într-un minut). Însă, pentru utilizarea eficientă a funcțiilor, e necesar să se cunoască proprietățile lor: monotonia, zerourile, valorile extreme ș.a.

2.1. Graficul funcției

Ne amintim

Definiție

Se numește **graficul funcției** $f: A \to B$ mulțimea $G_f = \{(x; y) \mid x \in A, \ y = f(x)\}$.

Exemple

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2x - 1$. Punctul $A(2; 3)$ aparține graficului funcției f, fiindcă $f(2) = 3$, iar punctul $B(3; 1)$ nu aparține graficului acestei funcții, deoarece $f(3) = 5 \neq 1$.

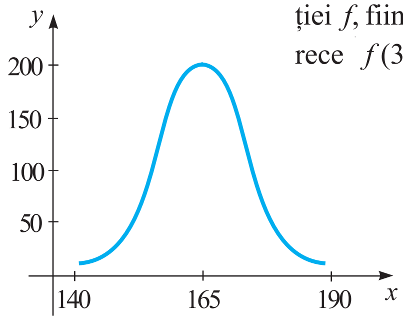


Fig. 6.2

2. Reprezentarea grafică ne ajută vizual să formulăm concluzii referitoare la variația funcției. De exemplu, fie că dependența dintre numărul y de persoane (din cele 1375 persoane selectate) de o anumită înălțime și această înălțime x este reprezentată grafic în figura 6.2. Se observă ușor că: persoane cu statura de 140 cm sunt puține; odată cu creșterea înălțimii, numărul lor crește până când înălțimea ajunge la 165 cm, apoi, odată cu creșterea în continuare a înălțimii, numărul persoanelor (de o anumită statură) descrește.

2.2. Zeroul funcției

Zeroul funcției este un număr α pentru care $f(\alpha) = 0$.

Este bine să cunoaștem punctele în care graficul funcției f intersectează axa Ox; în astfel de puncte funcția poate să-și schimbe semnul valorilor sale.

De exemplu, funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2x - 1$, are un unic zerou: $x = \frac{1}{2}$.

2.3. Monotonia funcției

Ne amintim

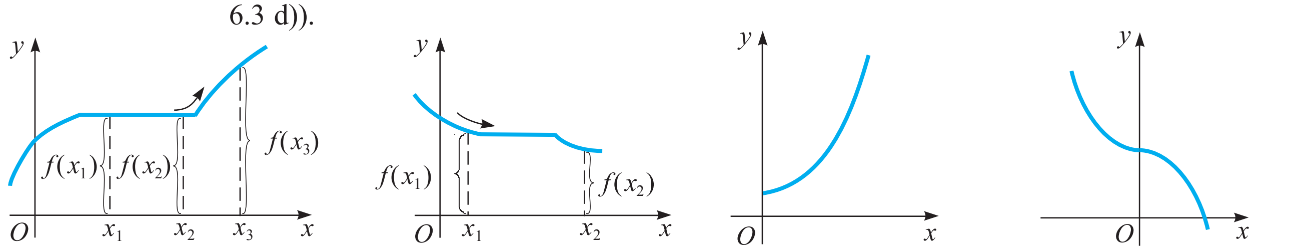
Definiții

- Funcția $f: A \to B$ se numește **crescătoare** (**descrescătoare**) pe un interval închis I, $I \subseteq A$, dacă pentru orice $x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in I$, avem $f(x_1) \le f(x_2) \ (f(x_1) \ge f(x_2))$.
- Funcția $f: A \to B$ se numește **strict crescătoare** (**strict descrescătoare**) pe un interval I, $I \subseteq A$, dacă pentru orice $x_1 < x_2, \ x_1, x_2 \in I$, avem $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Funcția crescătoare sau descrescătoare (strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe un interval se numește ***monotonă*** (***strict monotonă***) pe acest interval.

Creșterea (descreșterea) funcției pe un interval semnifică faptul că valorii mai mari a argumentului ce aparține acestui interval îi corespunde valoarea mai mare sau egală (mai mică sau egală) a funcției (fig. 6.3).

Geometric, creșterea (descreșterea) strictă a unei funcții pe un interval se ilustrează astfel: la deplasarea pe graficul funcției în sensul pozitiv al axei Ox, se va efectua concomitent o deplasare în sensul pozitiv (negativ) al axei Oy, adică în sus – figura 6.3 c) (în jos – figura 6.3 d)).



a) Graficul unei funcții crescătoare

b) Graficul unei funcții descrescătoare

c) Graficul unei funcții strict crescătoare

d) Graficul unei funcții strict descrescătoare

Fig. 6.3

Teorema 2

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ $(a < 0)$, este strict crescătoare (descrescătoare) pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ și strict descrescătoare (crescătoare) pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$.

2.4. Paritatea funcției

Definiție

Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ se numește **pară** (**impară**) dacă:
1) pentru $x \in D$ avem $-x \in D$ și
2) $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$, pentru orice $x \in D$.

Exemple

1. Funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}^*$, este impară, întrucât:
   1) pentru $x \in \mathbb{R}^*$ avem $-x \in \mathbb{R}^*$ și
   2) $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 + 3$, este pară, fiindcă
   $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
3. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, nu este nici pară, nici impară, deoarece $f(-x) = ax^2 - bx + c$ și se va găsi o astfel de valoare x_0 încât
   $f(-x_0) \neq \pm f(x_0)$ (de exemplu, $x_0 = -\frac{b}{2a}$).
4. Funcția definită prin formula $y = \sqrt{x+2}$ nu-i nici pară, nici impară fiindcă $x = 9$ aparține, iar $-x = -9$ nu aparține domeniului ei de definiție (domeniul de definiție nu este simetric în raport cu originea coordonatelor).

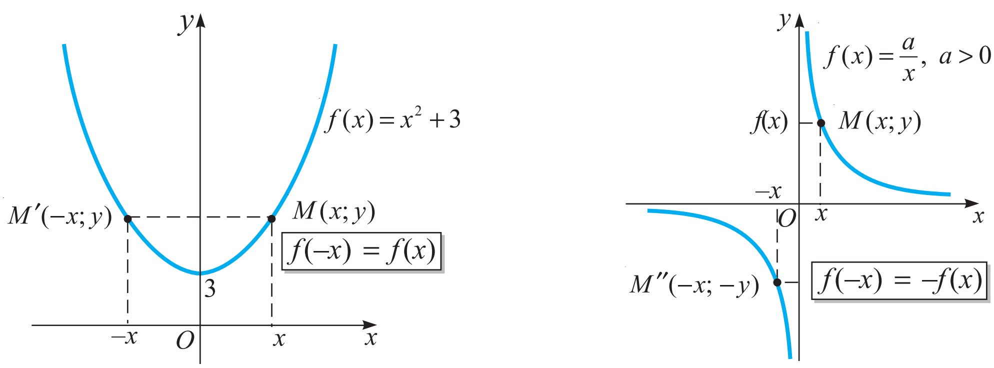
Este important să cunoaștem interpretarea geometrică a parității funcției.

Teorema 3

Graficul funcției pare este simetric față de axa Oy, iar graficul funcției impare este simetric față de originea $O(0; 0)$ a sistemului de axe ortogonale.

Demonstrație:

În baza definiției, punctele $M(x, y)$, $M'(-x, y)$ (simetrice față de axa Oy) concomitent aparțin sau nu aparțin graficului funcției pare f, deoarece $y = f(x) = f(-x)$ (fig. 6.4 a)), iar punctele $M(x; y)$, $M''(-x; -y)$ (simetrice față de originea $O(0; 0)$) concomitent aparțin sau nu aparțin graficului funcției impare f, deoarece $y = f(-x) = -f(x)$ (fig. 6.4 b)). ▶



a) Graficul unei funcții pare b) Graficul unei funcții impare

Fig. 6.4

Exercițiu rezolvat

Să se studieze paritatea funcției:

a) $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$; b) $f: [-4; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Rezolvare:

a) $D(f) = \mathbb{R}$. Deoarece $f(-1) \neq f(1)$, $f(-1) \neq -f(1)$, condiția 2) din definiție nu se respectă, deci funcția f nu este nici pară, nici impară.

b) $D(f) = [-4; +\infty)$. Constatăm că nu se respectă condiția 1) din definiție. De exemplu, pentru $x = 5 \in D(f)$, $-x = -5 \notin D(f)$. Deci, funcția f nu este nici pară, nici impară.

Rețineți!

1. Este suficient să studiem comportarea funcțiilor pare, impare doar pe porțiunea domeniului de definiție conținută pe semiaxa pozitivă Ox.
2. Orice funcție $f: D \to \mathbb{R}$ al cărei domeniu de definiție $(D(f) = D)$ este simetric față de originea O poate fi reprezentată sub forma $f = h_1 + h_2$, unde h_1 este o funcție pară, iar h_2 este o funcție impară.

Într-adevăr, acestea sunt funcțiile:

$$h_1, h_2: D(f) \to \mathbb{R}, \ h_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \ h_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Exercițiu

Demonstrați că h_1 este o funcție pară, iar h_2 este o funcție impară.

2.5. Periodicitatea funcției

Valorile funcției al cărei grafic este reprezentat în figura 6.5 se repetă la creșterea argumentului cu 1:
$f(x) = f(x+1) = f(x+2) = \ldots = f(x+n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

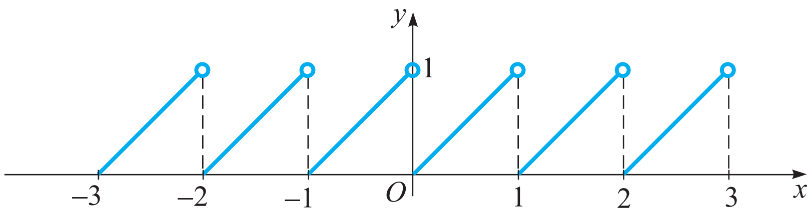


Fig. 6.5

Despre comportarea acestei funcții pe $\mathbb{R}$ ne putem da seama știind comportarea ei pe un interval de lungimea 1, de exemplu, pe $[0, 1)$.

Definiție

Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ se numește **periodică** dacă există un astfel de număr real T, $T \neq 0$, numit **perioada funcției**, încât:
1) pentru $x \in D$ avem $(x \pm T) \in D$; 2) $f(x \pm T) = f(x)$ pentru orice $x \in D$.

Exercițiu

Arătați că numerele kT, $k \in \mathbb{Z}^*$, de asemenea, sunt perioade ale unei funcții periodice cu perioada T.

Exemplu

Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to [0, 1)$, $f(x) = \{x\}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x. Orice număr întreg nenul T este perioadă a acestei funcții, întrucât $\{x+T\} = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$.
Într-adevăr, în baza proprietăților funcției [ ], obținem:
$f(x+T) = \{x+T\} = x + T - [x+T] = x + T - ([x] + T) = x - [x] = \{x\} = f(x)$.
Graficul acestei funcții este reprezentat în figura 6.5.

Una dintre problemele majore pentru funcțiile periodice este determinarea perioadei minime pozitive T_0, numită ***perioada principală***, deoarece, cunoscând valorile funcției pe un interval $[a, a+T_0)$ de lungime T_0, se vor cunoaşte valorile în orice alte puncte din mulțimea $D(f)$.

Într-adevăr, pentru orice $x \in D(f)$ există $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x + k \cdot T_0 \in [a, a+T_0)$ şi $f(x) = f(x + k \cdot T_0)$.

Exemple

1. Perioada principală a funcției $f: \mathbb{R} \to [0, 1)$, $f(x) = \{x\}$, este $T_0 = 1$.
   Într-adevăr, orice T, $0 < T < 1$, nu este perioadă a acestei funcții, deoarece există x, $0 < x < 1$, astfel încât $0 < x + T < 1$, $x < x + T$. Deci, în baza monotoniei, $f(x) < f(x+T)$.
2. Funcția $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, nu are perioadă principală: orice $T > 0$ este perioadă a ei.

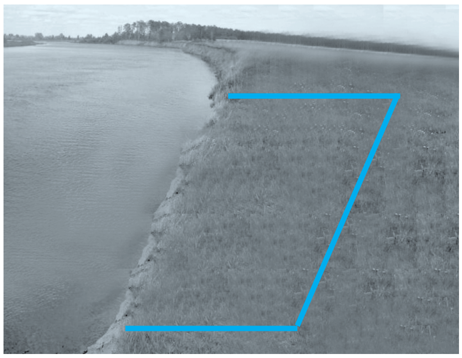
Rețineți!

1. E suficient să studiem comportarea funcției periodice doar pe un interval din $D(x)$ de lungimea perioadei.
2. Dacă funcția f este strict monotonă pe un interval infinit (nemărginit), atunci ea nu este periodică.

2.6. Extremele funcției

Problemă

Un fermier a obținut dreptul de a-şi marca un lot experimental de formă dreptunghiulară, mărginit dintr-o parte de un canal rectiliniu de irigare. Dimensiunile lotului sunt limitate de lungimea p a frânghiei cu care el trebuie să marcheze lotul din trei părți. Este firesc că fermierul vrea să marcheze un lot de arie maximum posibilă. Prietenii îi dau sfaturi contradictorii în privința dimensiunilor lotului. Care este soluția?



Rezolvare:

Pentru soluționarea problemei, vom exprima aria $\mathcal{A}$ a lotului prin mărimea x a lungimii laturii paralele cu canalul: $\mathcal{A} = x \cdot \frac{p-x}{2}$, unde $\frac{p-x}{2}$ este lungimea laturii perpendiculare pe canal. Am obținut funcția de gradul II, definită prin formula $\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{p}{2}x$, $x \in (0, p)$, al cărei grafic reprezintă o parabolă cu ramurile orientate în jos (fig. 6.6). Cea mai mare valoare a funcției $\mathcal{A}(x)$ este atinsă în vârful parabolei cu abscisa $x_0 = \frac{p}{2}$. Astfel, funcția $\mathcal{A}(x)$ are maxim local în

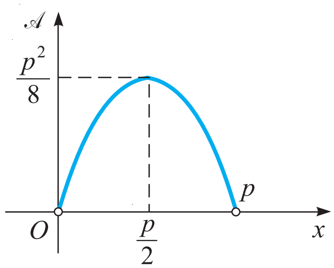


Fig. 6.6

punctul $x_0 = \frac{p}{2}$, $x_0 \in (0, p)$. Prin urmare, lungimea laturii paralele cu canalul este $\frac{p}{2}$, lungimea laturii perpendiculare pe canal este $\frac{p}{4}$, iar valoarea maximă a ariei lotului este $\frac{p^2}{8}$.

Şi analitic se poate arăta că valoarea maximă a ariei lotului se obține pentru $x_0 = \frac{p}{2}$, deoarece pentru orice x, $0 < x < p$, avem $\mathcal{A}(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{8} \le \frac{p^2}{8}$.

Definiție

Se numeşte **ε – vecinătate a punctului** a orice interval deschis de forma

$$V_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon),\quad \varepsilon > 0.$$

Intervalul $(-\infty, +\infty)$ se consideră vecinătate a oricărui punct $a \in \mathbb{R}$.

Definiție

Punctul $a \in A$ se numeşte **punct de maxim** (respectiv **minim**) **local** al funcției $f: A \to B$, dacă există o vecinătate $V_\varepsilon(a)$, astfel încât $f(x) \le f(a)$ (respectiv $f(x) \ge f(a)$), pentru orice $x \in V_\varepsilon(a) \cap A$.

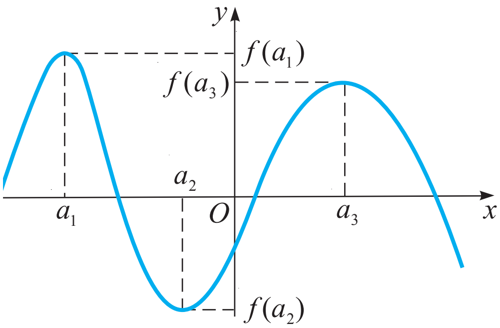


Fig. 6.7

Punctele de maxim (respectiv minim) local ale funcției f se numesc ***puncte de extrem local*** ale ei.

Dacă a este punct de maxim (respectiv minim) local al funcției f, atunci valoarea respectivă $f(a)$ se numeşte ***maxim*** (respectiv ***minim***) ***local*** al acestei funcții. Maximurile şi minimurile locale ale funcției se numesc ***extremele locale*** ale acesteia. În figura 6.7, a_2 este punct de minim local, iar a_1, a_3 sunt puncte de maxim local ale funcției f.

Rețineți!

Funcția strict monotonă pe un interval deschis nu are extreme pe acest interval.

2.7. Inversa unei funcții. Funcții inversabile

Fie funcțiile:

$f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = |x|;\quad f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ f_2(x) = |x|;\ f_3: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f_3(x) = |x| = x.$

S-ar părea că funcțiile f_1, f_2, f_3 se deosebesc puțin, însă ele au proprietăți distincte importante.

Pentru funcția f_1:

a) există $x_1 \ne x_2$, astfel încât $f_1(x_1) = f_1(x_2)$;

b) există elemente din codomeniu care nu au preimagini în $D(f_1)$.

Pentru funcția f_2: orice element din codomeniu are preimagine în $D(f_2)$.

Pentru funcția f_3: orice element din codomeniu are preimagine în $D(f_3)$ şi doar o unică preimagine.

Unele funcții $f: A \to B$ au o proprietate deosebită: fiecărui element $x \in A$, în mod unic, îi corespunde un element $f(x) \in B$ şi invers, fiecărui element $y \in B$ îi corespunde un unic element $x \in A$, astfel încât $f(x) = y$. Aşa funcție este, de exemplu, funcția f_3.

Deci, se poate defini funcția $g: B \to A$:

$$g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y,\ y \in B,\ x \in A. \qquad (1)$$

Astfel, dacă funcția f „trasează căi” de la A la B, atunci funcția g „trasează căi” de la B la A, inverse celor trasate de f. Dacă mulțimile A şi B sunt finite, atunci relația (1) poate fi reprezentată cu ajutorul diagramelor (fig. 6.8).

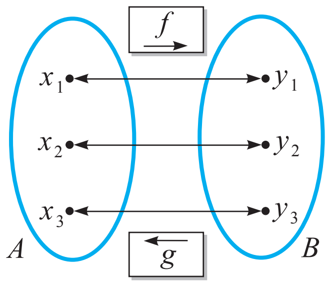


Fig. 6.8

Definiție

Funcția $g: B \to A$ se numeşte **inversa funcției** $f: A \to B$, dacă $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, oricare ar fi $y \in B$, $x \in A$.

Inversa funcției f se notează cu f^{-1}. Funcția f este inversa funcției f^{-1}, deoarece $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$. Funcțiile f şi f^{-1} se numesc ***funcții inverse***. (Nu confundați f^{-1} cu $\frac{1}{f}$!)

Definiție

Funcția care posedă funcție inversă se numeşte **funcție inversabilă**.

De exemplu, funcția care ar pune în evidența corespondența dintre o mulțime de persoane şi numele lor de familie nu este inversabilă (Argumentați!), iar funcția care pune în evidență corespondența dintre o mulțime de persoane şi IDNP-urile lor este inversabilă (Argumentați!).

Examinând compunerea funcțiilor $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ în condițiile (1), obținem:

$$\begin{cases}(f \circ g)(y)=f(g(y))=f(x)=y, \; y \in B; \\ (g \circ f)(x)=g(f(x))=g(y)=x, \; x \in A.\end{cases} \qquad (2)$$

Folosind funcțiile identice ε_A, ε_B ale mulțimilor A şi B, scriem relațiile (2) astfel:

$$f \circ g=\varepsilon_B, \; g \circ f=\varepsilon_A.$$

Din acest motiv, funcția g (notată f^{-1}) este inversă pentru f, respectiv funcția f (notată g^{-1}) este inversă pentru g.

Dacă funcția $f\colon A \to B$ este definită printr-o formulă, atunci inversabilitatea, precum şi inversa ei pot fi determinate, ținând cont de (1), în modul următor:

1) din relația $y=f(x)$, $x \in A$, $y \in B$, variabila x se exprimă prin y şi se obține $x = g(y)$;
2) dacă această relație asigură o exprimare unic determinată a lui x prin y, atunci funcția f este inversabilă;
3) schimbând locurile variabilelor x şi y în formula $x = g(y)$ (pentru a păstra notațiile acceptate), obținem formula $y=g(x)$, care defineşte funcția inversă $g\colon B \to A$ pentru funcția f.

Exercițiu rezolvat

Să se determine inversa funcției $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Rezolvare:

Pentru a determina inversa $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty)$, din egalitatea $y=\sqrt{x-1}$ exprimăm variabila x prin y şi obținem $x=y^2+1$. Variabila x este unic determinată. Schimbând locurile variabilelor x şi y, obținem $y=x^2+1$, adică $f^{-1}(x)=x^2+1$. Prin urmare, inversa funcției f este $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to [1,+\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2+1$.

Rețineți!

Proprietăți ale funcțiilor inverse $f\colon A \to B$ şi $f^{-1}\colon B \to A$

1° Inversa unei funcții (dacă există) este unică.
2° $D(f)=E(f^{-1})=A$, $D(f^{-1})=E(f)=B$.
3° Graficele funcțiilor f şi f^{-1} sunt simetrice față de dreapta de ecuație $y=x$.
4° Ambele funcții f şi f^{-1}, concomitent, sunt strict crescătoare sau strict descrescătoare.

Exemplu

În figura 6.9 sunt reprezentate graficele funcțiilor inverse
$f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x-1}$, şi
$f^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty)$, $f^{-1}(x)=x^2+1$,
simetrice față de dreapta de ecuație $y=x$.

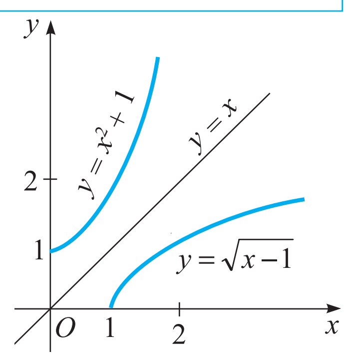


Fig. 6.9

2.8. Funcţii mărginite

Definiţii

- Funcţia $f: A \to B$ se numeşte **mărginită inferior** (respectiv **mărginită superior**) dacă există un astfel de număr real m (respectiv M), numit **minorant** (respectiv **majorant**), încât pentru orice $x \in A$ este adevărată inegalitatea $m \le f(x)$ (respectiv $f(x) \le M$).
- Funcţia mărginită inferior şi superior se numeşte **funcţie mărginită**.

Exerciţiu rezolvat

Să se arate că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, este mărginită inferior, dar nu este mărginită superior.

Rezolvare:

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$. Atunci $f(x) \ge -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, fiindcă $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \ge 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci, funcţia f este mărginită inferior de numărul $m = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Pentru a arăta că funcţia f nu este mărginită superior, examinăm ecuaţia $f(x) = t$ cu parametrul $t \ge m$: $f(x) = t \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = t - m$. Ultima ecuaţie are soluţii, întrucât membrul drept ia valori nenegative (pentru valori oricât de mari ale lui t). Astfel, funcţia f poate lua valori oricât de mari, deci ea nu este mărginită superior.

Exerciţii şi probleme propuse

Profilul real

A_1

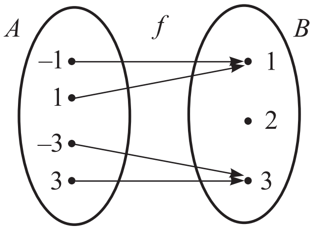
1. Să se determine paritatea şi intervalele de monotonie ale funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 2x - 3$; b) $f(x) = -\frac{5}{x}$; c) $f(x) = |x|$.

2. 1) Să se afle punctele de extrem local şi extremele locale ale funcţiei: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -|x|$.
2) Să se arate că $f(x) = -|x|$ este mărginită superior.

3. Să se determine zerourile funcţiilor din exerciţiile **1** şi **2**.

4. ***Lucraţi în perechi!*** Să se determine domeniul de definiţie al funcţiei:
a) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x+2}$; b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{2-x}$;
c) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$.

5. ***Investigaţi!*** Fie funcţia:



Să se descopere o regulă care asociază fiecărui element din A un element din B şi să se definească funcţia f în mod analitic.

B_1

6. Fie funcţiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$; $g: [-5; 10] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$; $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^3 + 1$;
$f_1: (0; +\infty] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^4 - x^2$; $f_2: (-3; 8] \to \mathbb{N}$, $f_2(x) = -3x^5$.
Să se determine care dintre funcţii sunt pare, care – impare şi care – nici pare, nici impare.

7. 1) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; b) $f(x) = \{x\}$; c) $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$.
2) Să se arate că funcţiile din a) şi b) sunt mărginite.

8. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Să se arate că $(f \circ f \circ f)(x) = 8x + 7$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ este crescătoare și pozitivă pe D $(f(x) > 0,\ x \in D)$. Să se arate că:

a) f^2 este crescătoare pe D; b) $\sqrt{f}$ este crescătoare pe D; c) $\frac{1}{f}$ este descrescătoare pe D.

10. Să se afle extremele locale ale funcției: a) $f: \mathbb{R} \to (0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x^2 - x|$.

11. ***Investigați!*** Care dintre funcțiile $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 4}$, $f_1(x) = [x]$, $f_2(x) = \{x\}$, $f_3(x) = \left\{\frac{1}{2}x\right\}$, $f_4(x) = \{5x\}$, sunt periodice? Să se determine perioadele principale ale funcțiilor periodice.

12. Să se studieze paritatea funcției $f: D \to E$ $(D = D(f))$:

a) $f(x) = x^3 + 2x$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$; c) $f(x) = x^2 + x + 1$.

C_1

13. Să se demonstreze că dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție periodică și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție oarecare, atunci compusa $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcție periodică. Este oare adevărat și pentru funcția $f \circ g$? Să se dea exemple.

14*. Să se reprezinte ca sumă a două funcții, una pară și alta impară, funcția $f: D(f) \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$; b) $f(x) = x - 2$.

15. 1) Să se demonstreze că funcția f este inversabilă și să se determine inversa ei:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$; b) $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

2) Să se arate că funcția din d) nu este mărginită.

16. Fie y timpul, iar x viteza cu care un automobil parcurge o porțiune de autostradă cu lungimea de 300 km. Este variabila y o funcție de variabila x? Să se determine și să se argumenteze monotonia ei.

17. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$, și inversa ei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Să se calculeze $g(2) + g(-1)$.

18. Funcțiile $f, g: D \to \mathbb{R}$ sunt crescătoare pe domeniul D. Să se decidă care dintre funcțiile $f + g$, $f - g$, $f + f$, $-f$, f^3, f^2, $g \circ f$ de la D la $\mathbb{R}$ sunt monotone pe D. Aduceți exemple.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real

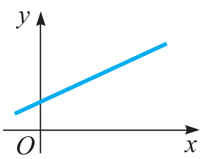
A_1

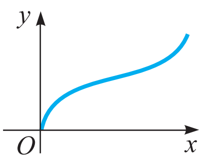
1. Să se afle $D(f)$, $E(f)$ pentru funcția f definită în mod analitic:

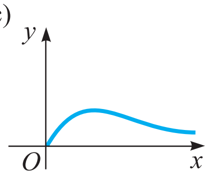
a) $f(x) = 0{,}5x - 3$; b) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$; c) $f(x) = x^2 - 3x$.

2. ***Investigați!*** Pentru funcțiile f din ex. **1** să se determine, eventual utilizând graficele, intervalele (maxim posibile) pe care ele sunt crescătoare, descrescătoare.

3. ***Lucrați în perechi!*** Fie y cantitatea de energie electrică consumată de la începutul anului calendaristic de către o casă de locuit, x – timpul care s-a scurs de la începutul anului. Care dintre graficele de mai jos ar putea reprezenta dependența dintre y și x?

a)


b)


c)


B_1

4. Să se afle intervalele de semn constant ale funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3 - \frac{2-x}{3+x}$; b) $f(x) = 2 - \frac{2+x}{4-x}$; c) $f(x) = 6 - \frac{x-2}{4+x}$.

5. Să se determine extremele locale ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -x^2 + 2x$; b) $f(x) = 3x + x^2$; c) $f(x) = x^2 + 6x$.

6. ***Lucrați în grup!*** Fie funcțiile $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=3-x.$ Să se determine suma, diferența, produsul și compusele $f\circ g,\ g\circ f$ ale acestor funcții.

7. 1) Să se studieze paritatea funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$: a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; b) $f(x)=x^2+x$; c) $f(x)=x^5+2x$.

2) Să se arate că $f(x)=x^2+x$ nu este mărginită superior, dar este mărginită inferior.

8. Două automobile pornesc concomitent dintr-un oraș și continuă mișcarea în aceeași direcție. Distanțele la care se află ele de la clădirea primăriei orașului se calculează conform $S_1=60x+31$ și $S_2=90x+1$ respectiv, x fiind timpul în care ele se află în mișcare. Peste câte ore de la începutul mișcării automobilele se vor afla la aceeași distanță de la primărie?

9. Suma care trebuie întoarsă în funcție de numărul x de zile de la contractarea unui împrumut se calculează conform relației liniare $S=1575-25x$. Peste câte zile împrumutul va fi achitat?

10. Un antreprenor a acordat un credit de 1600 u.m., clientul având obligația să restituie lunar 25 u.m. Determinați funcția f care descrie suma rămasă de achitat după x luni de la contractare și funcția g ce descrie suma rambursată de client după aceste x luni. Care dintre aceste 2 funcții este crescătoare/descrescătoare?

C₁

11. Să se reprezinte sub formă de funcție compusă a două funcții (diferite de cele identice) funcția $\Phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

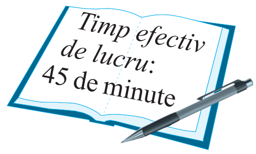
a) $\Phi(x)=(x^7+2)^{\frac{3}{2}}$; b) $\Phi(x)=\dfrac{1}{x^4+3x^2+1}$.

12. Fie A mulțimea triunghiurilor înscrise într-un cerc de raza 5, una dintre laturi fiind diametrul. Funcția $f\colon A\to(0,\,25]$ pune în corespondență fiecărui triunghi aria lui. Să se stabilească dacă f este inversabilă.

13. Să se arate că graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+4x+5$ se află deasupra dreptei $y=1$.

14. ***Lucrați în grup!*** **Proiect STREAM.** *Aplicații ale funcțiilor în operele de artă și arhitectură*

Test sumativ



Profilul real

1. Numiți litera care corespunde variantei corecte.

Domeniul de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}$, este mulțimea

A $(0,\,1)\cup(1,\,2)$. **B** $[0,\,1]$. **C** $[1,\,2)\cup(2,\,+\infty)$. **D** $[1,\,2]$.

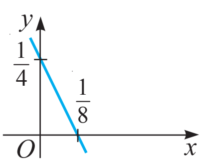
2. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x-1|$, este strict monotonă pe unele dintre intervalele $[1,\,+\infty),\ [0,\,+\infty),\ (-\infty,\,+\infty),\ (-\infty,\,1]$. Să se determine intervalele de monotonie maxim posibile.

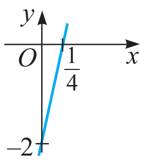
3. a) Determinați care dintre punctele $0,\,-1,\,1,\,-2,\,\dfrac{1}{2}$ sunt puncte de extrem local ale funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x^2+2x|$.

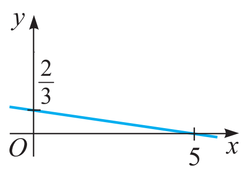
b) Aflați extremele locale respective ale funcției.

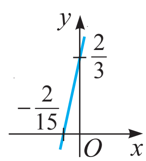
4. Determinați zerourile funcției $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}+4-x$.

5. Determinați care dintre graficele a–d reprezintă graficul funcției $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+\dfrac{1}{4}$:

a)


b)


c)


d)


6. a) Reprezentați funcția $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=2x+4$, ca o compusă a două dintre funcțiile $f_i\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ i=\overline{1,4},\ f_1(x)=2x,\ f_2(x)=x+4,\ f_3(x)=x+5,\ f_4(x)=\sqrt{x}$.

b) Care dintre aceste funcții este impară?

c) Care dintre aceste funcții este mărginită superior/inferior?

MODULUL 7 Funcții elementare. Ecuații. Inecuații. Sisteme. Totalități

Nimic întâmplător nu se întâmplă
în viața noastră neîntâmplătoare...
În ceruri ecuația e simplă?
Dar ce-ncâlceli mai jos – în furnicare!...
Iulian Filip

Obiective

- recunoaşterea funcțiilor, ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților studiate în diverse contexte;
- aplicarea funcțiilor studiate şi a proprietăților acestora în rezolvarea problemelor din diferite domenii;
- clasificarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților după diverse criterii;
- rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților prin metode variate;
- modelarea unor situații cotidiene şi/sau din diverse domenii cu ajutorul funcțiilor, ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor studiate.

§1 Funcția de gradul I. Ecuații de gradul I. Inecuații de gradul I. Sisteme. Totalități

1.1. Funcția de gradul I

Ne amintim

Definiții

- Se numeşte **funcție de gradul I** funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- Numărul a se numeşte **panta** (sau **coeficientul unghiular** al) graficului funcției f.

Investigăm

Utilizând graficul funcției de gradul I (fig. 7.1), formulați proprietățile funcției de gradul I.

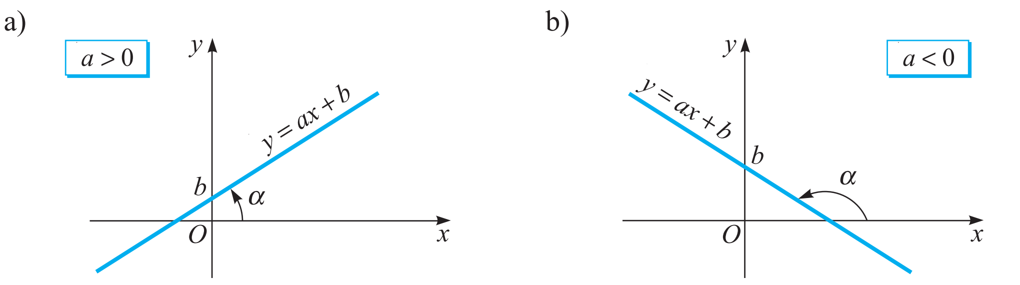


Fig. 7.1

Ne amintim

Definiții

- Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}^*$, se numeşte **proporționalitate directă**.
- Numărul a se numeşte **coeficient de proporționalitate** (sau **panta** graficului funcției f) sau **coeficient unghiular** al graficului funcției f.

Rețineți!

Proporționalitatea directă este un caz particular al funcției de gradul I: $b = 0$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}^*$

$a > 0$	$a < 0$
funcția f este strict crescătoare	funcția f este strict descrescătoare

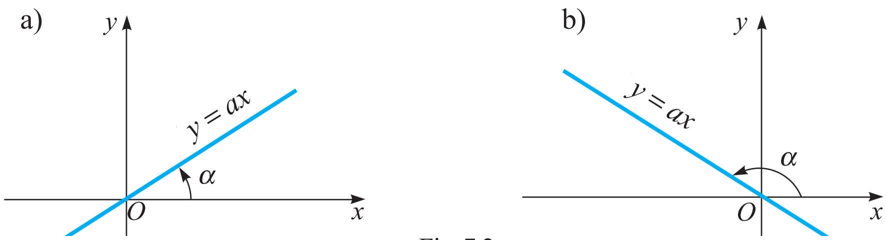


Fig. 7.2

1.2. Ecuații de gradul I. Sisteme. Totalități

Ne amintim

1 Noțiunea de ecuație

Definiție

- Egalitatea de forma $A(x) = B(x)$ se numește **ecuație cu o necunoscută**.
- Se numește **soluție** a ecuației cu o necunoscută valoarea necunoscutei care transformă această ecuație într-o egalitate numerică adevărată.
- Mulțimea valorilor necunoscutei pentru care au sens toate componentele ecuației (pot fi calculate valorile lor) se numește **domeniul valorilor admisibile** (**DVA**) al acestei ecuații.

Mulțimea de numere în care se caută soluțiile unei ecuații, de regulă, se precizează în enunțul problemei (în majoritatea cazurilor această mulțime este DVA).

A rezolva o ecuație înseamnă a găsi toate soluțiile ei (în mulțimea de numere indicată). Vom nota cu S mulțimea soluțiilor ecuației.

Observație

Soluții ale ecuației pot fi numai acele valori ale necunoscutei care aparțin DVA al ecuației.

Menționăm că ecuația nu are soluții dacă DVA al ei este mulțime vidă.

Definiție

Două **ecuații** se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale. Echivalența ecuațiilor $A_1(x) = B_1(x)$ și $A_2(x) = B_2(x)$ se notează cu simbolul „$\Leftrightarrow$” astfel: $A_1(x) = B_1(x) \Leftrightarrow A_2(x) = B_2(x)$.

Rețineți!

Echivalența ecuațiilor, de regulă, se va examina în DVA al ecuației inițiale. În particular, ecuațiile care nu au soluții sunt echivalente (indiferent de DVA).

Definiție

Fie ecuațiile $A_1(x) = B_1(x)$ și $A_2(x) = B_2(x)$. Ecuația a doua $A_2(x) = B_2(x)$ se numește **consecință** a primei ecuații $A_1(x) = B_1(x)$ dacă fiecare soluție a primei ecuații este soluția și a ecuației a doua.

Se notează: $A_1(x) = B_1(x) \Rightarrow A_2(x) = B_2(x)$.

2 Noțiunea de sistem de ecuații

Fie ecuațiile cu două necunoscute $E_1(x, y)=0$, $E_2(x, y)=0$. Se cere să se afle soluțiile lor comune, adică perechile ordonate de valori (a, b) ale necunoscutelor, care satisfac fiecare din ecuațiile date.

În asemenea cazuri se spune că este dat ***un sistem de două ecuații cu două necunoscute***.

Acesta se scrie: $\begin{cases} E_1(x, y)=0, \\ E_2(x, y)=0. \end{cases}$

Tratări similare sunt şi pentru sistemul de trei, patru etc. ecuații cu trei, patru etc. necunoscute. În continuare vom studia şi rezolva diverse tipuri de sisteme de ecuații.

Definiție

Se numeşte **soluție** a sistemului de două (respectiv trei) ecuații cu două (respectiv trei) necunoscute perechea ordonată (a, b) de valori (respectiv tripletul ordonat (a, b, c) de valori) ale necunoscutelor care este soluție a fiecărei ecuații din sistemul dat, cu alte cuvinte, care transformă fiecare ecuație într-o egalitate numerică adevărată.

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a găsi toate soluțiile lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații (notată cu S) este *intersecția* mulțimilor soluțiilor ecuațiilor din sistem.

Un sistem de ecuații se numeşte ***compatibil*** dacă el are cel puțin o soluție. Sistemul care are o mulțime finită de soluții se numeşte ***compatibil determinat***, iar cel care admite o infinitate de soluții se numeşte ***compatibil nedeterminat***.

Un sistem de ecuații care nu are soluții se numeşte ***incompatibil***.

Rezolvarea sistemului de ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile (DVA) al sistemului.

Domeniul de valori admisibile al sistemului de ecuații este *intersecția* domeniilor de valori admisibile ale ecuațiilor sistemului.

Definiție

Două sisteme de ecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

Sistemele incompatibile sunt echivalente.

Rețineți!

Vom enumera unele ***transformări fundamentale care păstrează echivalența sistemelor***. Le vom numi ***transformări echivalente***. Fie o mulțime M (în particular DVA) în care ecuațiile sistemului au sens.

I Schimbând ordinea ecuațiilor unui sistem, obținem un sistem echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

II Înlocuind o ecuație a sistemului printr-o ecuație echivalentă cu aceasta, obținem un sistem echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

III Exprimând într-o ecuație a unui sistem o necunoscută prin celelalte necunoscute şi substituind această expresie în celelalte ecuații ale sistemului, obținem un sistem alcătuit din ecuația inițială şi cele noi formate, care este echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

IV Înlocuind o ecuație a unui sistem cu o ecuație care se obține în urma adunării algebrice (adunării sau scăderii ecuațiilor membru cu membru) a ecuației date cu orice altă ecuație a sistemului, obținem un sistem echivalent cu cel inițial în mulțimea M.

Amintim ***metodele principale de rezolvare a sistemelor de ecuaţii*** studiate în gimnazii:
a) ***metoda substituţiei*** (a se vedea transformarea III);
b) ***metoda reducerii*** (bazată pe transformarea IV);
c) ***metoda utilizării necunoscutei (necunoscutelor) auxiliare***;
d) ***metoda grafică***.

3 Noţiunea de totalitate de ecuaţii (sisteme)

Problemă rezolvată

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $x^2(x-1)(x+2)=0$. (1)

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Un produs de doi sau mai mulţi factori este egal cu zero, dacă cel puţin unul dintre factori este egal cu zero. Prin urmare, obţinem $x^2=0$ sau $x-1=0$, sau $x+2=0$. Aşadar, se pune problema de a afla toate valorile necunoscutei care satisfac cel puţin una din aceste ecuaţii. În cazul dat se spune că avem de rezolvat o totalitate de trei ecuaţii cu o necunoscută. Ea se notează:

$$\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ x-1=0, \\ x+2=0. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Fie ecuaţiile $E_1(x)=0$ şi $E_2(x)=0$. Dacă se cere să se afle toate valorile necunoscutei x care satisfac cel puţin una din aceste ecuaţii, atunci se spune că e dată o ***totalitate de ecuaţii*** şi acest fapt se scrie astfel: $\left[\begin{array}{l} E_1(x)=0 \\ E_2(x)=0 \end{array}\right.$ sau se pune semnul „**;**" între ecuaţii: $E_1(x)=0$**;** $E_2(x)=0$ (ori se scrie „**sau**" între ecuaţii: $E_1(x)=0$ **sau** $E_2(x)=0$).

Notaţii similare se folosesc pentru totalităţi de trei, patru etc. ecuaţii şi pentru totalităţi de sisteme de ecuaţii.

Reţineţi!

Mulţimea soluţiilor unei totalităţi de ecuaţii (***sisteme***) (notată cu S) este *reuniunea* mulţimilor soluţiilor ecuaţiilor (sistemelor) din această totalitate.

Să rezolvăm totalitatea (2) în DVA al ecuaţiei iniţiale: $\left[\begin{array}{l} x^2=0, \\ x-1=0, \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in \text{DVA}, \\ x=1\in \text{DVA}, \\ x=-2\in \text{DVA}. \end{array}\right.$

Atunci $S=\{-2;\ 0;\ 1\}$ este mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1).

Prezentăm încă două ***transformări*** care păstrează echivalenţa ecuaţiilor:

V Ecuaţia $E_1(x)\cdot E_2(x)\cdot\ldots\cdot E_n(x)=0$ este echivalentă în DVA cu totalitatea de ecuaţii $\left[\begin{array}{l} E_1(x)=0, \\ E_2(x)=0, \\ \ldots \\ E_n(x)=0. \end{array}\right.$

VI Ecuaţia $(E_1(x))^2=(E_2(x))^2$ este echivalentă în DVA cu totalitatea de ecuaţii $\left[\begin{array}{l} E_1(x)=E_2(x), \\ E_1(x)=-E_2(x). \end{array}\right.$

Observaţie

Este important să sesizăm că, în cazul în care o ecuaţie se reduce la o totalitate de ecuaţii, mulţimea de soluţii a ecuaţiei date este formată numai din soluţiile totalităţii care aparţin DVA al ecuaţiei iniţiale.

Reţineţi!

În contextul noţiunii *totalitate de sisteme de ecuaţii*, la rezolvarea sistemelor de ecuaţii se aplică şi ***metoda descompunerii în factori***. De exemplu, dacă o ecuaţie a sistemului este echivalentă în DVA al sistemului cu o totalitate de două (respectiv trei etc.) ecuaţii, atunci sistemul dat este echivalent în DVA al lui cu o totalitate de două (respectiv trei etc.) sisteme, care se obţin din cel iniţial prin înlocuirea ecuaţiei respective cu ecuaţiile din totalitate.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}3x-y=2,\\(2x+y)^2=9.\end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases}3x-y=2\\(2x+y)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=2\\\left[\begin{array}{l}2x+y=3\\2x+y=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-y=2\\2x+y=3\end{cases}\\\begin{cases}3x-y=2\\2x+y=-3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1,\\y=1;\end{cases}\\\begin{cases}x=-\dfrac{1}{5},\\y=-\dfrac{13}{5}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\left\{(1;1),\left(-\frac{1}{5};-\frac{13}{5}\right)\right\}.$

4 Ecuații de gradul I. Sisteme, totalități de două ecuații de gradul I

Ne amintim

Definiții

- Ecuația de tipul $ax+b=0,\ a, b\in\mathbb{R}$, se numește **ecuație liniară** (sau **ecuație afină**).
- Dacă $a\neq 0$, ecuația liniară se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.

Sistemul de două ecuații de gradul I cu două necunoscute are forma

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

Soluția sistemului este perechea ordonată de valori (a, b) ale necunoscutelor, care transformă fiecare ecuație a sistemului într-o egalitate numerică adevărată.

Amintim metodele de rezolvare a sistemelor de două ecuații de gradul I cu două necunoscute:
- ✓ metoda substituției;
- ✓ metoda reducerii;
- ✓ metoda grafică.

Rețineți!

Totalitatea de două ecuații de gradul I cu o necunoscută are forma: $\left[\begin{array}{l}a_1x+b_1=0,\\a_2x+b_2=0.\end{array}\right.$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(3x+1)(x-5)=0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Avem $(3x+1)(x-5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+1=0,\\x-5=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{3},\\x=5.\end{array}\right.$ Deci, $S=\left\{-\frac{1}{3};5\right\}$.

Răspuns: $S=\left\{-\frac{1}{3};5\right\}$.

1.3. Ecuații liniare cu parametru

Fie $F(x, a)=0$ o ecuație care conține necunoscutele x și a. Dacă se cere să se rezolve ecuația cu necunoscuta x pentru fiecare valoare a lui a, atunci $F(x, a)=0$ se numește ***ecuație cu necunoscuta x și parametrul a***.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația, unde a este parametru real:

a) $ax=2$; b) $(a^2-9)x=a-3$.

Rezolvare:

a) 1) Dacă $a=0$, atunci obținem ecuația $0\cdot x=2$, care nu are soluții, deci $S=\varnothing$.

2) Dacă $a\neq 0$, atunci obținem ecuația de gradul I $ax=2$, cu soluția $\frac{2}{a}$, deci $S=\left\{\frac{2}{a}\right\}$.

Răspuns: $S=\varnothing$ pentru $a=0$; $S=\left\{\frac{2}{a}\right\}$ pentru $a\in\mathbb{R}^*$.

b) $(a^2-9)x=a-3 \Leftrightarrow (a-3)(a+3)x=a-3.$

1) Dacă $a=3$, atunci obținem ecuația $0\cdot x=0$, deci $S=\mathbb{R}$.

2) Dacă $a=-3$, atunci obținem ecuația $0\cdot x=-6$, deci $S=\varnothing$.

3) Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm3\}$, atunci obținem ecuația de gradul I $(a-3)(a+3)x=a-3$, cu soluția $x=\frac{1}{a+3}$, deci $S=\left\{\frac{1}{a+3}\right\}$.

Răspuns: $S=\mathbb{R}$ pentru $a=3$; $S=\varnothing$ pentru $a=-3$; $S=\left\{\frac{1}{a+3}\right\}$ pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm3\}$.

1.4. Inecuații de gradul I cu o necunoscută. Sisteme. Totalități

1.4.1. Noțiuni generale

Ne amintim

1 Noțiunea de inecuație

Definiție

Inecuație cu o necunoscută se numește inegalitatea ce conține o necunoscută.

Forma generală a unei inecuații (aici și în continuare cu o necunoscută) este $f(x)>g(x)$ sau $f(x)<g(x)$, sau $f(x)\ge g(x)$, sau $f(x)\le g(x)$, unde $f(x)$, $g(x)$ sunt expresii matematice.

Definiții

- Mulțimea valorilor necunoscutei pentru care au sens (există) toate componentele inecuației se numește **domeniul valorilor admisibile (DVA)** al acestei inecuații.
- Numărul a se numește **soluție a inecuației cu o necunoscută** dacă el transformă inecuația într-o inegalitate numerică adevărată (într-o propoziție adevărată).

Rețineți!

A rezolva o inecuație cu o necunoscută înseamnă a determina toate soluțiile ei. Vom nota cu S mulțimea soluțiilor inecuației.

Definiție

Două inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Inecuațiile cu o necunoscută care nu au soluții sunt echivalente (indiferent de DVA).

Rețineți!

La rezolvarea inecuațiilor, este util să cunoaștem cele mai importante ***transformări echivalente***:

I $f(x)>g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$;

II $f(x)>g(x)\Leftrightarrow g(x)<f(x)$;

III $f(x)>g(x)\Leftrightarrow af(x)>ag(x)$ pentru $a\in\mathbb{R}$, $a>0$;

IV $f(x)>g(x)\Leftrightarrow af(x)<ag(x)$ pentru $a\in\mathbb{R}$, $a<0$;

V $f(x)>g(x)\Leftrightarrow f^n(x)>g^n(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)}>\sqrt[n]{g(x)}$, $n\ge2$, $n\in\mathbb{N})$ pentru $f(x)\ge0$, $g(x)\ge0$ și n număr natural;

VI $f(x)>g(x)\Leftrightarrow f^n(x)>g^n(x)$ $(\sqrt[n]{f(x)}>\sqrt[n]{g(x)}$, $n\ge2$, $n\in\mathbb{N})$ pentru n număr natural impar.

Afirmații similare sunt adevărate și pentru inecuațiile de tipul
$$f(x)\ge g(x),\ f(x)<g(x),\ f(x)\le g(x).$$

Atenție! Deoarece la rezolvarea inecuațiilor verificarea în cazul unui număr infinit de soluții este practic imposibilă, va fi mai eficient să nu admitem transformări care conduc la obținerea soluțiilor străine sau la pierderea soluțiilor. Prin urmare, transformările efectuate trebuie să fie echivalente.

2 Sisteme de inecuații cu o necunoscută

Să ne amintim ce este un sistem de inecuații cu o necunoscută.

Fie două inecuații $A(x) > 0$ și $B(x) > 0$ cu o necunoscută. Dacă se pune condiția să determinăm mulțimea valorilor necunoscutei x ce satisfac (verifică) *ambele inecuații*, atunci se spune că avem de rezolvat un sistem de două inecuații cu o necunoscută.

Sistemul respectiv se notează: $\begin{cases} A(x) > 0, \\ B(x) > 0. \end{cases}$ (1)

Observații

1. Fiecare inecuație a sistemului (1) poate avea unul din semnele: „≥”, „≤”, „<”.

2. Sistemul de inecuații poate să conțină două sau mai multe inecuații.

Definiție

Orice valoare a necunoscutei care satisface (verifică) *toate* inecuațiile sistemului se numește **soluție** a sistemului de inecuații cu o necunoscută.

Rețineți!

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații cu o necunoscută (notată cu S) este *intersecția* mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem.

Definiție

Două sisteme de inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Sistemele de inecuații care nu au soluții sunt echivalente.

Observație

Sistemele echivalente de inecuații ce se rezolvă pe o mulțime se numesc ***echivalente în această mulțime***.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ 1-5x > 0. \end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ 1-5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -3, \\ 5x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1{,}5, \\ x < \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-1{,}5; \frac{1}{5}\right).$$

Răspuns: $S = \left[-1{,}5; \frac{1}{5}\right)$.

3 Totalități de inecuații cu o necunoscută

Fie două inecuații $A(x) < 0$ și $B(x) < 0$ cu o necunoscută. Dacă se pune problema de a determina mulțimea valorilor necunoscutei, astfel încât fiecare valoare a necunoscutei să fie soluție *cel puțin a uneia dintre inecuații*, atunci se spune că avem de rezolvat o totalitate de două inecuații cu o necunoscută.

Totalitatea respectivă se notează: $\left[\begin{array}{l} A(x) < 0, \\ B(x) < 0. \end{array}\right.$ (2)

Observații

1. Fiecare inecuație a totalității (2) poate avea unul din semnele: „≥”, „>”, „≤”.

2. Totalitatea de inecuații poate să conțină două sau mai multe inecuații.

Definiție

Orice valoare a necunoscutei care verifică *cel puțin* o inecuație a totalității se numește **soluție** a totalității de inecuații cu o necunoscută.

Rețineți!

A rezolva o totalitate de inecuații înseamnă a afla mulțimea soluțiilor ei.

Mulțimea soluțiilor unei totalități de inecuații cu o necunoscută (notată cu S) este ***reuniunea*** mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestei totalități.

Definiție

Două totalități de inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale (indiferent de DVA).

Totalitățile care nu au soluții sunt echivalente (indeferent de DVA).

1.4.2. Inecuații, sisteme, totalități de inecuații de gradul I cu o necunoscută

Ne amintim

Definiție

Inecuațiile de tipul $ax+b<0,\ ax+b\le 0,\ ax+b>0,\ ax+b\ge 0,\quad a\ne 0,\ a,b\in\mathbb{R}$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

De regulă, inecuațiile de gradul I se rezolvă prin efectuarea unor transformări echivalente.

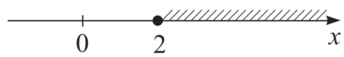
Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $3x-6\ge 0$.

Rezolvare:

$3x-6\ge 0 \Leftrightarrow 3x\ge 6 \Leftrightarrow x\ge 2.$

Grafic, mulțimea soluțiilor se reprezintă astfel:



Răspuns: $S=[2,+\infty)$.

Rețineți!

1. Mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută este intersecția mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem.

2. Mulțimea soluțiilor unei totalități de inecuații de gradul I cu o necunoscută este reuniunea mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestei totalități.

1.4.3. Inecuații de gradul I cu o necunoscută cu modul

Vom examina unele metode de rezolvare a inecuațiilor de gradul I ce conțin necunoscute în modul:

1 Inecuația de tipul $|\boldsymbol{f(x)}|\le \boldsymbol{g(x)}$ în DVA este echivalentă cu inecuația dublă $-\boldsymbol{g(x)}\le \boldsymbol{f(x)}\le \boldsymbol{g(x)}$, adică cu sistemul $\begin{cases}\boldsymbol{f(x)}\ge -\boldsymbol{g(x)},\\ \boldsymbol{f(x)}\le \boldsymbol{g(x)}.\end{cases}$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $|2x-1|\le 0{,}5$.

Rezolvare:

$$|2x-1|\le 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}5\le 2x-1\le 0{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1\ge -0{,}5,\\ 2x-1\le 0{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge 0{,}5,\\ 2x\le 1{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0{,}25,\\ x\le 0{,}75.\end{cases}$$

Deci, $x\in[0{,}25;\ 0{,}75]$.

Răspuns: $S=[0{,}25;\ 0{,}75]$.

Rețineți!

Similar se rezolvă inecuația de tipul $|\boldsymbol{f(x)}|<\boldsymbol{g(x)}$.

2 Inecuația de tipul $|\boldsymbol{f(x)}|\ge \boldsymbol{g(x)}$ în DVA este echivalentă cu totalitatea $\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{f(x)}\ge \boldsymbol{g(x)},\\ \boldsymbol{f(x)}\le -\boldsymbol{g(x)}.\end{array}\right.$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $|3-x|\ge 5$.

Rezolvare:

$$|3-x|\ge 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-x\ge 5,\\ 3-x\le -5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ x\ge 8\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[8,+\infty).$$

Răspuns: $S=(-\infty,-2]\cup[8,+\infty)$.

Rețineți!

Similar se rezolvă inecuația de tipul $|\boldsymbol{f(x)}|>\boldsymbol{g(x)}$.

3 Inecuația de tipul $|f(x)| \le |g(x)|$ în DVA este echivalentă cu inecuația $f^2(x) \le g^2(x)$.

Exemplu: $|x-2| \le |2x+1| \Leftrightarrow (x-2)^2 \le (2x+1)^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \le 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2+8x-3 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Exerciții și probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Determinați panta graficului și reprezentați grafic funcția:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x+10$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 3-x$;
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -5x$; d) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = 1{,}5$.

2. ***Investigați!*** Stabiliți tipul unghiului format de direcția pozitivă a axei Ox și graficul funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 6x+1$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 1-3x$;
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -2{,}3x$; d) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = 5$.

3. ***Lucrați în perechi!*** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 1-2x$; b) $f(x) = 1{,}5x+6$.
1) Aflați zeroul funcției *f*.
2) Trasați graficul funcției *f*.
3) Utilizând graficul, determinați valorile lui *x* pentru care:
a) $f(x) > 0$; b) $f(x) \le 0$.
4) Determinați tipul unghiului format de G_f cu direcția pozitiva a axei Ox.
5) Determinați dacă funcția este strict crescătoare.

4. Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $g(x) = 3{,}5x$; b) $g(x) = -\frac{2}{3}x$.
1) Aflați zeroul funcției *g*.
2) Trasați graficul funcției *g*.
3) Utilizând graficul, determinați valorile lui *x* pentru care:
a) $g(x) > 0$; b) $g(x) < 0$.
4) Determinați tipul unghiului format de G_g cu direcția pozitivă a axei Ox.
5) Determinați dacă funcția *g* este strict descrescătoare.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $3{,}5(x-2) = 7$; b) $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$; c) $-\frac{3}{4} + 6x = 3(x-1)$.

6. ***Lucrați în perechi!*** Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, prin trei metode, sistemul de ecuații:

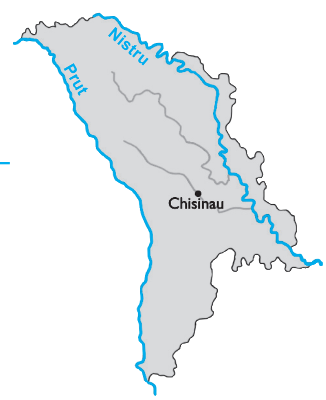
a) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ -3x + 2y = -4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -0{,}5x + 2y = 2, \\ 3x - y = -1. \end{cases}$

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $9(x-2) - 3(2x+1) > 5x$; b) $4(2x-1) - 3(3x+2) > 0$.

8. ***Lucrați în perechi!*** Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 12 - x,\ g(x) = -2{,}5x + 6$.
a) Să se afle zerourile funcțiilor *f* și *g*.
b) Să se determine intervalele pe care $f(x) \ge 0$; $f(x) < 0$; $g(x) \le 0$; $g(x) > 0$.
c) Să se afle coordonatele punctului de intersecție a G_f și G_g.
d) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x) < g(x)$.
e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

B

9. Se știe că lungimea râului Prut este cu 399 km mai mică decât lungimea râului Nistru.
a) Care este lungimea fiecărui râu, dacă suma lungimilor lor este de 2305 km?
b) Ce porțiune din râurile Prut și Nistru traversează teritoriul Republicii Moldova? (Utilizați harta geografică.)



10. Să se determine zerourile funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = (x+5)(1-2x)$; c) $f(x) = (2-x)(x+4)(\sqrt{3}+x)$.

11. Populația unei culturi bacteriologice (în momentul de timp $t = 0$) este de 2 400 de indivizi.
Peste 5 h 30 min., numărul lor a crescut până la 22 200 de indivizi.
a) Să se exprime numărul de indivizi în funcție de timp (măsurat în ore).
b) Să se afle peste câte ore numărul de indivizi va deveni egal cu 56400.

12. ***Lucrați în perechi!*** Să se transpună în limbaj matematic, apoi să se rezolve problema:
a) cu ajutorul ecuației; b) prin sistem de ecuații.
1) Suma a două numere reale este 44. Să se afle numerele, dacă unul este cu 10 mai mare decât celălalt.
2) Diferența a două numere reale este 45. Să se afle numerele, dacă unul este de 10 ori mai mic decât celălalt.
3) În două depozite sunt 520 t de mere. Dacă s-ar muta 60 t dintr-un depozit în celălalt, cantitățile din cele două depozite ar fi egale. Ce cantitate de mere se află în fiecare depozit?

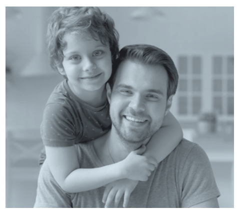
13. La o parcare sunt motociclete (cu două roți) și autoturisme. În total sunt 48 de unități și 168 de roți. Câte motociclete și câte autoturisme sunt la parcare?
Să se rezolve problema:
a) prin metoda falsei ipoteze;
b) cu ajutorul ecuației;
c) prin compunerea unui sistem de ecuații.

14. Suma de 2760 de lei este plătită în bancnote de 20 de lei și 50 de lei. Să se afle câte bancnote de fiecare fel sunt, dacă se știe că numărul celor de 50 de lei este egal cu dublul celor de 20 de lei.

15. Tatăl are 33 de ani, iar fiica 9 ani. Peste câți ani tatăl va avea triplul vârstei fiicei?

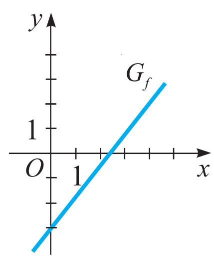
16. Să se traseze graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, dacă:
a) $a = 3,\ b = -1$; b) $a = -2{,}5,\ b = 2$; c) $a = \frac{1}{4},\ b = 0$;
d) $a = 0,\ b = -5$; e) $a = -3,\ b = -2$; f) $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{5}$.

17. Să se completeze cu un număr real, astfel încât graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \boxed{}\,x + 2$; b) $f(x) = -\boxed{} \cdot x - \sqrt{2}$;
c) $f(x) = \boxed{} \cdot x$; d) $f(x) = -\boxed{} \cdot x$
să formeze cu direcția pozitivă a axei Ox:
1) un unghi ascuțit; 2) un unghi obtuz.



18. Sergiu are 7 ani, iar tatăl lui are 39 de ani. Să se afle câți ani vârsta lui Sergiu va rămâne mai mică decât $\frac{2}{3}$ din vârsta tatălui.

19. ***Investigați!*** Să se afle valorile lui x, $x \in \mathbb{R}$, pentru care există triunghiuri cu laturile de lungimea $3x+1, x+3, 4x-2$.



20. (BAC 2016) În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Utilizând desenul, scrieți unul dintre semnele $<, >$ sau $=$, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată: $\frac{b}{a} \bigcirc 0$.

21. (BAC 2022) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -6x + 2$. Dedeterminați valorile reale ale lui x pentru care $f(x) > f(3)$.

C

22. Să se rezolve prin trei metode problema:

a) 25 de muncitori au primit pentru o zi de lucru 6500 de lei. Unii sunt plătiți cu 200 de lei pe zi, iar ceilalți – de 1,5 ori mai mult. Câți muncitori au primit câte 200 de lei?

b) Un bazin de 35,7 hl poate fi umplut de două robinete în 7 ore. Debitul (pe oră) al unui robinet este cu 90 *l* mai mare decât al celuilalt. Care este debitul fiecărui robinet?

23. Să se indice într-un sistem de coordonate mulțimea punctelor:

1) ale căror abscise satisfac inecuația: a) $-3<x<2$; b) $-1\le x<6$;

2) ale căror ordonate satisfac inecuația: a) $-1<y<2$; b) $3<y\le 5$.

Profilul real

A₁

1. Fie funcțiile definite prin formulele:

$f(x)=2x+1,\ f_1(x)=2-x,\ f_2(x)=0{,}5+\sqrt{2}x,\ f_3(x)=-\sqrt{5},\ f_4(x)=1{,}5x,\ f_5(x)=10,\ f_6(x)=-3x.$

a) Să se determine funcțiile crescătoare pe $\mathbb{R}$. b) Să se determine funcțiile descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Să se determine funcția de gradul I, știind că:

a) $f(2)=1$ și $f(0)=-2$; b) $f(-1)=4$ și $f(1)=0$; c) $f(\sqrt{3})=1-\sqrt{2}$ și $f(2)=2$.

3. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x+2$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-2x$.

a) Să se afle coordonatele punctului de intersecție al graficelor G_f și G_g.

b) Să se afle valorile lui x pentru care $f(x)\le g(x)$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $x(x-2)(2x+1)(2x-1)=0$.

5. ***Investigați!*** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+5,\ g(x)=1-2x$.

a) Să se demonstreze că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar g – strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Să se determine valorile lui x pentru care graficul G_f este situat mai sus decât graficul G_g.

B₁

6. ***Lucrați în perechi!*** Să se rezolve problema: a) cu ajutorul ecuației; b) prin compunerea unui sistem de ecuații. Distanța dintre două stații este de 650 km. Un tren accelerat parcurge această distanță cu 12 ore mai repede decât un marfar, deoarece viteza acestuia este cu 24 km/h mai mare decât a marfarului. Să se afle viteza fiecărui tren.

7. Să se afle numerele reale x și y dacă se știe că $3x-2y=-5$ și $x+3y=2$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases}3x-1>0,\\5-x\le 2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}-2x+3>5,\\0{,}5x-1<1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3(x-2)\ge 9,\\1{,}4x-28<0.\end{cases}$

9. ***Lucrați în grup!*** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x-3y-8=0,\\4x+y-2=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-3y=7,\\3x+2y=-9;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2-x+\sqrt{3}y=0,\\3x-\sqrt{3}y=\sqrt{3}.\end{cases}$

C₁

10. Un aliaj din cupru și cositor cu masa de 12 kg conține 45 % de cupru. Câte kilograme de cositor trebuie adăugat la acest aliaj pentru a obține unul ce conține 40 % de cupru?

11. Avem două categorii de oțel: cu 5 % de nichel și cu 40 % de nichel. Ce cantitate de oțel de fiecare din aceste categorii trebuie să luăm astfel încât, fiind retopite, să obținem 140 t de oțel ce conține 30 % de nichel?

12*. ***Investigați!*** Pentru care valori ale parametrului real a sistemul de ecuații: $\begin{cases}x+(2a-1)y=2a,\\(2a+1)x+(a^2+2)y=2(a^2+a+1)\end{cases}$

a) este compatibil nedeterminat; b) este compatibil determinat; c) este incompatibil?

§2 Funcția de gradul II. Ecuații de gradul II. Inecuații de gradul II. Sisteme. Totalități

2.1. Funcția de gradul II

Ne amintim

Definiție

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **funcție de gradul II**.

Investigăm

Utilizând graficul funcției de gradul II (fig. 7.3) determinați proprietățile ei.

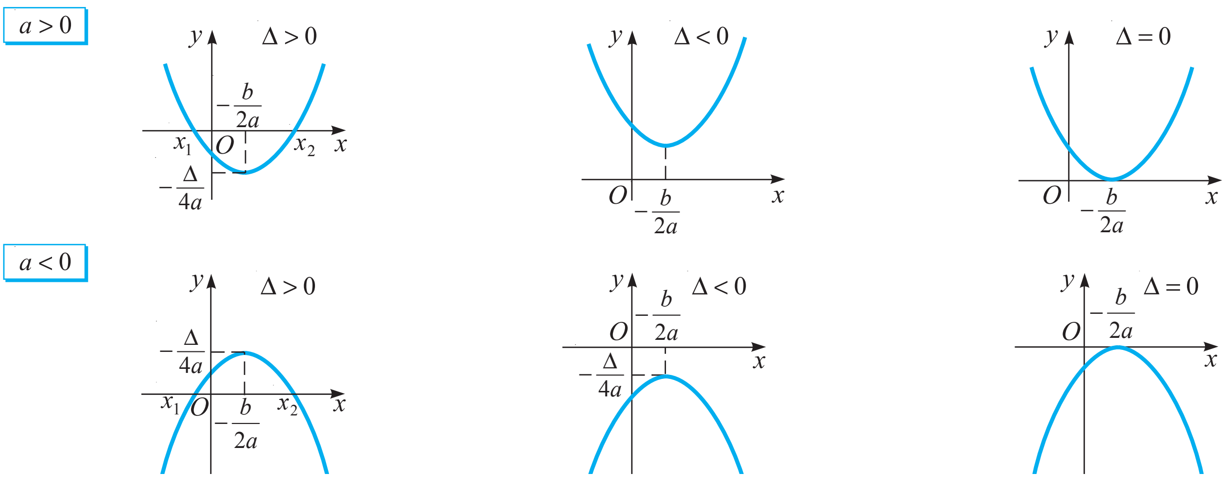


Fig. 7.3

2.2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

Ne amintim

Definiție

Ecuația de tipul $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul II**, iar a, b, c se numesc **coeficienții** ei.

Menționăm că soluțiile ecuației de gradul II sunt abscisele punctelor de intersecție cu axa Ox a graficului funcției de gradul II, asociate acestei ecuații.

Existența soluțiilor reale ale ecuației de gradul II, precum și numărul lor depind de valoarea discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$ al acestei ecuații.

1) Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale. Prin urmare, $S = \varnothing$.

2) Dacă $\Delta = 0$, mulțimea soluțiilor conține un unic element: $x = -\frac{b}{2a}$. Deci, $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

3) Dacă $\Delta > 0$, mulțimea soluțiilor ecuației conține două elemente: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Astfel, $S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Împărțind ambii membri ai ecuației de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la a, obținem ***ecuația de gradul II, forma redusă***: $x^2 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Teorema 1 **(teorema lui Viète)**

Dacă $x_1,\ x_2$ sunt soluțiile ecuației
$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0, \qquad (1)$$
atunci $$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Dacă $x_1,\ x_2$ sunt soluțiile ecuației
$$x^2+px+q=0, \qquad (3)$$
atunci $$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (4)$$

Teorema 2 **(reciproca teoremei lui Viète)**

Dacă numerele reale $x_1,\ x_2$ verifică relațiile (2), atunci $x_1,\ x_2$ sunt soluțiile ecuației (1).

Dacă numerele reale $x_1,\ x_2$ verifică relațiile (4), atunci $x_1,\ x_2$ sunt soluțiile ecuației (3).

2.3. Ecuații de gradul II cu parametru

Fie $F(x,\ a)=0$ ecuație de gradul II care conține necunoscutele x şi a. Dacă se pune problema de a rezolva ecuația cu necunoscuta x pentru fiecare valoare a lui a, atunci $F(x,\ a)=0$ se numeşte ***ecuație de gradul II cu necunoscuta x şi parametrul a***.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ şi să se discute după valorile parametrului $a,\ a\in\mathbb{R}$, ecuația:
$$(a-1)x^2-2(2a-1)x+4a+3=0.$$

Rezolvare:

1) Analizăm situația când coeficientul lui x^2 ia valoarea zero, deoarece în acest caz ecuația inițială se transformă într-o ecuație de gradul I. Avem $a=1$.

Pentru $a=1$ obținem: $-2x+7=0\Leftrightarrow x=3{,}5$.

2) Pentru $a\neq 1$ determinăm valorile lui a, astfel încât discriminantul ecuației să ia valoarea zero: $\Delta=4(2a-1)^2-4(a-1)(4a+3)=-12a+16=0\Leftrightarrow a=1\frac{1}{3}$.

Dacă $a>1\frac{1}{3}$, atunci $\Delta<0$ şi ecuația nu are soluții reale.

Dacă $a<1\frac{1}{3}$ şi $a\neq 1$, atunci $\Delta>0$ şi ecuația are soluțiile:
$$x_1=\frac{(2a-1)-\sqrt{4-3a}}{a-1},\quad x_2=\frac{(2a-1)+\sqrt{4-3a}}{a-1}.$$

Răspuns: $S=\{3{,}5\}$ pentru $a=1$;

$S=\varnothing$ pentru $a\in\left(1\frac{1}{3},+\infty\right)$;

$S=\left\{\dfrac{2a-1-\sqrt{4-3a}}{a-1};\ \dfrac{2a-1+\sqrt{4-3a}}{a-1}\right\}$ pentru $a\in(-\infty,\ 1)\cup\left(1,\ 1\frac{1}{3}\right)$;

$S=\{5\}$ pentru $a=1\frac{1}{3}$.

2.4. Interpretarea geometrică a unor ecuații de gradul II cu două necunoscute

Geometric, mulțimea soluțiilor unei ecuații cu două necunoscute reprezintă o mulțime de puncte într-un plan dotat cu un sistem de axe ortogonale. Forma figurii respective depinde de gradul ecuației şi de structura ei. Cele mai simple ecuații de gradul II cu două necunoscute şi figurile determinate de ele sunt reprezentate în figura 7.4.

Cu ajutorul ecuațiilor acestor figuri pot fi rezolvate diferite probleme.

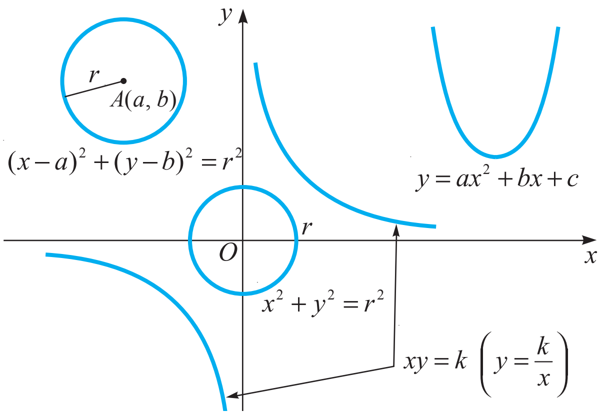


Fig. 7.4

Probleme rezolvate

1. O porțiune de drum se află pe dreapta $y=-4x+3$. O porțiune de cale ferată are forma hiperbolei $y=\frac{3}{x}$. Dacă drumul va fi construit (prelungit) rectiliniu în continuare, va intersecta el oare calea ferată?

Rezolvare:

Problema se reduce la determinarea punctelor de intersecție a dreptei şi hiperbolei respective. La rândul său, aceasta se reduce la stabilirea compatibilității sistemului de ecuații: $\begin{cases} y=-4x+3, \\ y=\frac{3}{x}. \end{cases}$ Prin substituția lui y, în ecuația a doua obținem sistemul $\begin{cases} y=-4x+3, \\ -4x+3=\frac{3}{x}. \end{cases}$

Aşa cum ecuația a doua nu are soluții reale (Verificați!), rezultă că şi sistemul nu are soluții. Deci, drumul prelungit rectiliniu nu va intersecta calea ferată.

2. Să se determine raza şi centrul cercului tangent la axele de coordonate şi la ramura hiperbolei $y=\frac{4}{x}$ din cadranul I (fig. 7.5).

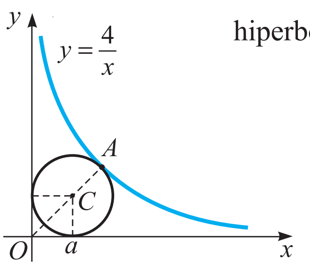


Fig. 7.5

Rezolvare:

Din considerente de simetrie, este clar că centrul cercului se va afla pe dreapta de ecuație $y=x$, deci coordonatele lui vor fi (a, a). Această dreaptă intersectează hiperbola în punctul A, ale cărui coordonate sunt soluție a sistemului: $\begin{cases} y=x, \\ y=\frac{4}{x}. \end{cases}$

Obținem $A_1(-2;-2)$, $A(2;2)$. Observăm că $A_1(-2;-2)$ nu satisface condiția problemei. Centrul C al cercului va satisface condiția: $AC=a$, deci $\sqrt{(a-2)^2+(a-2)^2}=a$, $|a|<2$. Obținem $a=4-2\sqrt{2}$. Astfel, centrul cercului este $C(4-2\sqrt{2}; 4-2\sqrt{2})$, iar raza lui este $r=4-2\sqrt{2}$.

2.5. Ecuații cu o necunoscută ce conțin necunoscuta în modul

Vom expune unele metode de rezolvare a ecuațiilor ce conțin necunoscuta în modul.

1 Aplicarea definiției modulului

Exemplu. $|x-2|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=5, \\ x-2\geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-5, \\ x-2<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Răspuns: $S=\{-3;\ 7\}$.

2 Folosirea relației $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

Exemplu. $|x+3|=|2x-1| \Leftrightarrow (x+3)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{2}{3}, \\ x=4. \end{array}\right.$

Răspuns: $S=\left\{-\frac{2}{3},\ 4\right\}$.

3 Aplicarea relației $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right.$

Exemplu. $|x^2-x|=|4+2x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=4+2x, \\ x^2-x=-4-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0, \\ x^2+x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4. \end{array}\right.$

Răspuns: $S=\{-1;\ 4\}$.

4 Utilizarea necunoscutei auxiliare

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2-|x|-1=0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Fie $|x|=t,\ t\geq 0$. Deoarece $x^2=|x|^2$, obținem ecuația $2t^2-t-1=0$, cu soluțiile $t_1=1,\ t_2=-\frac{1}{2}$. Revenim la necunoscuta x și obținem: $\left[\begin{array}{l} |x|=1, \\ |x|=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Răspuns: $S=\{-1;\ 1\}$.

5 Aplicarea metodei explicitării modulilor

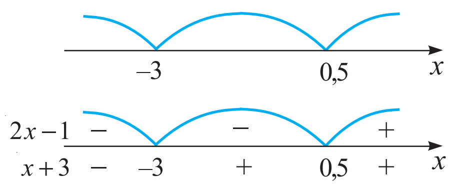
Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|2x-1|-3|x+3|=2x$.

Rezolvare:

1) Determinăm DVA: $x\in\mathbb{R}$.

2) Aflăm zerourile expresiilor din module: $2x-1=0 \Leftrightarrow x=0{,}5;\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

3) Zerourile obținute divizează axa numerelor (în caz general, DVA al ecuației inițiale) în intervalele $(-\infty,-3)$, $[-3,\ 0{,}5)$, $[0{,}5,\ +\infty)$:



4) Explicităm modulii pe fiecare interval:

5) Rezolvăm ecuația pe fiecare interval, luând în considerare rezultatul explicitării modulelor pe intervalul respectiv.

Astfel, examinăm trei cazuri.

a) Pentru $x\in(-\infty,-3)$ avem $2x-1<0,\ x+3\leq 0$. Deci, $|2x-1|=-(2x-1)$, $|x+3|=-(x+3)$ și obținem:

$$-(2x-1)+3(x+3)=2x \Leftrightarrow -x+10=0 \Leftrightarrow x=10\notin(-\infty,-3).$$

Așadar, $x=10$ nu este soluție a ecuației inițiale.

b) Pentru $x \in \left[-3, \frac{1}{2}\right)$ avem $2x - 1 \le 0$, $x + 3 \ge 0$ şi obținem:

$$-(2x-1) - 3(x+3) = 2x \Leftrightarrow -7x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7} \in \left[-3, \frac{1}{2}\right).$$

Prin urmare, $x = -\frac{8}{7}$ este o soluție a ecuației inițiale.

c) Pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ avem $2x - 1 \ge 0$, $x + 3 > 0$ şi obținem:

$$2x - 1 - 3(x+3) = 2x \Leftrightarrow x = -\frac{10}{3} \notin \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Deci, $x = -\frac{10}{3}$ nu este soluție a ecuației inițiale.

6) Răspunsul reprezintă reuniunea mulțimilor soluțiilor obținute în fiecare caz.

Răspuns: $S = \left\{-\frac{8}{7}\right\}$.

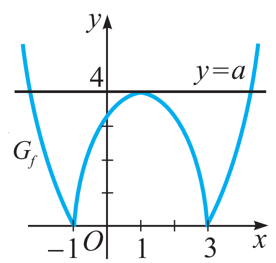


Fig. 7.6

6 Metoda grafică

Exemplu

Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuația $|x^2 - 2x - 3| = a$ are exact trei soluții reale.

Rezolvare:

Trasăm graficele funcțiilor determinate de formulele $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ şi $g(x) = a$ (fig. 7.6). Observăm că doar pentru $a = 4$ sunt trei puncte comune ale graficelor. Astfel, pentru $a = 4$ ecuația inițială are exact trei soluții reale.

Răspuns: $a = 4$.

2.6. Inecuații de gradul II cu o necunoscută

Problemă rezolvată

Înălțimea h la care ajunge o minge aruncată vertical în sus se calculează conform formulei $h(t) = -5t^2 + 12t + 2$, unde h se măsoară în metri, iar t este timpul (măsurat în secunde), considerat din momentul aruncării. Câte secunde se va afla mingea la înălțimea nu mai mică de 6 m?

Rezolvare:

Pentru a răspunde la întrebare, trebuie să aflăm intervalul de timp pentru care $h(t) \ge 6$. Astfel, rezolvăm inecuația $-5t^2 + 12t + 2 \ge 6$ sau inecuația $5t^2 - 12t + 4 \le 0$. Obținem $t \in [0{,}4;\ 2]$. (Verificați!) Atunci, mărimea intervalului de timp este $2 - 0{,}4 = 1{,}6$ (secunde).

Răspuns: 1,6 secunde.

Ne amintim

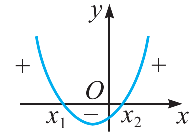
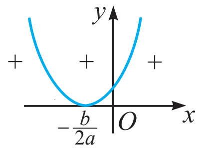
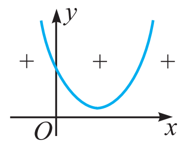
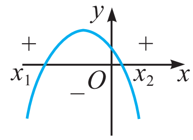
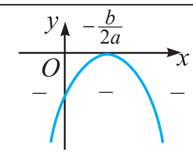
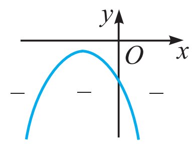
Definiție

Inecuațiile de tipul $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \ge 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \le 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$, se numesc **inecuații de gradul II cu o necunoscută**.

Vom analiza două metode de rezolvare a acestor inecuații.

1 Aplicarea studiului funcției

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$. În tabel sunt prezentate mulțimile soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c > 0$, $a \ne 0$, în funcție de semnul coeficientului a şi al discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$, unde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $(\Delta \ge 0)$ sunt soluții ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, şi $x_1 \le x_2$.

Valorile lui a	Valorile lui Δ	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$	Semnul funcției definite prin $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$
$a>0$	$\Delta>0$	$S=(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$	
	$\Delta=0$	$S=\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$	
	$\Delta<0$	$S=(-\infty,\ +\infty)$	
$a<0$	$\Delta>0$	$S=(x_1,\ x_2)$	
	$\Delta=0$	$S=\varnothing$	
	$\Delta<0$	$S=\varnothing$	

Rețineți!

Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0,$ se obține prin reuniunea mulțimii soluțiilor ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$ și mulțimii soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c>0$. De exemplu, mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c\geq 0$ pentru $a>0$, $\Delta>0$ este $S=(-\infty,\ x_1]\cup[x_2,\ +\infty)$.

În mod analog obținem mulțimile soluțiilor celorlalte inecuații de gradul II.

Ne amintim

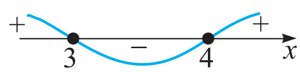
2 Aplicarea metodei intervalelor

Vom explica aplicarea metodei intervalelor (studiate în clasa a IX-a) la rezolvarea în $\mathbb{R}$ a inecuației $x^2-7x+12\leq 0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Soluțiile ecuației de gradul II $x^2-7x+12=0$ sunt $x_1=3,\ x_2=4$. Descompunem expresia $x^2-7x+12$ în factori: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Prin urmare, am obținut inecuația $(x-3)(x-4)\leq 0$, echivalentă cu cea inițială.

Aplicând metoda intervalelor, construim „curba semnelor”:



Prin urmare, $x\in[3,\ 4]$.

Răspuns: $S=[3,\ 4]$.

2.7. Inecuații de gradul II ce conțin necunoscuta în modul

Vom examina unele metode de rezolvare a inecuațiilor de gradul II ce conțin necunoscuta în modul.

1 Inecuația de tipul $|f(x)| \le g(x)$ este echivalentă în DVA cu inecuația dublă $-g(x) \le f(x) \le g(x)$, adică cu sistemul $\begin{cases} f(x) \ge -g(x), \\ f(x) \le g(x). \end{cases}$

Exemplu

DVA: $x \in \mathbb{R}$. $|3x^2-5| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le 3x^2-5 \le 4 \Leftrightarrow 1 \le 3x^2 \le 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 \ge 1, \\ 3x^2 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge \frac{1}{3}, \\ x^2 \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right), \\ x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right].$$

Similar se rezolvă inecuația pentru semnul „<”.

2 Inecuația de tipul $|f(x)| \ge g(x)$ în DVA este echivalentă cu totalitatea $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array}\right.$

Exemplu

$$|2-x^2| \ge 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x^2 \ge 3, \\ 2-x^2 \le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 \le -1, \\ x^2 \ge 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 \ge 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty).$$

Similar se rezolvă inecuația pentru semnul „>”.

3 Utilizarea necunoscutei auxiliare

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $(x-1)^2 - 4|x-1| + 3 \le 0$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. $(x-1)^2 = |x-1|^2$. Fie $|x-1| = t$, $t \ge 0$.

Atunci obținem inecuația $t^2 - 4t + 3 \le 0$, cu soluțiile $t \in [1, 3]$, sau $1 \le t \le 3$.

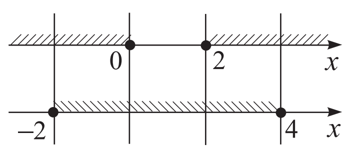
Revenim la necunoscuta x şi obținem: $1 \le |x-1| \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| \ge 1, \\ |x-1| \le 3. \end{cases}$

Rezolvăm prima inecuație a sistemului:

$$|x-1| \ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \ge 1, \\ x-1 \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

Pentru inecuația a doua avem:

$|x-1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le x-1 \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4 \Leftrightarrow x \in [-2, 4]$.



Aşadar, soluțiile sistemului, deci şi ale inecuației inițiale, sunt: $x \in [-2, 0] \cup [2, 4]$.

Răspuns: $S = [-2, 0] \cup [2, 4]$.

4 Metoda explicitării modulilor. Algoritmul de aplicare a acestei metode este similar cu cel aplicat la rezolvarea ecuațiilor ce conțin necunoscuta în modul.

2.8. Sisteme omogene de ecuații

Definiții

- Polinomul $P(X, Y, ..., U, V)$ de gradul n în nedeterminatele $X, Y, ..., U, V$ se numește **polinom omogen** dacă pentru orice sistem de valori numerice $(x, y, ..., u, v)$ ale nedeterminatelor și orice valoare numerică fixată $\lambda \in \mathbb{R}^*$ are loc identitatea:

$$P(\lambda x, \lambda y, ..., \lambda u, \lambda v) = \lambda^n P(x, y, ..., u, v).$$

- Ecuația algebrică $P(x, y, ..., u, v) = 0$ se numește **ecuație omogenă** de gradul n dacă polinomul $P(X, Y, ..., U, V)$ este un polinom omogen de gradul n.
- Sistemul de două ecuații cu două necunoscute de forma:

$$\begin{cases} a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = c, \\ b_0x^n + b_1x^{n-1}y + b_2x^{n-2}y^2 + ... + b_{n-1}xy^{n-1} + b_ny^n = d, \end{cases}$$

$a_0, a_1, ..., a_n, b_0, b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, se numește **sistem omogen** de gradul n (fiecare dintre membrii stângi ai ambelor ecuații ale sistemului reprezintă polinoame omogene de gradul n).

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 + 4xy - y^2 = -2, \\ x^2 - 3xy = 4. \end{cases}$

Rezolvare:

Acest sistem este omogen de gradul doi.

DVA: $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Înmulțim prima ecuație cu 2, apoi adunăm ecuațiile și obținem sistemul $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy = 4, \end{cases}$ echivalent cu cel inițial, dar care conține o ecuație omogenă. Împărțim prima ecuație la x^2 ($x \neq 0$, deoarece dacă $x = 0$ sistemul nu are soluții) și obținem ecuația de gradul II în necunoscuta $\frac{y}{x}$: $3 + 5\left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$, cu soluțiile $\frac{y}{x} = 3$ și $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$.

Rezolvarea sistemului inițial se reduce la rezolvarea totalității de sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x, \\ x^2 - 3xy = 4. \end{cases}$$

Primul sistem nu are soluții. (Verificați!)

Sistemul al doilea are soluțiile: $(-2\sqrt{0,4};\ \sqrt{0,4})$; $(2\sqrt{0,4};\ -\sqrt{0,4})$. (Verificați!)

Răspuns: $S = \{(-2\sqrt{0,4};\ \sqrt{0,4});\ (2\sqrt{0,4};\ -\sqrt{0,4})\}$.

Observație

Dacă perechea ordonată $(a; b)$ este soluție a unui sistem de ecuații omogene de gradul al doilea, atunci și perechea $(-a; -b)$ este soluție a acestui sistem.

2.9. Sisteme simetrice de ecuații

Definiție

Ecuația cu două necunoscute x și y se numește **simetrică** dacă, înlocuind x cu y și y cu x, ecuația nu se modifică.

De exemplu, ecuațiile $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 5$ și $x + y - 3 = 0$ sunt simetrice.

Definiție

Sistemul format din ecuații simetrice se numește **sistem de ecuații simetrice**.

Observație

Deoarece ecuațiile cu două necunoscute ale unui sistem simetric nu se modifică la înlocuirea lui y cu x și a lui x cu y, rezultă că, dacă $(a; b)$ este soluție a sistemului simetric, atunci $(b; a)$, de asemenea, este o soluție a acestui sistem.

Sistemul simetric cu două necunoscute poate fi rezolvat prin metoda utilizării necunoscutelor auxiliare.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x^2-xy+y^2=-2, \\ x+y+2xy=1. \end{cases}$

Rezolvare:

Acest sistem este simetric. Fie $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$ Obținem sistemul $\begin{cases} u^2-3v=-2, \\ u+2v=1. \end{cases}$

Substituind $u=1-2v$ în prima ecuație, obținem ecuația $(1-2v)^2-3v+2=0$, cu soluțiile $v_1=1,\ v_2=\frac{3}{4}$. Atunci $u_1=-1,\ u_2=-\frac{1}{2}$.

Rezolvarea sistemului inițial se reduce la rezolvarea totalității de două sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ xy=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-\frac{1}{2}, \\ xy=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Ambele sisteme sunt incompatibile în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; deci sistemul inițial nu are soluții.

Răspuns: $S=\varnothing$.

Observație

Rezolvarea sistemelor omogene de ecuații și a sistemelor simetrice de ecuații se reduce, de regulă, la rezolvarea totalităților de sisteme.

2.10. Ecuații raționale

Expresia de forma $\frac{P}{Q}$, unde P, Q sunt polinoame, $\operatorname{grad} Q \geq 1$, se numește ***fracție rațională***.

Definiție

- Ecuația $E_1(x)=E_2(x)$, unde $E_1(X)$, $E_2(X)$ sunt polinoame de o nedeterminată, se numește **ecuație algebrică** cu o necunoscută.
- Ecuația $F_1(x)=F_2(x)$, unde expresiile $F_1(X)$, $F_2(X)$ sunt sume de fracții raționale sau una dintre ele este algebrică și alta rațională, se numește **ecuație rațională**.

Rețineți!

Algoritmul de rezolvare a acestui tip de ecuații este următorul:

① se determină DVA al ecuației;

② se trec toți termenii în partea stângă a ecuației;

③ se scrie partea stângă sub forma $\frac{A}{B}$;

④ se obține $\frac{A}{B}=0$.

⑤ se rezolvă în DVA ecuația $A=0$;

⑥ se scrie mulțimea soluțiilor.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$. Avem $\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$.

Aducem partea stângă la același numitor: $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}=0$.

Obținem ecuația $x^2-2x-3=0$, cu soluțiile $x_1=3,\ x_2=-1$.

Valoarea 3 nu aparține DVA, deci ea nu este soluție a ecuației inițiale.

Răspuns: $S=\{-1\}$.

2.11. Inecuații raționale. Metoda intervalelor de rezolvare a inecuațiilor cu o necunoscută

Definiție

Inecuațiile de tipul $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, unde $P(X)$, $Q(X)$ sunt polinoame în nedeterminata X, $\operatorname{grad} Q(X) \geq 1$, se numesc **inecuații raționale**.

Inecuațiile raționale pot fi rezolvate prin diferite metode.

1 Considerarea semnului câtului $\frac{P(x)}{Q(x)}$

De exemplu, pentru inecuația $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ avem de rezolvat o totalitate de două sisteme de inecuții:

$$\begin{cases} P(x) > 0, \\ Q(x) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} P(x) < 0, \\ Q(x) < 0. \end{cases}$$

2 Considerarea echivalențelor de tipul:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0; \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

3 O metodă eficientă de rezolvare a inecuațiilor raționale este **metoda intervalelor**.

Fie funcția f definită prin formula $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$, unde, de exemplu, $a < b < c < d$ și $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dacă $x > d$, atunci fiecare dintre factorii $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$ este pozitiv, deci pe intervalul $(d, +\infty)$ avem $f(x) > 0$. Dacă $c < x < d$, atunci $x-d < 0$, iar ceilalți factori sunt pozitivi. Rezultă că $f(x) < 0$ pe intervalul (c, d). În mod analog, determinăm că pe intervalul (b, c) $f(x) > 0$ (fig. 7.6). Se spune că în punctul c *funcția* f *își schimbă semnul*.

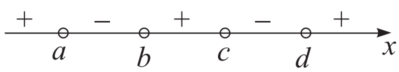


Fig. 7.6

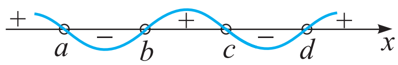


Fig. 7.7

Similar avem pentru punctele a, b, d (fig. 7.6).

Schimbarea semnului funcției f poate fi reprezentată grafic prin „curba semnelor” (fig. 7.7), care se construiește de la dreapta spre stânga, începând cu intervalul din dreapta.

Reprezentarea din figura 7.7 se interpretează astfel: pe intervalele unde este adevărată inegalitatea $f(x) > 0$ „curba semnelor” e situată mai sus de axa numerelor, iar pe intervalele unde avem $f(x) < 0$ „curba semnelor” este situată mai jos de axa numerelor.

Aceste raționamente nu depind de numărul de factori de gradul întâi ce apar la numărător și numitor, nici de amplasarea reciprocă a zerourilor numărătorului și numitorului. De aceea, aceste raționamente sunt adevărate și pentru funcția f definită prin formula

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_m)}, \qquad (1)$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sunt numere reale distincte. Pentru această funcție, de asemenea, se va construi „curba semnelor”.

Observație

La aplicarea metodei intervalelor este important să ținem cont de următoarele: numai în cazul în care funcția este de tipul (1), adică toți coeficienții necunoscutei x sunt egali cu 1 și toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ sunt distincte, „curba semnelor” se construiește începând cu intervalul din dreapta, situându-se deasupra axei numerelor. În celelalte cazuri, semnul funcției pe fiecare interval se va determina prin „valori de control”, substituite în formula ce definește funcția inițială.

❍ Reţineţi!

La rezolvarea inecuaţiilor raţionale prin metoda intervalelor vom proceda conform următorului ***algoritm***:

① prin transformări echivalente, aducem inecuaţia iniţială la o inecuaţie cu membrul drept egal cu 0, al cărei membru stâng, de regulă, este o expresie de tipul (1);

② determinăm funcţia f şi aflăm zerourile numărătorului;

③ determinăm valorile în care funcţia f nu este definită (zerourile numitorului);

④ zerourile numărătorului şi numitorului divizează axa numerelor (în caz general, DVA al inecuaţiei iniţiale) în intervale;

⑤ construim „curba semnelor”;

⑥ selectăm intervalele corespunzătoare semnului funcţiei f;

⑦ scriem răspunsul.

În mod analog se aplică metoda intervalelor şi la rezolvarea inecuaţiilor de tipul $(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)>0$ (sau „<”, sau „≥”, sau „≤”), unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale diferite două câte două. Algoritmul de rezolvare este similar cu cel precedent.

În cazul în care în (1) unele din numerele $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m$ sunt egale, adică (1) ia forma $f(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}...(x-c_t)^{k_t}$, $k_1, k_2, ..., k_t \in \mathbb{Z}^*$, la construirea „curbei semnelor” aplicăm următoarea regulă:

- dacă k_i, $i \in \{1, 2, ..., t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, este număr întreg par, atunci la „trecerea peste zeroul c_i” semnul funcţiei f nu se schimbă;
- dacă k_i, $i \in \{1, 2, ..., t \mid t \in \mathbb{N}^*\}$, este număr întreg impar, atunci la „trecerea peste zeroul c_i” semnul funcţiei f se schimbă în opus.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $\dfrac{x(3-x)(x+4)^4}{x^2-5x+6} \ge 0.$

Rezolvare:

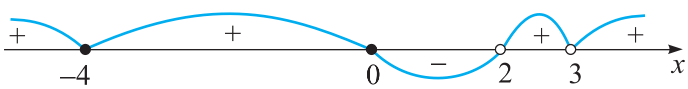
DVA: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

Transformăm membrul stâng al inecuaţiei şi obţinem $\dfrac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)} \le 0.$ Fie funcţia f definită prin formula $f(x)=\dfrac{x(x-3)(x+4)^4}{(x-2)(x-3)}$. Prin urmare, trebuie să aflăm valorile lui x pentru care $f(x) \le 0$.

Zerourile numărătorului sunt 0, 3, –4, iar ale numitorului sunt 2 şi 3.

Conchidem că în 0 şi 2 funcţia f îşi schimbă semnul, iar în –4 şi 3 semnul (funcţiei f) rămâne neschimbat.

„Curba semnelor” este următoarea:



Deci, $f(x) \le 0$ pentru $x \in [0, 2) \cup \{-4\}$.

Răspuns: $S=\{-4\} \cup [0, 2)$.

❍ Generalizăm

Factorii în (1) pot fi de forma $a_i x + b_i$, $i \in \mathbb{N}$, şi/sau $a_j x^2 + b_j x + c_j$, unde discriminantul ecuaţiei asociate trinomului este negativ.

Exerciții și probleme propuse

Profilurile umanist, arte, sport

A

1. Să se traseze graficul și să se determine proprietățile funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x)=x^2+1$; b) $f(x)=3x^2-1$; c) $f(x)=-x^2-7x-12$; d) $f(x)=3x^2+2x-5$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x^2-4x-21=0$; b) $25z^2+10z-3=0$; c) $t^2-4t-5=0$; d) $x^2+2x-9=0$.

3. Să se afle suma și produsul soluțiilor ecuației fără a o rezolva:
a) $x^2+10x+20=0$; b) $x^2-16x+63=0$; c) $z^2+0{,}6z-1{,}2=0$; d) $2t^2-3t-6=0$.

4. ***Investigați!*** Să se determine semnele soluțiilor ecuației fără a o rezolva:
a) $t^2-18t+17=0$; b) $3x^2-x-2=0$; c) $2z^2+z+0{,}5=0$; d) $3x^2+x-2=0$.

5. Fie ecuația $2x^2-x-1=0$ și x_1, x_2 soluțiile ei. Să se calculeze, fără a rezolva ecuația, valoarea expresiei.
a) $x_1^2+x_2^2$; b) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

B

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $x^2-5x+6>0$; b) $3x^2-x+1\le 0$; c) $-2x^2-x+4\le 0$; d) $2x+7>2x^2+8x+11$.

7. ***Lucrați în perechi!*** Să se determine intervalele în care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ia valori pozitive (respectiv negative):
a) $f(x)=3x^2-4x+1$; b) $f(x)=-2x^2-4x+\dfrac{5}{2}$; c) $f(x)=x^2+3x$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații: a) $\begin{cases}x-y=0,\\x^2+y^2=10;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+y=1,\\x^2-y^2=-1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+y=2,\\2x+y^2=7;\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-2y=-1,\\x^2+4xy=0.\end{cases}$

9. Fie funcțiile: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+x-4$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$.
a) Să se traseze în același sistem de coordonate graficele G_f și G_g.
b) Să se determine proprietățile funcției f și funcției g.
c) Să se determine pentru care valori ale lui x este adevărată inegalitatea $f(x)\ge g(x)$.

10. ***Lucrați în perechi!*** Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6x+5$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+5$. Să se arate că graficele celor două funcții au puncte comune.

11. Traiectoria unei mingi poate fi modelată prin ecuația $y=-3x^2-6x+5$. Să se afle înălțimea cea mai mare la care ajunge mingea în zbor.

12. (BAC 2024, pretestare) Determinați valorile reale ale lui a, pentru care ecuația $x^2+(1-a)x-a-6=0$ are două soluții reale x_1 și x_2, care verifică relația $x_1^2+x_2^2+x_1x_2=19$.

13. Catetele unui tringhi dreptunghic au lugimile de $x+1$ și $2x-1$. Să se afle perimetrul triunghiului, dacă ipotenuza lui are lungimea de $x-4$.

14. Perimetrul unui triunghi dreptunghic este de 84 cm, iar ipotenuza lui este de 37 cm. Să se afle aria triunghiului.

15. Un lot de pământ de formă dreptunghiulară cu aria de $2\,080\ \text{m}^2$ a fost împrejmuit cu un gard de lungimea 184 m. Să se afle lungimea și lățimea lotului.

16. O barcă cu motor a parcurs 46 km pe un râu, în direcția curentului de apă, și 10 km pe un lac în 1 h 30 min. Să se determine viteza bărcii, dacă viteza apei este de 5 km/h.

17. Una din laturile unui dreptunghi este cu 7 cm mai mare decât cealaltă. Care poate fi lungimea acestei laturi, dacă aria dreptunghiului este mai mică decât $60\ \text{cm}^2$?

18. Să se determine mulțimea $A=\{t\in\mathbb{Z}\mid 2t^2-5t-3=0\}$.

19. (BAC 2023) Determinați valorile reale ale lui a, pentru care ecuația $x^2+ax+3-a=0$ are două soluții reale distincte și pozitive.

20. (BAC 2024) Determinați cea mai mică valoare întreagă a lui a, pentru care una dintre soluțiile ecuației $x^2-(2a-6)x+9-6a=0$ aparține intervalului $(1,+\infty)$.

C

21. Un fermier vrea să îngrădească un ocol pentru animale de forma unui trapez isoscel. Laturile neparalelele ale trapezului au lungimea de 10 m, iar baza mare este de 1,5 ori mai lungă decât baza mică. Ce lungime trebuie să aibă baza mică pentru ca lungimea gardului să fie mai mare de 50 m?

22. (BAC 2022) Determinați cea mai mică valoare întreagă a lui a, pentru care ecuația $x^2+(a-8)x+a^2+16=0$ are două soluții reale distincte.

23. (BAC 2023) Fie fucția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+(p-1)x+q^2+2.$ Determinați valorile reale ale lui p și q, pentru care punctul $A\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$ este vârful parabolei, ce reprezintă graficul funcției f.

Profilul real

A₁

1. Să se traseze graficul și să se determine proprietățile funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ dacă:
a) $f(x)=x^2-5;$ b) $f(x)=3x^2+1;$ c) $f(x)=-x^2+7x+12;$ d) $f(x)=3x^2+2x-5.$

2. ***Lucrați în perechi!*** Parabola $y=3x^2$ a fost deplasată cu 3 unități de-a lungul axei Ox și cu 2 unități de-a lungul axei Oy.
a) Să se determine funcția g, al cărei grafic este parabola obținută în urma acestor transformări.
b) Câte funcții pot fi determinate?
c) Să se traseze graficul pentru fiecare funcție obținută.

3. O navă cosmică este lansată cu viteza inițială de 100 m/s. Dependența dintre distanța h parcursă de navă și timpul t este (la etapa inițială $t\in[0, 11]$) descrisă de funcția definită prin formula $h(t)=100t-4{,}9t^2$. Ce distanță a parcurs nava în primele 10 secunde?

4. Să se determine lungimile laturilor unui dreptunghi de arie maximă, dacă perimetrul lui este de 20 cm.

B₁

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $|x^2-5x+4|=2;$ b) $|x(x-3)|=4.$

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $x^2-3|x|-4\le 0;$ b) $|x|\cdot|x-1|\ge 20;$ c) $|x-1|\cdot|x-2|<6.$

7. Să se scrie ecuația cercului de centru $A(4, 5)$, tangent la dreapta $y=2x+3$.

8. O minge aruncată în sus cu viteza inițială de 72 m/s se va afla peste t secunde la înălțimea $h(t)=72t-4{,}9t^2$ (de la suprafața pământului).
a) Să se afle înălțimea la care se va afla mingea peste 5 s. b) Peste câte secunde mingea va cădea pe pământ?

9. ***Lucrați în perechi!*** Să se determine domeniul de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6};$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-|x|};$
c) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{9-x^2};$ d) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}-\sqrt{x^2-3x-4}.$

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{5}{2};$ b) $\dfrac{x^2+2}{3x-2}-\dfrac{3x-2}{x^2+2}=\dfrac{8}{3}.$

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații: a) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6},\\ 2x-5=y;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y=14,\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12};\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6},\\ x-y=2.\end{cases}$

12. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații: a) $\begin{cases}x^2y^2+xy-72=0,\\ x+y-6=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x+y)^2-2(x+y)=15,\\ x+xy+y=11.\end{cases}$

13. ***Investigați!*** Pentru care valori reale ale lui m sistemul de ecuații $\begin{cases}x^2+y^2=5,\\ x-y=m\end{cases}$
a) are o unică soluție; b) are două soluții; c) este incompatibil?

14. Una din laturile unui dreptunghi este cu 7 cm mai mare decât cealaltă. Care poate fi lungimea acestei laturi, dacă aria dreptunghiului este mai mică de 60 cm^2?

15. *Lucrați în grup!* Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații: a) $\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1, \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$

16. Să se rezolve prin metoda descompunerii în factori sistemul:
a) $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ (x-y)^2=9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-xy=-2, \\ (x+y)^2=16; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |3x-1|-y=0, \\ x+xy=1. \end{cases}$

17. Să se rezolve problema prin compunerea unui sistem de ecuații.
Dintr-un port s-au pornit concomitent două nave: una spre sud, iar cealaltă – spre est, deplasându-se rectiliniu și uniform. Peste două ore, distanța dintre ele era de 60 km. Să se afle viteza fiecărei nave, dacă se știe că viteza primei nave este cu 6 km/h mai mare decât viteza navei a doua.

18. Să se rezolve sistemul prin metoda grafică și apoi să se verifice analitic soluțiile obținute:
a) $\begin{cases} x^2-4x-6y=20, \\ xy=-8; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-8x-4y=6, \\ y^2+5y-5x=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=36, \\ x^2+6y=36. \end{cases}$

19. a) Să se scrie ecuația cercului ce trece prin punctele $A(2;\,0)$, $B(5;\,0)$ și este tangent la axa Oy.
b) Să se afle coordonatele punctelor de intersecție a parabolelor $y=-2x^2-x-6$ și $y=x^2-2$.
c) Să se afle coordonatele punctelor de intersecție a hiperbolei $yx=2$ și cercului $x^2+y^2=4$.

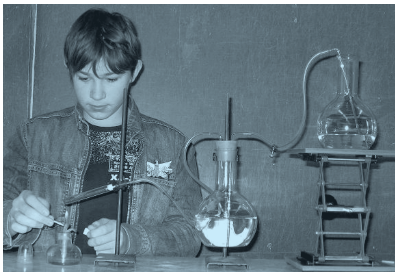
20. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $|x-1|-3|x+4|=x$; b) $\big||2x+1|-2x\big|=3|x+2|$; c) $\dfrac{9}{|3x-1|-8}=|3x-1|$.

21. *Lucrați în grup!* Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $|x^2-9x+18|+x\ge 5$; b) $|2x-3|>|x-5|-3|2-x|$; c) $|x-4|\ge|x+2|$;
d) $\dfrac{|x|\cdot(2-|x-1|)}{(x-1)^3}>0$; e) $|2x^2-x-1|\le 0$; f) $|1-3x|\cdot|x^2-x|>0$.

22. Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul omogen de ecuații:
a) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+xy=0, \\ 2x^2+xy-y^2=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+2y^2=17, \\ x^2-2xy=-3. \end{cases}$

23. *Lucrați în perechi!* Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații simetrice:
a) $\begin{cases} x+y+xy=23, \\ x^2+y^2=34; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy=2, \\ x^2+y^2=12. \end{cases}$
Propuneți câteva metode de rezolvare a sistemului c).

24. Să se rezolve problema prin compunerea unui sistem de ecuații:
a) Două uzine trebuie să producă într-o lună, conform planului, 360 de piese. Prima uzină a îndeplinit planul cu 112 %, iar a doua – cu 110 %. Ambele uzine au produs în total 400 de piese. Câte piese a produs fiecare uzină peste plan?
b) La o uzină, pentru a produce un motor electric de tip A, se folosesc 2 kg de cupru și 1 kg de plumb, iar pentru a produce un motor electric de tip B – 3 kg de cupru și 2 kg de plumb. Câte motoare de fiecare tip au fost produse, dacă s-au folosit în total 130 kg de cupru și 80 kg de plumb?



25. La arderea în exces a oxigenului cu 1,10 g amestec de metanol și etanol se obțin 0,896 *l* de dioxid de carbon (IV), calculat în condiții normale. Să se determine compoziția cantitativă a amestecului în unități de masă.
a) Să se rezolve problema prin compunerea unui sistem de ecuații.
b) Să se rezolve problema cu ajutorul ecuației.

26. Fie sistemul $\begin{cases} xy=4, \\ x^2+y^2=17. \end{cases}$ Să se rezolve acest sistem în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ prin trei metode.

27. Într-o soluție, care conținea 40 g de sare, s-au turnat 200 g de apă și astfel concentrația soluției s-a micșorat cu 10 %. Ce cantitate de apă conținea soluția inițială și care era concentrația ei?

28. (BAC 2024, pretestare) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\dfrac{2}{x-1}\le x$.

C_1

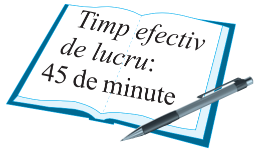
29. Conform graficului nou de circulație a autobuzelor, un autobuz parcurge distanța de 325 km cu 40 min. mai rapid. Să se afle viteza medie cu care se deplasează autobuzul conform noului grafic, dacă se știe că ea este cu 10 km/h mai mare decât viteza medie prevăzută de graficul precedent.

30. Să se determine valorile reale ale lui a, astfel încât inecuația $x^2-(4a+1)x+(a+2)(3a-1)>0$ să fie verificată pentru orice $x<0$.

31*. Să se afle valorile reale ale lui a pentru care inecuația $x+\dfrac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$ nu are soluții pozitive.

32. Fie cercul $x^2+y^2=9$. Să se scrie ecuația cercului care trece prin originea sistemului de axe ortogonale, prin punctul $A(1;\,0)$ și este tangent la cercul inițial.

Test sumativ I



Profilurile umanistic, arte, sport

1. Completați, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$\begin{cases}3x-2y=-3,\\ x^2-xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{}\,,\\ x^2-xy=1.\end{cases}$$

2. Fie ecuația $-3x^2-x+2=0$.
a) Aflați soluțiile reale ale ecuației.
b) Scrieți o ecuație de gradul doi ale cărei soluții sunt opusele soluțiilor ecuației date.

3. Fie funcția $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.
a) Aflați $D(f)$.
b) Determinați pentru care valori reale ale lui x funcția f ia valori nenegative.

4. Un buchet de flori format din 3 lalele și 4 narcise costă 44 de lei, iar un buchet format din 6 lalele și 3 narcise, la același preț, costă 63 de lei.
Cât costă o lalea și cât costă o narcisă?

Profilul real

1. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases}x-y+xy=3,\\ xy^2-x^2y=-2.\end{cases}$

2. Fie funcția $f\colon D\to\mathbb{R},\ \ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-5}+\dfrac{1}{x}$.
a) Aflați $D(f)$.   b) Reprezentați grafic funcția f.

3. Din stațiile A și B, situate la o distanță de 600 km, pornesc concomitent unul spre celălalt două trenuri. Peste 6 ore, distanța dintre ele era de 60 km. Dacă trenul din A ar fi ieșit cu 1 oră 30 min. mai devreme decât cel din B, atunci trenurile s-ar fi întâlnit la mijlocul distanței dintre A și B. Aflați viteza fiecărui tren.

4. Fie sistemul $\begin{cases}\dfrac{x}{x^2-1}\ge 0,\\ -3x^2+\boxed{}<0.\end{cases}$

a) Completați cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor sistemului să fie egală cu mulțimea soluțiilor primei inecuații.
b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul obținut după completare.

§3 Funcția radical. Funcția putere. Ecuații iraționale. Inecuații iraționale

3.1. Funcția radical

Definiție

Se numesc **funcții radical** funcțiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$, și $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g(x) = \sqrt[2n]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplu

$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, și $f_2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f_2(x) = \sqrt[4]{x}$, sunt funcții radical.

Proprietățile principale ale funcției radical

$\boldsymbol{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[2n+1]{x}}$

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° Funcția f are un unic zerou: $x_1 = 0$.
Punctul de intersecție a graficului G_f cu axa Oy este $O(0;\ 0)$.

3° $f(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$;
$f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, 0)$.

4° Funcția f este impară:
$f(-x) = \sqrt[2n+1]{-x} = \sqrt[2n+1]{-1} \cdot \sqrt[2n+1]{x} = -f(x)$.

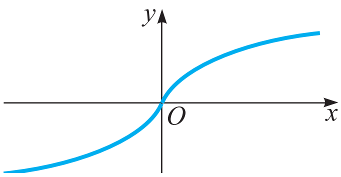
5° Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ (rezultă din proprietatea 7° a radicalilor).

6° Funcția f nu este periodică, deoarece este strict monotonă pe un interval infinit.

7° Funcția f nu are extreme locale, fiindcă este strict monotonă pe un interval infinit.

8° Funcția f este inversabilă. Inversa ei este
$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = x^{2n+1}$.

9° Graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[2n+1]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$:



$\boldsymbol{g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g(x) = \sqrt[2n]{x}}$

1° $D(g) = \mathbb{R}_+$.

2° Funcția g are un unic zerou: $x_1 = 0$.
Punctul de intersecție a graficului G_g cu axa Oy este $O(0;\ 0)$.

3° $g(x) > 0$ pentru $x \in (0, +\infty)$;
funcția g nu are valori negative.

4° Funcția g nu este nici pară, nici impară, deoarece mulțimea $D(g) \subset \mathbb{R}$ nu este simetrică față de O.

5° Funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+$.

6° Funcția g nu este periodică.

7° Funcția g are extreme locale.

8° Funcția g este inversabilă. Inversa ei este
$g^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g^{-1}(x) = x^{2n}$.

9° Graficul funcției $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+\ \ g(x) = \sqrt[2n]{x},\ n \in \mathbb{N}^*$:

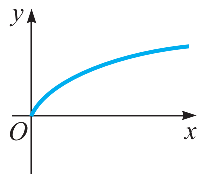


Fig. 7.7

Exercițiu

a) Să se traseze graficele funcțiilor $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^{2n+1}$, și $g_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ g_1(x) = x^{2n}$.

b) Să se compare proprietățile funcțiilor f_1 și g_1 cu proprietățile funcțiilor f și g respectiv.

3.2. Funcția putere cu exponent real

Definiție

Funcția $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$, se numește **funcție putere cu exponent real**.

Proprietățile principale ale funcției putere

1° Domeniul de definiție al funcției f este $\mathbb{R}_+^*$, fiindcă puterea cu exponent real se examinează numai pentru o bază pozitivă.

2° Din proprietățile puterii rezultă că funcția f este strict crescătoare dacă $\alpha > 0$, iar dacă $\alpha < 0$, atunci f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$.

3° Funcția f nu este nici pară, nici impară. (Argumentați!)

4° Din cauza monotoniei pe $D(f)$, f nu este periodică, nu are extreme locale.

5° În funcție de valoarea exponentului, graficul funcției putere poate avea una din formele reprezentate în figura 7.8.

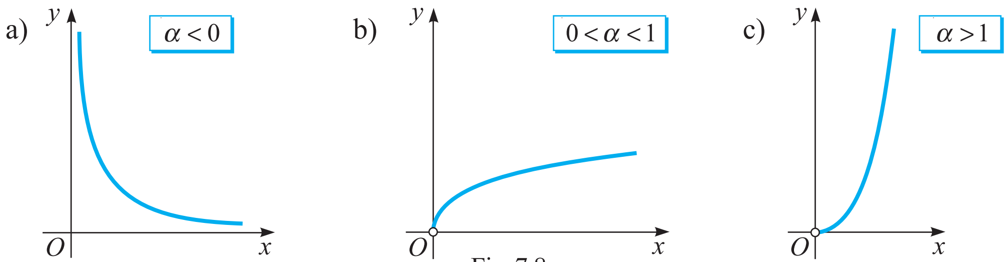


Fig. 7.8

Observație

Funcțiile determinate de formulele $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$ şi $g(x)=\sqrt[n]{x}$, unde n este număr natural impar, sunt diferite, deoarece sunt diferite domeniile lor de definiție: $D(f)=\mathbb{R}_+^*$, iar $D(g)=\mathbb{R}$.

3.3. Proporționalitatea inversă

Ne amintim

Dependența dintre două mărimi x şi y, dată astfel încât, odată cu majorarea (micşorarea) mărimii x, mărimea y se micşoreaza (majorează) tot de atâtea ori, se numeşte proporționalitate inversă.

Proporționalitatea inversă între mărimi este exprimată prin relația $x \cdot y = k$, unde $k \in \mathbb{R}^*$ şi $x \in (0, +\infty)$.

Definiție

Funcția de forma $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$, se numeşte **proporționalitate inversă**.

Rețineți!

Graficul proporționalității inverse este o hiperbolă cu două ramuri:

a) pentru $k > 0$ ramurile sunt situate în cadranele I şi III (fig.7.9);
b) pentru $k < 0$ ramurile sunt situate în cadranele II şi IV (fig.7.10).

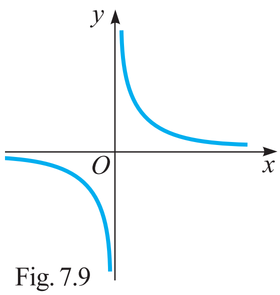


Fig. 7.9

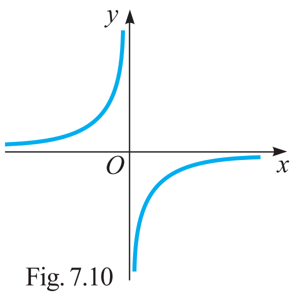


Fig. 7.10

Ne amintim

Investigăm

Utilizând graficul proporționalității inverse (fig. 7.9 şi 7.10), determinați proprietățile funcției de forma $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^*$.

Exerciții şi probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. *Investigați!* Fie punctele $A(-1; 0)$, $B(-1; -1)$, $C(0; 0)$, $D(4; 2)$, $E(8; 2)$, $F(-2; 1)$.
Să se determine care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$; b) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$; c) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=-\frac{2}{x}$.

2. a) Să se traseze în acelaşi sistem de coordonate graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{2}{x}$ şi $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x)=-\frac{2}{x}$.
b) Să se determine proprietățile funcțiilor f şi g.

3. Fie funcția radical $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$. Să se afle valorile funcției f pentru $x \in \{-16; -4; 0; 2; 8; 44; 64; 144\}$.

4. Fie funcția radical $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Să se afle valorile funcției f pentru $x \in \{-27; -8; -1; 0; 1; 8; 27; 64; 1000\}$.

5. Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=-\frac{1}{2x}$. Să se afle valorile funcției f pentru $x \in \{-5; -3; -\frac{1}{2}; 0; \sqrt{2}; 4{,}5; 10\}$.

B

6. Să se scrie formula prin care este definită proporționalitatea inversă, știind că graficul acesteia trece prin punctul:
a) $A(-2; 6)$; b) $B(9; 3)$; c) $C(1; -5)$; d) $D(-1; -10)$.

7. *Lucrați în perechi!* Să se scrie formula care arată dependența volumului cubului de lungimea muchiei lui:
a) Să se traseze graficul funcției definite prin această formulă. Este această dependență o proporționalitate inversă?
b) Să se afle volumul cubului, știind că lungimea muchiei lui este de: a) 2 cm; b) 0,5 cm; c) 1,5 cm.
c) Să se rezolve prin metoda grafică ecuația $x^3 = -x-2$.

8. a) Să se scrie formula care exprimă dependența vitezei v de timpul t, fiind dată distanța d.
b) Să se arate că această dependență este o proporționalitate inversă.

9. (BAC 2023) Fie fucția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}$. Determinați dacă punctul $M(\sqrt{3}-1; \sqrt{3}+1)$ aparține graficului funcției f.

C

10. (BAC 2022) Fie fucțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+4x-7$ și $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x)=-\frac{6}{x}$. Arătați că vârful parabolei, ce reprezintă graficul funcției f, aparține graficului funcției g.

11. Să se traseze graficul funcției:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$; b) $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x)=\frac{2}{|x|}$.

12. *Investigați!* Să se formuleze exemple de proporționalități inverse din diverse domenii.

Profilul real

A₁

1. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt{x-3}$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x+3}$.

2. Să se traseze graficul funcției:
a) $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x}$; b) $f: D \to \mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{1-4x}$.

3. Să se studieze paritatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^4$; b) $f(x)=x^5$.

B₁

4. Să se determine suma și produsul funcțiilor $f, g: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^4$, $g(x)=x^5$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=\sqrt{x}$.

5. *Lucrați în perechi!* Folosind definiția monotoniei, să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=x^2+2$; b) $f(x)=(x+2)^2$; c) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+4$; d) $f(x)=(x+4)^{\frac{1}{3}}$.

C₁

6. Să se arate că funcția $f: D \to E$ este inversabilă și să se determine inversa ei:
a) $f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=x^4$; b) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{4x}$; c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x}{4}}$.

7*. Să se determine suma, produsul și compusa $f \circ g$ ale funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=x^3$; b) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$.

3.4. Ecuații iraționale

Problemă

O familie de fermieri are două loturi separate de pământ de formă pătrată. Aria unuia este cu 32 de ari mai mică decât aria celuilalt. Să se afle aria fiecărui lot, dacă se știe că pentru a le îngrădi complet fermierul a folosit un gard de 320 m lungime.

Rezolvare:

Fie x m² aria primului lot. Atunci $(x - 3200)$ m² este aria lotului al doilea. Conform condiției problemei, obținem ecuația $4\sqrt{x}+4\sqrt{x-3200}=320.$ Această ecuație este irațională.

Vom numi ***ecuație irațională*** o ecuație în care necunoscuta apare sub radical sau în baza puterii cu exponent rațional.

De exemplu, ecuațiile $\sqrt[3]{x}-\sqrt{x+1}=2,\ x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+3=0$ sunt ecuații iraționale.

Rețineți!

La rezolvarea ecuațiilor iraționale, în urma efectuării unor transformări, pot să apară soluții străine.

De exemplu, în urma ridicării ambilor membri ai ecuației $f(x)=g(x)$ la o putere naturală pară putem obține soluții străine. Deci, atunci când transformările efectuate nu păstrează echivalența ecuațiilor e necesară verificarea.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{4-x}=-x-2.$

Rezolvare:

Ridicând ambii membri ai ecuației la pătrat, obținem $4-x=x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+5x=0.$ Deci, $x_1=-5,\ x_2=0.$

Prin verificare în ecuația inițială, ne convingem că –5 este soluție, iar 0 nu este soluție a acestei ecuații, fiind soluție a ecuației $\sqrt{4-x}=x+2.$

Rețineți!

Dacă ambii membri ai ecuației $f(x)=g(x)$ iau valori de același semn pentru $x\in$ DVA, atunci pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuațiile $f(x)=g(x)$ și $(f(x))^n=(g(x))^n$ sunt echivalente în DVA.

La rezolvarea ecuațiilor iraționale vom ține cont de

Teorema 3

Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} f(x)=(g(x))^{2n}, \\ g(x)\geq 0, \end{cases}$

iar ecuația $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$ este echivalentă cu ecuația $f(x)=(g(x))^{2n+1}.$

Exercițiu Demonstrați teorema 3.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{1-x^2}=x+1.$

Rezolvare:

$$\sqrt{1-x^2}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0, \\ 1-x^2=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1; \\ \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\{-1;\ 0\}.$

Menționăm că ecuațiile $f(x)=g(x)$ și $f(x)=-g(x)$ au același DVA. De aceea, rezolvând o ecuație prin metoda ridicării ambilor membri la o putere naturală pară și convingându-ne că soluția obținută x_0 aparține DVA, nu putem afirma că x_0 este o soluție a ecuației iraționale. Dar dacă $x_0\notin$ DVA al ecuației inițiale, atunci x_0 este o soluție străină pentru ea.

Reţineţi!

Soluţii străine pot apărea, de asemenea, în urma efectuării unor substituţii.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$ (1).

Rezolvare:

Ridicăm ambii membri ai ecuaţiei (1) la cub şi obţinem ecuaţia:

$\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}\,(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1})=-(x+1)$ (2), echivalentă cu cea iniţială.

Ţinând cont de ecuaţia (1), înlocuim expresia dintre paranteze cu $\sqrt[3]{x-1}$ şi obţinem $\sqrt[3]{(x+1)(x-1)(3x+1)}=-(x+1)$ (3). Ridicăm la cub ambii membri ai ecuaţiei (3) şi obţinem ecuaţia $(x+1)(3x+1)(x-1)+(x+1)^3=0$, cu soluţiile $x_1=-1,\ x_2=0$.

Prin verificare în ecuaţia iniţială, ne convingem că -1 este o soluţie, iar 0 nu este soluţie a acestei ecuaţii.

Răspuns: $S=\{-1\}$.

Ridicând ambii membri ai ecuaţiei (1) la cub, am obţinut ecuaţia (2), echivalentă cu cea dată. Substituţia expresiei $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$ cu $\sqrt[3]{x-1}$ a condus însă la apariţia unei soluţii străine.

Observaţie

Verificarea soluţiilor este un lucru necesar la rezolvarea ecuaţiilor iraţionale, în afară de cazul în care toate ecuaţiile obţinute în procesul rezolvării sunt echivalente în DVA al ecuaţiei iniţiale.

Reţineţi!

O metodă generală de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale constă în transformarea lor în ecuaţii (sisteme ce conţin atât ecuaţii, cât şi inecuaţii) fără radicali, echivalente cu ecuaţia iraţională dată. În urma aplicării acestei metode, verificarea nu este obligatorie.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{2x+3}=x$.

Rezolvare:

$$\sqrt{2x+3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ 2x+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0, \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0; \\ \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Răspuns: $S=\{3\}$.

Uneori, această metodă complică procesul de rezolvare, de aceea în astfel de cazuri se folosesc alte metode (se aplică teorema 3 sau metodele descrise mai jos).

Dacă determinarea DVA sau a condiţiei $g(x)\ge 0$ este mai dificilă decât însăşi rezolvarea ecuaţiei date, nu vom determina DVA şi nu vom rezolva inecuaţia $g(x)\ge 0$, ci doar vom verifica dacă soluţiile obţinute satisfac aceste condiţii.

Uneori însă, odată cu determinarea DVA se încheie rezolvarea ecuaţiei date.

Exerciţiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}$.

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases} x\ge 0, \\ 2-x\ge 0, \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3, \\ x\le 2. \end{cases}$ Acest sistem de inecuaţii nu are soluţii, deci ecuaţia iniţială nu are soluţii.

Răspuns: $S=\varnothing$.

Vom examina unele metode frecvent aplicate la rezolvarea ecuaţiilor iraţionale.

1 Metoda ridicării ambilor membri ai ecuației la aceeași putere naturală

Metoda aceasta se aplică, de regulă, la rezolvarea ecuațiilor de tipul:

$$\sqrt[k]{f(x)}=g(x);\ \sqrt[k]{f(x)}\pm\sqrt[k]{g(x)}=h(x);\ \sqrt[k]{f(x)}\pm\sqrt[k]{g(x)}=\sqrt[k]{h(x)},\ k\in\mathbb{N},\ k\geq 2.$$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}=8$.

Rezolvare:

Aflăm DVA: $\begin{cases} x+1\geq 0, \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

Separăm un radical și, prin ridicare la pătrat în DVA, obținem:

$$(\sqrt{x+1})^2=(8-\sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow x+32=8\sqrt{3x+1}.$$

Ridicăm la pătrat ambii membri ai ultimei ecuații și obținem ecuația $x^2-128x+960=0$, cu soluțiile $x_1=8,\ x_2=120$.

Efectuăm verificarea, deoarece transformările n-au fost echivalente.

Valorile $x_1,\ x_2\in$ DVA. Deci, ambele valori pot fi soluții ale ecuației inițiale. Prin verificare în ecuația inițială, ne convingem că 8 este o soluție, iar 120 nu este soluție a ecuației inițiale.

Răspuns: $S=\{8\}$.

2 Rezolvarea ecuațiilor de tipul $f(x)\sqrt[2k]{g(x)}=0,\ k\in\mathbb{N}^*$

Această ecuație este echivalentă în DVA cu sistemul $\begin{cases} g(x)\geq 0; \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right. \end{cases}$

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $(x^2-4x+3)\sqrt{4-x^2}=0$.

Rezolvare:

$$(x^2-4x+3)\sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2\geq 0; \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0, \\ 4-x^2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=1, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S=\{-2;\ 1;\ 2\}$.

3 Metoda utilizării necunoscutelor auxiliare

a) *Utilizarea unei necunoscute auxiliare*

Uneori, prin utilizarea unei necunoscute auxiliare, ecuațiile iraționale se reduc la ecuații fără radicali.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

Rezolvare:

$$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2 \Leftrightarrow 3(x^2+5x+1)+2\sqrt{x^2+5x+1}-5=0.$$

Fie $\sqrt{x^2+5x+1}=t\geq 0$. Obținem ecuația $3t^2+2t-5=0$, cu soluțiile $t_1=1,\ t_2=-\frac{5}{3}$. Deoarece $t_2=-\frac{5}{3}<0$, rezolvăm doar ecuația $\sqrt{x^2+5x+1}=1$, care are soluțiile $x_1=0,\ x_2=-5$.

Așa cum transformările efectuate sunt echivalente, verificarea nu este necesară.

Răspuns: $S=\{-5;\ 0\}$.

b) *Utilizarea a două necunoscute auxiliare*

Pentru a rezolva unele ecuații iraționale, e mai convenabil de a utiliza două necunoscute auxiliare. Acest procedeu permite de a reduce ecuația irațională la un sistem de ecuații fără radicali.

Observație

Această metodă poate fi aplicată la rezolvarea ecuațiilor care conțin doi radicali.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x+1}=1$.

Rezolvare:

DVA: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1, +\infty)$.

Fie $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=u,\\ \sqrt{x+1}=v.\end{cases}$ $(*)$ Atunci ecuația inițială se transformă în $u+v=1$.

Pentru a obține încă o ecuație cu necunoscutele u și v, ridicăm la puterea a treia și, respectiv, la puterea a doua membrii ecuațiilor sistemului $(*)$. Obținem sistemul $\begin{cases}x=u^3,\\ x+1=v^2,\end{cases}$ de unde $u^3-v^2=-1$.

Astfel, am obținut sistemul de ecuații $\begin{cases}u^3-v^2=-1,\\ u+v=1.\end{cases}$ Rezolvând sistemul, obținem soluția $\begin{cases}u=0,\\ v=1.\end{cases}$ (Verificați!)

Deci, pentru a determina soluțiile ecuației inițiale, vom rezolva sistemul $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=0,\\ \sqrt{x+1}=1.\end{cases}$

Obținem soluția $x=0\in \text{DVA}$. Prin verificare, stabilim că 0 este soluție a ecuației inițiale.

Răspuns: $S=\{0\}$.

4 Rezolvarea ecuațiilor de tipul $\sqrt[2k+1]{f(x)}=g(x),\ k\in\mathbb{N}^*$

Această ecuație (conform teoremei 3) este echivalentă cu ecuația $f(x)=(g(x))^{2k+1}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x^3+x^2+x-12}=x$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. În DVA obținem:

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+x-12}=x \Leftrightarrow x^3+x^2+x-12=x^3 \Leftrightarrow x^2+x-12=0,$$

de unde $x_1=-4,\ x_2=3$.

Răspuns: $S=\{-4;\ 3\}$.

5 Metode speciale de rezolvare a ecuațiilor iraționale

a) ***Metoda înmulțirii ecuației cu conjugata expresiei ce reprezintă unul dintre membrii ecuației***

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$ (5).

Rezolvare:

Înmulțind ecuația (5) cu expresia nenulă pe DVA: $\varphi(x)=\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}$, obținem $x^2-3x+3-x^2+3x-6=3(\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6})\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}=-1. \qquad (6)$$

Adunând ecuațiile (5) și (6), obținem $\sqrt{x^2-3x+3}=1$.

Astfel, $x^2-3x+3=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$, de unde $x_1=1,\ x_2=2$.

Substituind valorile 1, 2 în ecuația inițială, ne convingem că ambele sunt soluții ale acesteia.

Răspuns: $S=\{1;\ 2\}$.

Observație

Această metodă se aplică, de regulă, la rezolvarea ecuațiilor iraționale de tipul $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}=h(x)$.

b) *Metoda completării pătratului (cubului etc.) sumei sau diferenței sub radical*

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$.

Rezolvare:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|=x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=x-1.$$

Substituind $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0,$ în ecuația dată, obținem ecuația $t+1+|t-1|=t^2$.

Rezolvând ultima ecuație prin metodele cunoscute (ținând cont de substituția $\sqrt{x-1}=t$, $t\geq 0$), obținem $t=2$, iar soluția ecuației inițiale este $x=5$.

Răspuns: $S=\{5\}$.

Observație

Deseori ecuația irațională poate fi rezolvată prin mai multe metode.
Experiența vă va ajuta să alegeți metoda cea mai eficientă pentru ecuația dată.

Exerciții și probleme propuse

Profilul real

A₁

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x+1}=1$; b) $\sqrt{x-1}=-7$; c) $\sqrt{x+2}=x$;
d) $\sqrt{x^2-3x+4}-x=2$; e) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$; f) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x}=x+1$; b) $\sqrt{x+3}=x-1$; c) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x$; d) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$.

3. ***Lucrați în perechi!*** Să se completeze cu un număr real, apoi să se rezolve ecuația obținută:
a) $\sqrt{1-2x}=\boxed{}\cdot x+1$; b) $\sqrt{\boxed{}\cdot x+2}=1-3x$; c) $\sqrt{0{,}5x-\boxed{}}=x+2$.

4. ***Investigați!*** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției $\sqrt[3]{x^2}=1 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}=1$. A/F

B₁

5. a) (BAC 2022) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{4-x}=x-2$.
b) (BAC 2015) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{2x+3}=x$.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $(1-x^2)\sqrt{2x-5}=0$;
b) $(3x^2-x-2)\sqrt{1-4x}=0$;
c) $(1-3x)\sqrt{x^2-2x+1}=0$;
d) $(x^2-5x+6)\sqrt{2x^2-x-3}=0$;
e) corespunzătoare problemei de la începutul secvenței 3.4 și să se răspundă la întrebarea problemei.

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1}$;
b) $\sqrt{x+6}=\sqrt{x+7}-\sqrt{2x-5}$;
c) $\sqrt[3]{x-5}=x+1$;
d) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $(x^3-1)\sqrt{x^2-7x+12}=0$; b) $(2x^2-x-1)\sqrt{x^2-64}=0$.

9. Utilizând o necunoscută auxiliară, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$; b) $x-5\sqrt{x}+6=0$;
c) $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+1=0$.

10. Prin metoda înmulțirii cu conjugata unei expresii, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\sqrt{x^2-2x-4}+\sqrt{x^2+3x-1}=4$;
b) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

11. ***Lucrați în perechi!*** Utilizând două necunoscute auxiliare, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$; b) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$;
c) $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$.

12. Aplicând o metodă cât mai eficientă, să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}$; b) $\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$; d) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

e) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$; f) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

13*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\cdot\sqrt[n]{x^2-1}$; b) $\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}$.

14. Să se compună o ecuație irațională care:
a) nu are soluții; b) are o unică soluție; c) are două soluții.

15. Să se compună o ecuație irațională ale cărei soluții sunt numerele 4 și –1.

16*. ***Investigați!*** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, ecuația:

a) $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\cdot\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\cdot\sqrt[3]{a^2-x^2}$; b) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

17. (BAC 2012) Determinați valorile reale ale parametrului m, pentru care ecuația $\sqrt{x^2-2mx+m^2+m}=\sqrt{2m-x}$ admite o singură soluție reală.

3.5. Inecuații iraționale

Problemă

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x-3\sqrt{x}-4\leq 0$.
Această inecuație este irațională.

Vom numi ***inecuație irațională*** o inecuație în care necunoscuta apare sub radical sau în baza puterii cu exponent rațional.

De exemplu, inecuațiile $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}-2\geq 0$, $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}<1$, $\sqrt{x-1}\geq 2$, $\sqrt{x+1}\leq -2$ sunt inecuații iraționale.

Inecuațiile iraționale se rezolvă aplicând procedee și metode similare celor folosite la rezolvarea ecuațiilor iraționale.

Observație

În procesul rezolvării inecuațiilor iraționale vom efectua transformări echivalente, luând în considerare următoarele afirmații:

I Dacă n este un număr natural impar, atunci inecuațiile $f(x)<g(x)$ și $(f(x))^n<(g(x))^n$ sunt echivalente.

II Dacă funcțiile f și g sunt nenegative într-o mulțime M, iar n este un număr natural, atunci inecuațiile $f(x)<g(x)$ și $(f(x))^n<(g(x))^n$ sunt echivalente în mulțimea M.

III Dacă funcțiile f și g sunt negative într-o mulțime M, iar $n\in\mathbb{N}^*$ este un număr natural par, atunci inecuațiile $f(x)<g(x)$ și $(f(x))^n>(g(x))^n$ sunt echivalente în mulțimea M.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\sqrt{x-1}<3$; b) $\sqrt{x-1}\geq 3$; c) $\sqrt{x-1}>-3$; d) $\sqrt{x-1}\leq -3$.

Rezolvare:

a) $\sqrt{x-1}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0, \\ (\sqrt{x-1})^2<3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x-1<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x<10 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x<10.$ *Răspuns*: $S=[1, 10]$.

b) $\sqrt{x-1}\geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0, \\ (\sqrt{x-1})^2\geq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x\geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 10.$ *Răspuns*: $S=[10, +\infty)$.

c) $\sqrt{x-1}>-3 \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1.$ *Răspuns*: $S=[1, +\infty)$.

d) $\sqrt{x-1}\leq -3 \Leftrightarrow S=\varnothing.$ *Răspuns*: $S=\varnothing$.

Expunem metodele principale de rezolvare a unor tipuri de inecuații iraționale.

1 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} < g(x)$

În baza proprietăților radicalilor și ale inecuațiilor, $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$

2 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Aplicând proprietățile radicalilor și ale inecuațiilor, obținem:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Observație

Din sistemul al doilea a fost exclusă inecuația $f(x) \geq 0$, deoarece ea rezultă din inecuația a doua a acestui sistem.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{3x+1} > 2x$.

Rezolvare:

$$\sqrt{3x+1} > 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x < 0, \\ 3x+1 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \geq 0, \\ 3x+1 > 4x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right), \\ x \in [0, 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right).$$

Răspuns: $S = \left[-\frac{1}{3}, 1\right)$.

3 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

În baza proprietăților radicalilor și ale inecuațiilor, $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$

Observație

În unele cazuri este mai eficient să folosim totalitatea mixtă $\left[\begin{array}{l} \sqrt{f(x)} = g(x), \\ \sqrt{f(x)} < g(x), \end{array}\right.$ echivalentă cu inecuația inițială.

4 Inecuații iraționale de tipul $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

În baza proprietăților radicalilor și ale inecuațiilor,

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Observație

Uneori este mai eficient să utilizăm totalitatea mixtă $\left[\begin{array}{l} \sqrt{f(x)} = g(x), \\ \sqrt{f(x)} > g(x), \end{array}\right.$ echivalentă cu inecuația inițială.

5 Inecuații iraționale de tipul $g(x)\sqrt[2n]{f(x)} < 0$

În baza proprietăților radicalilor și ale inecuațiilor, $g(x)\sqrt[2n]{f(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Exercițiu rezolvat

$$(x-2)\sqrt{x+5} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0, \\ x+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 2.$$

Răspuns: $S = (-5, 2)$.

Similar vom proceda în cazurile când semnul „<” va fi înlocuit cu „>”, „≥”, „≤”.

Rețineți!

La rezolvarea inecuațiilor iraționale vom aplica aceleași metode ca și la rezolvarea ecuațiilor iraționale: ridicarea inecuației la o putere naturală, utilizarea necunoscutelor auxiliare, completarea pătratului (cubului) sumei sau diferenței sub semnul radicalului etc.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}\geq 1$.

Rezolvare:

DVA: $x\in[2,+\infty)$. Inecuația inițială este echivalentă cu inecuația $\sqrt{2x+1}\geq 1+\sqrt{x-2}$. Ambii membri ai acestei inecuații sunt nenegativi în DVA, deci ridicăm la pătrat și obținem inecuația echivalentă $2\sqrt{x-2}\leq x+2$.

$$2\sqrt{x-2}\leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0, \\ x+2\geq 0, \\ 4(x-2)\leq (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ x^2+12\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[2,+\infty).$$

Luând în considerare DVA, obținem soluțiile $x\in[2,+\infty)$ ale inecuației inițiale.

Răspuns: $S=[2,+\infty)$.

Exerciții și probleme propuse

Profilul real

A₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

1. a) $\sqrt{x+1}\geq 2$; b) $\sqrt{x+1}\leq 2$; c) $\sqrt{x+1}\geq -2$; d) $\sqrt{x+1}\leq -2$.

2. a) $\sqrt{2x+3}>1$; b) $\sqrt{1-x}\leq 2$; c) $\sqrt{x^2-3x}\leq -3$;

d) $\sqrt{x^2-3x+2}\geq -5$; e) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{1-2x}}\leq 1$; f) $\sqrt[3]{x+2}>-2$.

3. a) $x\sqrt{x+1}<0$; b) $x\sqrt{x+1}\leq 0$; c) $x\sqrt{x+1}>0$; d) $x\sqrt{x+1}\geq 0$.

B₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuațiile (**4-9**):

4. a) $\sqrt{2x+10}>3x-5$; b) $\sqrt{x^2-4x}<x-3$;

c) $\sqrt{x^2-5x+6}\geq x+4$; d) $\sqrt{(x-4)(x+1)}\leq 3(x+1)$;

e) $\sqrt[3]{x^3-2x}\geq x$; f) $\sqrt[3]{1+x^3}\leq 2+x$.

5. ***Lucrați în perechi!*** a) $\dfrac{3x^2-5x+8}{\sqrt{x^2-9}}\geq 0$;

b) $\dfrac{(x-1)\sqrt{x-8}}{x^2-16}\geq 0$; c) $(x^2-3x)\sqrt[3]{1-x}\leq 0$.

6. a) $\sqrt{x+3}\leq 2+\sqrt{x-4}$; b) $\sqrt[3]{1+\sqrt{3x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{3x}}>2$;

c) $(x-4)\sqrt{x^2-3}\leq x^2-16$; d) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}\leq\sqrt{2x+4}$.

7. a) $(x^2-1)\sqrt{4-x^2}\geq 0$; b) $(2x^2-x-1)\sqrt{x^3-1}\leq 0$.

8. a) $\dfrac{\sqrt{5-20x-x^2}}{x}\geq 1$; b) $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2-x}<2$;

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}<\dfrac{1}{1-x}$.

9. a) $x^2+\sqrt{x^2+11}>31$; b) $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x+1}}-\sqrt{\dfrac{2x+1}{1-x}}\geq\dfrac{7}{12}$;

c) $\sqrt{x^2-3x+5}\geq 3x+7-x^2$.

10. (BAC 2021) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\sqrt{1-x}<\sqrt{2x+4}$.

11. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $x-3\sqrt{x}-4\leq 0$ (propusă la începutul secvenței 3.5).

C₁

12. ***Lucrați în perechi!*** Să se completeze cu un număr real, apoi să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația obținută:

a) $\sqrt{\square\cdot x+4}\geq x$; b) $\sqrt{x^2-3x-4}<\square\cdot x+1$; c) $\sqrt{3x^2-x-2}>\sqrt{3}\cdot x+\square$.

13*. Să se compună o inecuație irațională care în $\mathbb{R}$:

a) are o unică soluție; b) are două soluții;

c) nu are nicio soluție; d) are ca mulțime a soluțiilor un interval de tipul (a, b).

§4 Funcția exponențială. Ecuații exponențiale. Inecuații exponențiale

4.1. Funcția exponențială

În timpul reacției nucleare în lanț, în locul fiecărui neutron liber, peste l secunde apar alți ν neutroni liberi. Mărimile l și ν depind de substanța și mediul în care are loc reacția. S-a determinat că numărul K de neutroni liberi în momentul de timp t se estimează prin formula $K = K_0 \cdot e^{(\nu-1)t/l}$, unde K_0 este numărul de neutroni liberi în momentul $t_0 = 0$, e – o constantă numită numărul lui L. Euler ($e \approx 2{,}7$). Funcția de forma $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = e^{\mu t}$, $\mu = \dfrac{\nu - 1}{l}$, care apare în aceste calcule, este o funcție exponențială.

Definiție

Se numește **funcție exponențială** funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$.

De exemplu, $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$, sunt funcții exponențiale.

Observație

Cazul $a = 1$ se exclude din examinare, deoarece obținem funcția constantă $f(x) = 1$, ale cărei proprietăți sunt diferite de proprietățile funcției exponențiale.

***Proprietățile principale ale funcției exponențiale*:**

1° $D(f) = \mathbb{R}$.

2° $E(f) = \mathbb{R}_+^*$.
Într-adevăr, din proprietățile puterii cu exponent real se știe că $a^x > 0$ pentru orice x real, deci $E(f) \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Poate fi demonstrată și incluziunea inversă.

3° Din proprietatea 2° rezultă că funcția exponențială nu are zerouri. Graficul ei intersectează axa Oy în punctul (0; 1), fiindcă $a^0 = 1$ pentru orice $a > 0$.

4° În virtutea proprietăților de comparare a puterilor cu aceeași bază și cu orice exponent real (modulul 3, § 2), rezultă că funcția exponențială este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă $a > 1$ și strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă $0 < a < 1$.

Observație

În baza monotoniei, se obțin următoarele echivalențe:

$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a > 1),$$
$$a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < a < 1),$$
$$a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1),$$

care se folosesc la rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor exponențiale.

5° Funcția exponențială nu este nici pară, nici impară, deoarece $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ și există x_0, astfel încât $f(-x_0) \neq \pm f(x_0)$.

6° Funcția exponențială nu este periodică, deoarece este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

7° Funcția exponențială nu are extreme locale.

8° Funcția exponențială este inversabilă.

9° Graficul funcției exponențiale $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, este reprezentat în figura 7.11.

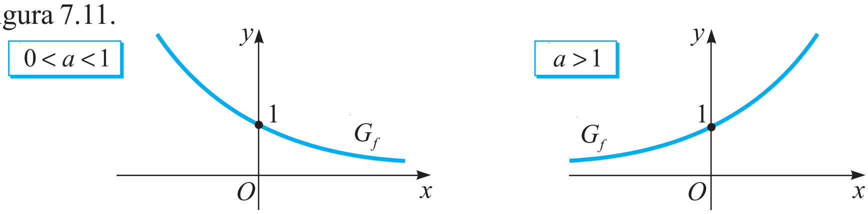


Fig. 7.11

Exercițiu

În figura 7.12 sunt reprezentate grafic funcțiile

$f_1, f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*,\ f_1(x)=2^x,\ f_2(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x.$

Utilizând aceste grafice, determinați proprietățile funcțiilor f_1 și f_2.

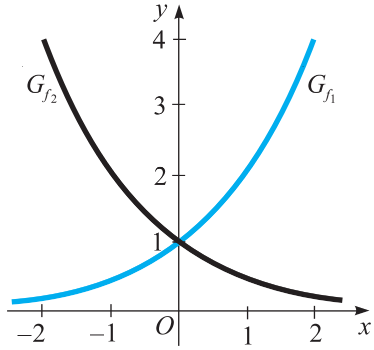


Fig. 7.12

Exerciții rezolvate

1. Să se compare numerele $5^{\sqrt{3}}$ și $5^{\sqrt{2,5}}$.

Rezolvare:

Așa cum funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=5^x$, este strict crescătoare, iar $\sqrt{3}>\sqrt{2,5}$, rezultă că $5^{\sqrt{3}}>5^{\sqrt{2,5}}$.

2. Să se compare cu 1:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; b) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$.

Rezolvare:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$ este valoarea funcției exponențiale $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, în punctul $x_0=\sqrt{5}>0$. Deoarece baza acestei funcții este mai mică decât 1, rezultă că $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}<1$.

b) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$ este valoarea funcției exponențiale $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=(\sqrt{2}-1)^x$, în punctul $x_0=-\frac{3}{2}<0$.

Deoarece baza acestei funcții este mai mică decât 1, obținem că $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}>1$.

Funcția exponențială se aplică în deverse domenii. De exemplu:
- *în fizică*: creșterea numărului de neutroni liberi în cadrul reacției nucleare este exponențială;
- *în geografie*: schimbarea presiunii atmosferice în raport cu altitudinea este exponențială;
- *în sociologie*: creșterea sau descreșterea populației unei țări este, de regulă, exponențială;
- *în politică*: creșterea sau descreșterea adepților unui partid politic, de asemenea, este exponențială;
- *în biologie*: înmulțirea bacteriilor se descrie prin funcție exponențială;
- *în economie*, în domeniul antreprenorial, în domeniul financiar-bancar etc.

Astfel, antreprenorii, businessmenii, specialiștii care lucrează în domeniile finanțelor, științei și chiar în domeniul politicilor, pentru a observa tendințele descendente sau ascendente pe piețe, vânzări, investiții, împrumuturi, rezultate ale sondajelor etc., aplică două funcții:

1) Funcția de degradare (descreștere) exponențială, definită prin formula $y=a\left(1-\frac{b}{100}\right)^x$, unde y este sumă rămasă după decădere pe o perioadă de timp, a – suma inițială, $b\,\%$ – modificarea procentuală, x – perioada de timp, $1-\frac{b}{100}$ – factorul de descreștere.

2) Funcția de creștere exponențială, definită prin formula $y=a\left(1+\frac{b}{100}\right)^x$, unde y reprezintă sumă finală obținută într-o perioadă de timp, a – suma inițială, $b\,\%$ – modificarea procentuală, x – perioada de timp, $1+\frac{b}{100}$ – factorul de creștere.

Problemă Numărul actual de abonați ai unui site este de 2500. Să se afle peste câte luni numărul de membri va fi de 100000, dacă rata lunară de creștere este de 20 %.

Rezolvare:

Avem $a = 2500$, $b\% = 20\%$, $y = 100000$. Vom aplica funcția de creștere exponențială pentru a afla numărul de luni.

Astfel, $100000 = 2500\left(1+\frac{20}{100}\right)^x$ sau $40 = (1{,}2)^x$.

Deci, rezolvarea problemei s-a redus la rezolvarea ecuației exponențiale $(1{,}2)^x = 40$.

Soluția acestei ecuații este $x_1 = \log_{1,2} 40 = \frac{\ln 40}{\ln 1{,}2} = 20{,}5$.

Răspuns: 20,5 luni.

4.2. Ecuații exponențiale

Problemă Să presupunem că, la 3 ianuarie 2024, un elev a depus la bancă 1 leu. Peste câți ani acest elev va deveni milionar, dacă dobânda anuală compusă este de 10 %?

Rezolvare:

Peste 1 an, elevul va avea pe cont $1 + 0{,}1 = 1{,}1$ (lei), peste 2 ani, $1{,}1 + 0{,}11 = 1{,}21 = 1{,}1^2$ (lei) ş.a.m.d. Fie x numărul respectiv de ani. Obținem ecuația $1{,}1^x = 1\,000\,000$.

Această ecuație este o ecuație exponențială.

Vom numi ***ecuație exponențială*** o ecuație în care careva exponent al puterii este o expresie ce conține necunoscuta, baza puterii fiind o constantă pozitivă, diferită de 1.

De exemplu, ecuațiile $2^x = 8$, $5\cdot 3^{2x-1} = 5^{2x}$, $4^{2x} - 4^x = 20$ sunt ecuații exponențiale.

La rezolvarea ecuațiilor exponențiale vom ține cont de

Teorema 4 Dacă $a > 0$ și $a \neq 1$, atunci ecuațiile $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ și $f(x) = g(x)$ sunt echivalente.

Exercițiu Demonstrați teorema 4.

Vom examina **metodele** principale de rezolvare a unor tipuri de ecuații exponențiale.

1 Ecuații exponențiale de tipul $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$

1) Fie $f(x) = x$. Ecuația $a^x = b$ se numește ***ecuație exponențială fundamentală***. Sunt posibile următoarele cazuri particulare.

a) $b \le 0$. Ecuația $a^x = b$ nu are soluții.

b) $b > 0$ și $b = a^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.

Exemplu. $5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Răspuns: $S = \{2\}$.

c) $b > 0$ și b nu este exprimat ca putere a lui a. În acest caz, folosim identitatea logaritmică fundamentală $b = a^{\log_a b}$. Aplicând teorema 4, obținem:

$$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Exemplu. $3^x = 12 \Leftrightarrow 3^x = 3^{\log_3 12} \Leftrightarrow x = \log_3 12$.

Răspuns: $S = \{\log_3 12\}$.

2) Similar se procedează la rezolvarea ecuației exponențiale de tipul $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplu. $5^{2x-1} = 2 \Leftrightarrow 5^{2x+1} = 5^{\log_5 2} \Leftrightarrow 2x - 1 = \log_5 2 \Leftrightarrow 2x = \log_5 10 \Leftrightarrow x = \log_5 \sqrt{10}$.

2 **Ecuațiile exponențiale de tipul $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$, $a\in\mathbb{R}$,** sunt echivalente (conform teoremei 4) cu ecuația $f(x)=g(x)$.

Exemplu. $0{,}2^{x^3-1}=0{,}2^{x^2-1}\Leftrightarrow x^3-1=x^2-1\Leftrightarrow x^3-x^2=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0.$

Răspuns: $S=\{0;1\}$.

3 **Ecuații exponențiale rezolvabile prin metoda descompunerii în factori**

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $12^x+6^x-4^x-2^x=0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$.

Grupând termenii, obținem: $12^x+6^x-4^x-2^x=0\Leftrightarrow(12^x+6^x)-(4^x+2^x)=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(2^x\cdot 6^x+6^x)-(2^{2x}+2^x)=0\Leftrightarrow 6^x(2^x+1)-2^x(2^x+1)=0\Leftrightarrow(2^x+1)(6^x-2^x)=0.$ Deci, $6^x-2^x=0$ sau $2^x+1=0$, de unde $6^x=2^x$ sau $2^x=-1$.

Soluția ecuației $6^x=2^x$ (sau $3^x=1$) este $x=0$, iar ecuația a doua nu are soluții.

Răspuns: $S=\{0\}$.

4 **Ecuațiile exponențiale de tipul $f(a^x)=0$** se rezolvă prin ***metoda utilizării necunoscutei auxiliare*** $a^x=t,\ t>0$, care reduce ecuația inițială la una de tipul $f(t)=0$.

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $9^x-2\cdot 3^x=3$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. $9^x-2\cdot 3^x=3\Leftrightarrow(3^x)^2-2\cdot 3^x-3=0$. Fie $3^x=t,\ t>0$. Obținem ecuația $t^2-2t-3=0$, cu soluțiile $t_1=3,\ t_2=-1$. Din aceste valori, numai $t_1=3>0$. Rezolvăm ecuația $3^x=3$ şi obținem $x=1$.

Răspuns: $S=\{1\}$.

Rețineți!

Unele ecuații exponențiale, în care apar puteri cu aceiaşi exponenți, dar cu baze diferite, pot fi rezolvate prin metoda utilizării necunoscutei auxiliare după împărțirea fiecărui membru al ecuației la una din aceste puteri.

Astfel de ecuații au forma $m\cdot a^{2x}+n\cdot a^x b^x+p\cdot b^{2x}=0$, $m, n, p\in\mathbb{R}^*$, $a, b\in\mathbb{R}_+^*$.

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $8^x+18^x-2\cdot 27^x=0$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Împărțind ambii membri ai ecuației inițiale la 8^x, obținem ecuația $1+\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3x}=0$. Efectuând substituția $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t,\ t>0$, obținem: $2t^3-t^2-1=0\Leftrightarrow(t-1)(2t^2+t+1)=0\Leftrightarrow t=1$. Atunci $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Răspuns: $S=\{0\}$.

5 **Ecuații exponențiale rezolvabile prin metoda logaritmării**

Exemple

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $4^{2x-1}=3^x$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Logaritmând în baza 10, obținem ecuația $(2x-1)\lg 4=x\lg 3$, echivalentă cu cea inițială. Soluția ecuației este $x=\dfrac{\lg 4}{\lg 16-\lg 3}$.

Răspuns: $S=\left\{\dfrac{\lg 4}{\lg 16-\lg 3}\right\}$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{6^x} = 4^{5^x}$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Logaritmând în baza 10, obținem ecuația $6^x \lg 3 = 5^x \lg 4$.

Logaritmând din nou, obținem $x \lg 6 + \lg\lg 3 = x \lg 5 + \lg\lg 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lg\lg 4 - \lg\lg 3}{\lg 6 - \lg 5}$.

Răspuns: $S = \left\{\dfrac{\lg\lg 4 - \lg\lg 3}{\lg 6 - \lg 5}\right\}$.

6 **Unele ecuații exponențiale pot fi rezolvate aplicând proprietățile funcțiilor determinate de membrii respectivi ai ecuației.**

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x = -4x + 1$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Prin probe, găsim soluția $x = 0$. Deoarece funcția *f*, definită prin formula $f(x) = 5^x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, iar funcția *g*, definită prin formula $g(x) = -4x + 1$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, rezultă că graficele acestor funcții au un unic punct de intersecție. Prin urmare, ecuația are doar soluția $x = 0$.

Răspuns: $S = \{0\}$.

Exerciții și probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *fals*?

a) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1{,}5)^x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{-x}$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

d) Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

A/F

2. a) Să se traseze în același sistem de coordonate graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

b) Să se determine proprietățile funcțiilor *f* și *g*.

3. Fie punctele $A(1; 2)$, $B(0; 1)$, $C(-1; -2)$, $D(-2; 4)$, $E(0; -1)$. Să se determine care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

4. ***Lucrați în perechi!*** Să se scrie unul dintre semnele > sau <, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $2^{\sqrt{3}} \bigcirc 2^{\sqrt{5}}$; b) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1,5} \bigcirc \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$; c) $5^3 \bigcirc 5^{\sqrt{2}}$; d) $(\sqrt{0{,}1})^3 \bigcirc (\sqrt{0{,}1})^5$; e) $3^{-\sqrt{5}} \bigcirc 3^{-\sqrt{7}}$.

5. ***Investigați!*** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției.

a) Punctul $A(1; 8)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{3x}$.

b) Punctul $B(0; 1)$ aparține graficului funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x}$.

c) Punctul $C(-1; 9)$ aparține graficului funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3^{2x}$.

A/F

6. Să se completeze caseta astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

„Dacă $3^x = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $3^{x+2} = \boxed{}$”.

B

7. Să se traseze graficul funcției:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x+1}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x-1}$; c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{2x}$.

8. *Lucrați în perechi!* Să se traseze graficul funcției:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$.

9. *Lucrați în perechi!* O bacterie se înmulţeşte prin diviziune celulară.

a) Să se scrie funcția ce corespunde acestei variații.
b) Să se afle câte bacterii vor fi la diviziunea a 6-a.
c) Dar câte bacterii vor fi la diviziunea a 50-a?

10. Numărul actual al adepților unui partid politic este de 360000. Să se afle care este scăderea procentuală anuală, dacă peste 3 ani numărul de adepți va fi de 45 000.

11. Un antreprenor a investit cu capitalizare în construcții 120000 u.m. pentru o perioadă de 3 ani.
Să se afle ce sumă va obține el, dacă rata anuală de creştere este de 8 %.

C

12. Să se traseze în acelaşi sistem de coordonate graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3^{|x|}$, şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$.
Ce ați observat?

13. *Investigați!* Să se determine care dintre numerele următoare este mai mare şi care este mai mic decât 1:

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}}$; b) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$; c) $2^{\frac{1}{3}}$; d) $\pi^{\frac{1}{5}}$; e) $(\sqrt{3}-1)^{-\frac{3}{2}}$; f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{5}}$.

Profilul real

A₁

1. Să se traseze graficul şi să se determine proprietățile funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=4^x$; b) $f(x)=1{,}5^x$; c) $f(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x$; d) $f(x)=4^{-x}$;
e) $f(x)=3^{x-1}$; f) $f(x)=3^x-1$; g) $f(x)=1-3^x$.

2. Să se decidă dacă $a\in(0,1)$ sau $a>1$, ştiind că:

a) $a^{\sqrt{2}}>a$; b) $a^{-0,5}<-a^{-\sqrt{2}}$; c) $a^{2,7}<a^{\sqrt{7}}$.

3. *Investigați!* Să se compare numerele:

a) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ şi $(\sqrt{2})^{1,3}$; b) $(0{,}3)^{-\sqrt{3}}$ şi $(0{,}3)^{-1,8}$.

4. Să se determine valorile lui *x* pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ia valori mai mici decât 1, dacă:

a) $f(x)=(5\sqrt{5})^x$; b) $f(x)=(0{,}5)^x$; c) $f(x)=3^{-x}$.

5. (BAC 2012) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{x^2}$. Scrieți în casetă una dintre expresiile *pară*, *impară* sau *nici pară, nici impară*, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:
„Funcția f este $\boxed{}$”.

6. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $10^x=1000$; b) $4^x=64$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=8$; d) $(0{,}2)^{-x}=\frac{1}{25}$; e) $1{,}1^x=1\,000\,000$;
f) $7^x=\sqrt[3]{49}$; g) $3^{2x+2}=-81$; h) $11^{x+1}=121$; i) $0{,}2^{x^2+x}=0$.

B₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile (7-10):

7. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{4}{9}\right)^4$; b) $12^{x+1}=15$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^{x-1}=\frac{125}{64}$.

8. a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{32}\right)^{x^2-1}$; b) $(0,5)^{x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{4}$; c) $\sqrt[3]{4^{x+1}}\cdot 16=\sqrt{4^{x^2}}$.

9. a) $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-2}=77$; b) $4^{x+3}-4\cdot 7^x+2\cdot 7^{x+1}=4^{x-1}$; c) $3^{x+2}+3\cdot 5^{x+4}=3^{x+6}-5^{x+3}$.

10. *Lucrați în perechi!*
a) $9^x+3^x=272$; b) $16^x-4\cdot 4^x+3=0$; c) $2\cdot 2^x+3\cdot 2^{\frac{x}{2}}+1=0$.

11. *Investigați!* Pentru care valori ale lui x funcțiile $f, g\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=(\sqrt{2})^x$, $g(x)=(0,25)^{x-2}$, iau valori egale?

12. *Investigați!* Pentru care valori ale lui x funcția $f\colon D\to\mathbb{R}$ ia valori mai mari decât 1, dacă:
a) $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; b) $f(x)=2^{\frac{x}{2}}$.

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația (13-21):

13. a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2}\cdot\left(\frac{25}{64}\right)^{x^2}=\frac{625}{65536}$; b) $(0,6)^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$.

14. a) $5^{2x}+35\cdot 7^x=35\cdot 5^{2x}+7^x$; b) $4^x-3^{x+1,5}+2^{2x-1}=3^{x+0,5}$.

15. a) $81^{x^2-1}-36\cdot 9^{x^2-3}+3=0$; b) $8^x-2^{x+1}-4=0$.

16. a) $(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1}=4$; b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{x^2}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{x^2}=10$.

17. *Lucrați în grup!*
a) $4^x+10^x-2\cdot 25^x=0$; b) $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4,25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$; c) $3\cdot\sqrt[x]{4}-4\cdot\sqrt[x]{10}+\sqrt[x]{25}=0$.

18. *Lucrați în perechi!*
a) $4^{|x-3|}+4^{|x+1|}=4^x$; b) $|5^x-1|+|5^x-5|=2$.

19. a) $3^x+4^x=5^x$; b) $2^x-3^{\frac{x}{2}}=7$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^x=-3x^2+2x-1$.

20. a) $6^{(x+3)\log_6 2}\cdot 2^{x^2-2x}=32$; b) $7^{(x-2)\log_7 3}\cdot 3^{x^2+3x}=27$; c) $3^x\cdot 7^{\frac{x+3}{x}}=1323$.

21. (BAC 2016) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^{-3x-6}=2^{-x}\cdot 8$.

C₁

22. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $(x^2-x)\cdot 8^{\sqrt{2-x}}+12\cdot 8^{\sqrt{2-x}}=(x^2-x)\cdot 8^{\sqrt{2x}}+12\cdot 8^{\sqrt{2x}}$.

23. (BAC 2014) Determinați valorile reale ale parametrului a pentru care ecuația $\frac{(3^x-a)(x-2)}{x-1}=0$ are o singură soluție reală.

24. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, ecuația:
a) $625^{|x+1|}-2\cdot 25^{|x+1|}+a=0$; b) $3\cdot 4^{x-2}+27-a=a\cdot 4^{x-2}$; c) $a\cdot 2^x+2^{-x}=5$.

25. Să se compună o ecuație exponențială care:
a) nu are soluții; b) are o unică soluție; c) are două soluții.

4.3. Inecuații exponențiale

Problemă

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $2^{2x+2} < 6^x + 2\cdot 3^{2x+2}$.

Această inecuație este o inecuație exponențială.

Vom numi ***inecuație exponențială*** o inecuație în care careva exponent al puterii este o expresie ce conține necunoscuta, baza puterii fiind o constantă pozitivă diferită de 1.

De exemplu, inecuațiile $3^x < 9$, $9^x - 2\cdot 3^x - 8 \le 0$ sunt inecuații exponențiale.

Vom examina **metodele** principale de rezolvare a unor tipuri de inecuații exponențiale.

1 Inecuații exponențiale de tipul $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \ne 1$, $a \in \mathbb{R}$

Rezolvarea acestui tip de inecuații exponențiale se bazează pe

Teorema 4

Dacă $a > 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) < g(x)$.
Dacă $0 < a < 1$, atunci inecuația $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ este echivalentă cu inecuația $f(x) > g(x)$.

Demonstrația acestei teoreme are la bază proprietatea 4° (secvența 4.1) a funcției exponențiale $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \ne 1$.

Exemple

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $2^{3x-1} < 4$.

Rezolvare:

$$2^{3x-1} < 4 \Leftrightarrow 2^{3x-1} < 2^2 \Leftrightarrow 3x-1 < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

Răspuns: $S = (-\infty, 1)$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$.

Rezolvare:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} \Leftrightarrow x+2 > -2x \Leftrightarrow 3x > -2 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right).$$

Răspuns: $S = \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

În mod analog se rezolvă inecuațiile de tipul: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \ne 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Folosind aceleași metode ca și la rezolvarea ecuațiilor exponențiale, rezolvarea inecuațiilor exponențiale, de regulă, se reduce la rezolvarea uneia dintre inecuațiile de tipul:
$a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \le a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \ne 1$, $a \in \mathbb{R}$.

2 Inecuațiile exponențiale de tipul $f(a^x) > 0$ se rezolvă prin metoda utilizării necunoscutei auxiliare $a^x = t > 0$, care reduce inecuația inițială la ecuația de tipul $f(t) > 0$.

Exemplu

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $16^x + 2\cdot 4^x > 3$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. $16^x + 2\cdot 4^x > 3 \Leftrightarrow (4^x)^2 + 2\cdot 4^x - 3 > 0$.

Fie $4^x = t > 0$. Obținem inecuația $t^2 + 2t - 3 > 0$ cu mulțimea soluțiilor $S_1 = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Adică, $t \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$. Ținând cont de condiția $t > 0$, obținem $t \in (1, +\infty)$, sau $t > 1$. Revenim la necunoscuta x și obținem $4^x > 1$, sau $4^x > 4^0$. Deci $x > 0$, sau $S = (0, +\infty)$.

Răspuns: $S = (0, +\infty)$.

Similar se rezolvă inecuațiile de tipul $f(a^x) \ge 0$, $f(a^x) < 0$, $f(a^x) \le 0$.

Observație La rezolvarea inecuațiilor exponențiale se aplică metode similare celor aplicate la rezolvarea ecuațiilor exponențiale.

Exercițiii și probleme propuse

Profilul real

A₁

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $6^{x-3} > 36$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x+4} < \frac{1}{125}$; c) $5^{x^2+x} > 1$; d) $2^{x^2-x+8} > 0$;

e) $0{,}3^{x+5} < -4$; f) $2^x \cdot 5^x \le 0{,}01 \cdot (10^{x-2})^3$; g) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+3}$.

B₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația (**2**-**4**):

2. a) $25^x - 5^x - 20 \le 0$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^x + 10$; c) $0{,}49^{x+1} - 5 \cdot 0{,}7^{x+1} - 14 \ge 0$.

3. *Lucrați în perechi!*

a) $1000 \cdot 0{,}3^{\sqrt{x+1}-1} \ge 27$; b) $(\lg 4)^{2x-5} < (\log_4 10)^{2-x}$;

c) $3^{-x+2} \cdot 5^{-x+2} > 15 \cdot (225^{2x-1})^3$; d) $0{,}6^{x-3} < 5 \cdot 36^{3-x}$.

4. a) $2^{2x+2} < 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$ (propusă la începutul secvenței 4.3);

b) $\frac{1}{0{,}4^x + 5} < \frac{1}{0{,}4^{x+1} - 1}$; c) $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$; d) $8^x + 18^x - 2 \cdot 3^{3x} \le 0$;

e) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 > 0$; f) $\left(\frac{4}{7}\right)^{13x^2} \le \left(\frac{4}{7}\right)^{x^2+36} \le \left(\frac{49}{16}\right)^{-6x^2}$; g) $64^x - 7 \cdot 8^x + 6 \ge 0$.

5. (BAC 2017) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\left(\frac{9}{4}\right)^{-2x-1} \le \frac{3}{2}$.

6. (BAC 2023) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $0{,}25^{x+3} \le 8 \cdot 2^x$.

C₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația (**7**-**8**):

7. a) $1 < 5^{|x^2-x|} < 25$; b) $|3^x - 2| - |3^x - 1| \ge |3^x + 1| - 5$; c) $6^{2|x|} - 2 \cdot 18^{|x|} - 8 \cdot 3^{2|x|} > 0$.

8. a) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} \le 3^x - 9$; b) $4^{\sqrt{x}+1{,}5} + 6^{\sqrt{x}} > 9^{\sqrt{x}+1}$.

9. Să se compună o inecuație exponențială care are mulțimea soluțiilor intervalul $(-3, 2]$.

10*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a \in \mathbb{R}$, inecuația:

a) $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$; b) $\frac{a^x}{a^x - 1} > \frac{1 + a^{-x}}{1 + 2a^{-x}}$.

§5 Funcția logaritmică. Ecuații logaritmice. Inecuații logaritmice

5.1. Funcția logaritmică

Se ştie că funcția exponențială pentru $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ posedă funcție inversă. Inversa funcției exponențiale este numită *funcție logaritmică*. Altfel zis, este adevărată echivalența:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x,\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

Definiție

Se numeşte **funcție logaritmică** funcția $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1.$

De exemplu, $f_1, f_2\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \log_3 x,\ f_2(x) = \log_{\sqrt{2}} x,$ sunt funcții logaritmice.

Rețineți!

Majoritatea ***proprietăților funcției logaritmice*** se obțin din proprietățile funcției exponențiale cu aceeaşi bază.

1° $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, fiindcă $D(f)$ coincide cu codomeniul funcției exponențiale.

2° $E(f) = \mathbb{R}$, care este domeniul de definiție al funcției exponențiale.

3° Funcția logaritmică ia valoarea 0 numai în punctul $x_0 = 1$, întrucât $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Graficul ei nu intersectează axa Oy, fiindcă $0 \notin D(f)$.

4° Funcția logaritmică este strict crescătoare (respectiv descrescătoare) pe $\mathbb{R}_+^*$, dacă baza $a \in (1, +\infty)$ (respectiv $a \in (0, 1)$).
Într-adevăr, pentru $a > 1$ şi $x_1 > x_2$, aplicând identitatea logaritmică fundamentală, obținem $a^{\log_a x_1} > a^{\log_a x_2}$.
Aşa cum funcția exponențială este strict crescătoare (respectiv descrescătoare) pe $\mathbb{R}$, dacă $a > 1$ (respectiv $0 < a < 1$), avem: $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (respectiv $\log_a x_1 < \log_a x_2$).

5° În baza monotoniei, dacă $a > 1$, atunci funcția logaritmică ia valori pozitive pentru $x \in (1, +\infty)$ şi valori negative pentru $x \in (0, 1)$.
Dacă $0 < a < 1$, atunci funcția logaritmică ia valori pozitive pentru $x \in (0, 1)$ şi valori negative pentru $x \in (1, +\infty)$.
Într-adevăr, dacă $a > 1$, atunci în baza monotoniei, $\log_a x > 0 \Leftrightarrow \log_a x > \log_a 1 \Leftrightarrow x > 1$.
În mod analog se demonstrează celelalte propoziții.

6° Deoarece mulțimea $\mathbb{R}_+^*$ nu este simetrică față de originea sistemului de coordonate, funcția logaritmică nu este nici pară, nici impară.

7° Funcția logaritmică nu este periodică, deoarece este strict monotonă pe $\mathbb{R}_+^*$.

8° Funcția logaritmică nu are extreme locale.

9° Funcția logaritmică este inversabilă. Inversa ei este funcția exponențială cu aceeaşi bază.

10° Graficul funcției logaritmice $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1,$ este reprezentat în figura 7.13.

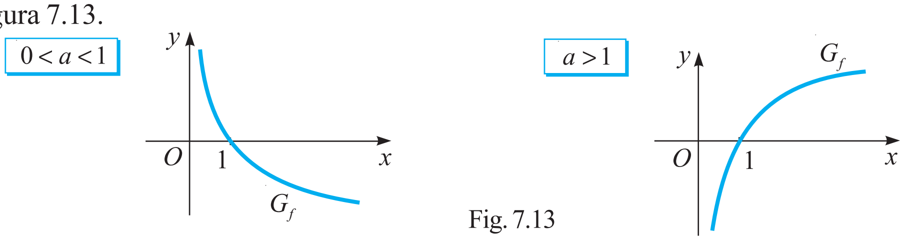


Fig. 7.13

Observație

Aplicând monotonia funcției logaritmice, se obțin următoarele inegalități echivalente (pentru $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}_+^*,\ a \neq 1$):

$$\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha > \beta,\quad a > 1,$$
$$\log_a \alpha > \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta,\quad 0 < a < 1,$$
$$\log_a \alpha = \log_a \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta,$$

care se folosesc la rezolvarea ecuațiilor şi inecuațiilor logaritmice.

Exercițiu rezolvat

Fie funcțiile $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f_1(x) = 2^x;\ f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*,\ f_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Să se reprezinte graficele funcțiilor logaritmice:

$g_1\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g_1(x) = f_1^{-1}(x) = \log_2 x,\ \ g_2\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g_2(x) = f_2^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.

b) Să se reprezinte într-un sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor f_1, f_2, g_1, g_2.

Rezolvare:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g_1(x) = \log_2 x$	–3	–2	–1	0	1	2	3
$g_2(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	3	2	1	0	–1	–2	–3

a) Construim tabelul de valori ale funcțiilor g_1 și g_2:
Graficele funcțiilor g_1, g_2 sunt reprezentate în figura 7.14.

b) Graficele funcțiilor f_1, f_2, g_1, g_2 sunt reprezentate în figura 7.15.
Observăm că graficele funcțiilor f_1 și g_1, f_2 și g_2 sunt simetrice față de bisectoarea cadranelor I și III.

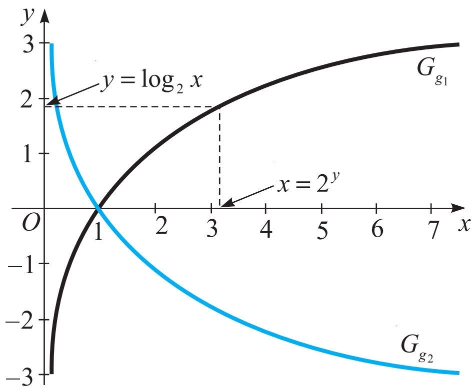


Fig. 7.14

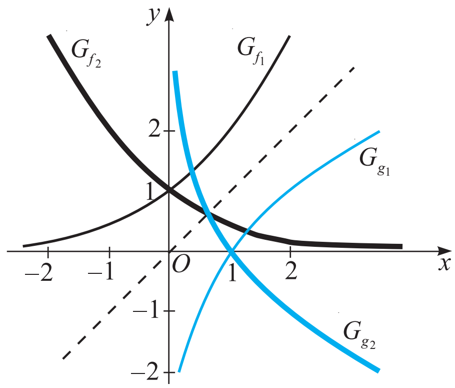


Fig. 7.15

Logaritmul și funcția logaritmică de asemenea se aplică în diverse domenii

- ✓ *În chimie*: la determinarea pH-ului soluțiilor lichide.
- ✓ *În seismologie*: scara Richter pentru măsurarea magnitudinii puterii cutremurului.
- ✓ *În fizică*: intensitatea sunetului la calcularea numărului de decibeli.
- ✓ *În astronomie*: strălucirea unui corp ceresc; calcularea magnitudinii aparente.
- ✓ *În biologie*: formula moleculei ADN; cochiliile melcilor și scoicilor de mare sunt formate din porțiuni de tipul graficelor unor funcții logaritmice.

Exercițiu rezolvat

Să se compare:

a) $\log_{\sqrt{3}} 2$ cu $\log_9 7$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ cu $\log_7 5$.

Rezolvare:

a) Vom transforma aceste expresii pentru a obține logaritmi în aceeași bază:

$$\log_{\sqrt{3}} 2 = 2\log_3 2 = \log_3 4, \qquad \log_9 7 = \frac{1}{2}\log_3 7 = \log_3 \sqrt{7}.$$

Cum funcția logaritmică cu baza mai mare decât 1 este strict crescătoare și $4 > \sqrt{7}$, rezultă că $\log_3 4 > \log_3 \sqrt{7}$. Deci, $\log_{\sqrt{3}} 2 > \log_9 7$.

b) În baza proprietății 5° a funcției logaritmice, $\log_{\frac{1}{2}} 3 < 0$, iar $\log_7 5 > 0$.

Prin urmare, $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_7 5$.

Exerciții și probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. *Investigați! Adevărat* sau *fals*? A/F

a) Funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_5 x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$.
b) Funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{0,5} x$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$.
c) Funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, este strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$.
d) Funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$, este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Să se traseze în același sistem de coordonate graficele funcțiilor $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_3 x$, și $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Ce ați observat?
b) Să se determine proprietățile funcțiilor f și g.

3. *Investigați!* Fie punctele $A(1;\ 0)$, $B(5;\ 1)$, $C\left(\frac{1}{5};\ -1\right)$, $D(5;\ -1)$, $E(25;\ 2)$. Să se determine care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției:
a) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_5 x$, b) $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

4. Să se scrie în casetă unul dintre semnele > sau <, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:
a) $\log_2 7 \bigcirc \log_2 5$; b) $\log_{\sqrt{3}} 2{,}5 \bigcirc \log_{\sqrt{3}} 1{,}2$; c) $\log_{0,2} 10 \bigcirc \log_{0,2} 5$;
d) $\log_{\frac{1}{5}} 0{,}2 \bigcirc \log_{\frac{1}{5}} 0{,}1$; e) $\log_{\sqrt{5}} 16 \bigcirc \log_{\sqrt{5}} 20$; f) $\lg 0{,}14 \bigcirc \lg 0{,}1$.

B

5. Să se determine valorile lui x pentru care logaritmul are sens:
a) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4)$; b) $\log_3(-x^2+5x-6)$; c) $\lg(1-x^2)$; d) $\log_x(x-1)$; e) $\log_{x+1} x^2$; f) $\ln(2-x)$.

6. *Lucrați în perechi!* Să se traseze graficul funcției:
a) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \lg x$. b) Să se determine proprietățile funcției f.

7. Se cunoaște că pH-ul unei soluții se calculează conform formulei pH = –lg[H⁺]. Apa pură conține concentrația ionilor de hidrogen egală cu $H^+ = 1 \cdot 10^{-7}$ moli. Să se calculeze pH-ul apei pure.

8. Ecuația pentru calcularea dobânzii compuse este $S = S_0 e^{rt}$, unde S_0 este suma de bani depusă în bancă, S este suma finală de bani din cont după t ani, timp în care valoarea contului crește, r – rata anuală a dobânzii. O persoană a depus în bancă 3 000 u. m. în plasament cu dobândă compusă cu rata anuală a dobânzii 5%. Să se determine peste câți ani suma inițială se va dubla.

9. Să se scrie $\log_3 x$ în funcție de $\log_9 x$.

C

10. Să se traseze graficui funcției: a) $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_2 |x|$; b) $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ g(x) = |\log_2 x|$.

Profilul real

A₁

1. Să se traseze graficul și să se determine proprietățile funcției $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \log_5 x$; b) $f(x) = \log_{0,1} x$; c) $f(x) = \lg x$; d) $f(x) = \ln x$.

2. Să se compare cu 0, apoi cu 1:
a) $\log_3 2$; b) $\log_3 0{,}2$; c) $\log_{\frac{1}{3}} 0{,}5$; d) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}2$.

3. Aplicând proprietățile funcțiilor studiate, să se compare:
a) $\lg 8$ cu $\lg 9$; b) $\log_{0,1} \frac{2}{5}$ cu $\log_{0,1} 0{,}41$; c) $\log_5 \frac{1}{3}$ cu $\log_5 \frac{1}{10}$.

4. *Lucrați în perechi!* Să se determine intervalele de monotonie, paritatea, mulțimea valorilor, extremele locale ale funcției definite prin formula $f(x) = \log_{1,3} x - 2$.

B₁

5. Să se selecteze numerele mai mari decât 1: $\log_{1,1} 0,5$; $\log_{2-\sqrt{3}} 1,01$; $\log_{123} 120$.

6. Să se compare $\log_{\sqrt{3}} 6$ cu $\log_3 5$.

7. Pentru care valori ale lui x funcțiile $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\sqrt{3}}(x-1)$, $g(x) = \log_3 x$, iau valori egale.

8. Să se arate că funcția f este inversabilă și să se determine inversa ei:
a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2^{x-3}$; b) $f\colon (2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3(x-2)$.

9. Pentru care valori ale lui x funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$ ia valori mai mari decât 1, dacă:
a) $f(x) = \log_{0,2} x$; b) $f(x) = \lg(x-3)$.

C₁

10. Să se determine intervalele de monotonie, paritatea, mulțimea valorilor, extremele locale ale funcției definite prin formula:
a) $f(x) = \lg|x^2 - 1|$; b) $f(x) = |\log_{\sqrt{2}}(x^2+1)|$.

11. Să se determine $D(f)$ al funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$: a) $f(x) = \log_{|x|}(x+2)$; b) $f(x) = \lg|9 - x^2| + \sqrt{x^2 - 1}$.

5.2. Ecuații logaritmice

Vom numi ***ecuație logaritmică*** o ecuație în care expresiile ce conțin necunoscuta apar în baza unor logaritmi și/sau sub simbolul acestora.

De exemplu, ecuațiile $\log_3(3x-1) = 2$, $\log_{x-1}(x^2 - 3x + 2) = 1$ sunt ecuații logaritmice.

Observație

Substituind suma $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ cu $\log_a(f(x)\cdot g(x))$, de regulă, DVA al expresiei $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ se modifică.

Într-adevăr, DVA al expresiei $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ este mulțimea soluțiilor sistemului $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$

iar DVA al expresiei $\log_a(f(x)\cdot g(x))$ este mulțimea soluțiilor totalității sistemelor $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

În aceste cazuri se pot obține soluții străine ecuației date. O situație similară este și în cazul în care expresia $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ se înlocuiește cu expresia $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Vom examina **metodele** principale de rezolvare a unor tipuri de ecuații logaritmice.

1 Ecuații logaritmice de tipul $\log_a f(x) = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$

Ecuația $\log_a x = b$ se numește ***ecuație logaritmică fundamentală***.

a) Aplicând definiția logaritmului, obținem soluția $x = a^b$.

Exemplu. Pentru ecuația $\log_3 x = 2$ obținem $x = 3^2 = 9$. *Răspuns*: $S = \{9\}$.

b) Ecuația $\log_a x = b$ poate fi rezolvată și în alt mod. Exprimăm b ca logaritm în baza a: $b = \log_a a^b$. Din $\log_a x = \log_a a^b$ obținem $x = a^b$.

Exemplu. Pentru ecuația $\log_4 x = 2$ obținem $\log_4 x = \log_4 16 \Leftrightarrow x = 16$. *Răspuns*: $S = \{16\}$.

c) Ambele metode pot fi aplicate la rezolvarea ecuațiilor logaritmice de tipul $\log_a f(x) = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$.

Exemplu. $\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ 2x - 1 = 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2}, \\ 2x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$

Exercițiu

• Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(2x-1) = 2$ prin metoda expusă în secvența b) de mai sus.

2 Ecuații logaritmice de tipul $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

La rezolvarea ecuațiilor logaritmice de acest tip vom ține cont de

Teorema 6

Dacă $a > 0,\ a \neq 1,$ atunci ecuația $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ este echivalentă cu unul dintre sistemele $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Exemplu. Să se rezolve în ℝ ecuația $\log_5(x^2+1) = \log_5(x+3)$.

Rezolvare:

$$\log_5(x^2+1) = \log_5(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = x+3, \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Răspuns: $S = \{-1;\ 2\}$.

3 Ecuații logaritmice rezolvabile prin metoda grupării

Exemplu. Să se rezolve în ℝ ecuația $\log_2(x-1) = \log_4(x+2)^4 - \log_2 3x$.

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases} x-1 > 0, \\ (x+2)^4 > 0, \\ 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x > 1.$ Grupând termenii în mod convenabil, în DVA obținem

$$\log_2(x-1) + \log_2 3x = \log_4(x+2)^4 \Leftrightarrow \log_2 3x(x-1) = \log_2(x+2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0,$$

cu $x_1 = 4 \in \text{DVA},\ \ x_2 = -\dfrac{1}{2} \notin \text{DVA}.$

Răspuns: $S = \{4\}$.

4 Ecuații logaritmice de tipul $f(\log_a x) = 0$

Ecuațiile logaritmice de acest tip se rezolvă prin metoda utilizării necunoscutei auxiliare. Prin substituția $\log_a x = t$, rezolvarea ecuației inițiale se reduce la rezolvarea ecuațiilor de tipul $\log_a x = t_i$, unde t_i sunt soluțiile ecuației $f(t) = 0$.

Exemplu. Să se rezolve în ℝ ecuația $\log_3^2(x+1) + \log_3(x+1) - 12 = 0$.

Rezolvare:

Efectuând substituția $\log_3(x+1) = t$, obținem ecuația $t^2 + t - 12 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 3,\ t_2 = -4$.

Rezolvăm totalitatea de ecuații $\left[\begin{array}{l} \log_3(x+1) = 3, \\ \log_3(x+1) = -4 \end{array}\right.$ și obținem $\left[\begin{array}{l} x = 26, \\ x = -\dfrac{80}{81}. \end{array}\right.$

Așa cum transformările sunt echivalente, rezultă că aceste numere sunt soluțiile ecuației.

Răspuns: $S = \left\{-\dfrac{80}{81};\ 26\right\}$.

5 Există ecuații logaritmice care nu se încadrează în tipurile examinate.

a) Ecuații cu logaritmi în baze diferite

Exemplu. Să se rezolve în ℝ ecuația $\log_4 x + \log_3 x = 2$.

Rezolvare:

Aplicăm formula de schimbare a bazei: $\dfrac{\lg x}{\lg 4} + \dfrac{\lg x}{\lg 3} = 2 \Leftrightarrow x = 10^{\frac{2\lg 4 \lg 3}{\lg 12}}$. (Verificați!)

Răspuns: $S = \left\{10^{\frac{2\lg 4 \lg 3}{\lg 12}}\right\}$.

b) Ecuații care conțin necunoscuta și în baza logaritmului, și sub simbolul acestuia

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_{x+1} 5 + \log_5(x+1) = 2$.

Rezolvare:

DVA: $\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x\neq 0. \end{cases}$ Deci, $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Deoarece $\log_{x+1} 5 = \dfrac{1}{\log_5(x+1)}$,

obținem: $\dfrac{1}{\log_5(x+1)} + \log_5(x+1) = 2 \Leftrightarrow \log_5(x+1) = 1 \Leftrightarrow x = 4$.

Răspuns: $S = \{4\}$.

6 Unele ecuații cu necunoscuta sub simbolul logaritmului pot fi rezolvate aplicând proprietățile funcțiilor care reprezintă membrii respectivi ai ecuației.

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_6(x+2) = 13 - 3x$.

Rezolvare:

DVA: $x \in (-2, +\infty)$. Prin probe, obținem soluția $x = 4$. Așa cum funcția f, definită prin formula $f(x) = \log_6(x+2)$, este strict crescătoare pe DVA, iar funcția g, definită prin formula $g(x) = 13 - 3x$, este strict descrescătoare pe DVA, rezultă că graficele acestor funcții au cel mult un punct de intersecție. Deci, ecuația are numai soluția $x = 4$.

Răspuns: $S = \{4\}$.

Observație

Metodele examinate pot fi clasificate astfel:

a) ***metoda potențierii***, adică trecerea de la ecuația $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ la ecuația $f(x) = g(x)$;

b) ***metoda utilizării necunoscutelor auxiliare***;

c) ***metoda logaritmării***, adică trecerea de la ecuația $f(x) = g(x)$ la ecuația $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2^{3x-1} = 5$.

Rezolvare:

$2^{3x-1} = 5 \Leftrightarrow \log_2 2^{3x-1} = \log_2 5 \Leftrightarrow 3x - 1 = \log_2 5 \Leftrightarrow 3x = 1 + \log_2 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}\log_2 10$.

Răspuns: $S = \left\{\dfrac{1}{3}\log_2 10\right\}$.

Exerciții și probleme propuse

Profilul real

A₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația (**1–4**):

1. a) $\log_2 x = 4$; b) $\log_{\frac{1}{3}} x = 0$; c) $\log_{100} x = 1$;
d) $\log_{0,3} x = -1$; e) $\log_{\sqrt{3}} x = -2$.

2. a) $\log_{0,1}(3x-1) = -1$; b) $\log_2(x^2-4) = 2$; c) $\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x) = 6$.

3. *Lucrați în perechi!*

a) $\log_3(x+2) = \log_3 x^2$; b) $\log_{0,1}(x^2-x-1) = \log_{0,1}(x+4)$; c) $\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x}+1) = \log_{\sqrt{5}}(2\sqrt{x})$.

4. a) $3(\lg(x-1)-2) = \lg 5 - \lg(x-1)$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x^2 - \lg 4 = \log_{\frac{1}{2}} x + \lg 25$.

B₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația (5–6):

5. a) $\lg(35-x^3)=3\lg(5-x)$; b) $\log_3^2(x+2)-3\log_3(x+2)-4=0$; c) $12-\lg^2 x=\lg x$.

6. a) $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$; b) $\log_x 2+\log_2 x=-2{,}5$; c) $\log_{\frac{1}{3}}^2 9x+\log_3\frac{x^2}{9}=8$;

d) $2\log_4 x^2-\log_4^2(-x)=4$; e) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$; f) $2\log_x 3+\log_{3x} 3+3\log_{9x} 3=0$;

g) $3^{\log_2 x^2}\cdot 5^{\log_4 x^2}=2025$; h) $\log_2(x^2-x)^2-2\log_2(x+2)=2$.

7. (BAC 2014) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_x(4x-3)=2$.

8. (BAC 2023) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3^2(-x)-2\log_3\left(\frac{x^2}{27}\right)-6=0$.

9. (BAC 2024) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=1$.

C₁

10. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(3^x-8)=|2-x|$.

11*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ și să se discute după parametrul a, $a\in\mathbb{R}$, ecuația:

a) $x^{\log_a x}=a^2x,\ a>0,\ x>0$; b) $a^{2\lg x-\lg(6-x)}=1$; c) $\lg 2x+\lg(2-x)=\lg\lg a$.

5.3. Inecuații logaritmice

Exercițiu Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $0{,}5^{\log_{0,1}(x-1)}<1$.

Rezolvare:

DVA: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Fiindcă inecuația este de tipul $a^{f(x)}<1$, unde $a=0{,}5<1$, obținem inecuația echivalentă $\log_{0,1}(x-1)>0$. Aceasta este o inecuație logaritmică.

Vom numi ***inecuație logaritmică*** o inecuație în care expresiile care conțin necunoscuta apar în baza unor logaritmi și/sau sub simbolul acestora.

De exemplu, inecuațiile $\log_5 x<2$, $\log_{0,2}(3x-1)\ge 0$, $\lg^2 x-\lg x-6\le 0$, $\log_{x+1}(x-3)>\log_{x+1} x$ sunt inecuații logaritmice.

Vom examina metodele principale de rezolvare a unor tipuri de inecuații logaritmice.

1 Inecuații logaritmice de tipul $\log_a f(x)<b$

Această inecuație este echivalentă cu totalitatea de sisteme $\begin{cases}0<a<1,\\ f(x)>a^b;\end{cases}$ $\begin{cases}a>1,\\ f(x)>0,\\ f(x)<a^b.\end{cases}$

2 Inecuații logaritmice de tipul $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, $a>0$, $a\ne 1$, $a\in\mathbb{R}$

Rezolvarea acestui tip de inecuații se bazează pe

Teorema 7

Dacă $a>1$, atunci inecuația $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ (1)

este echivalentă cu sistemul $\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)>g(x).\end{cases}$

Dacă $0<a<1$, atunci inecuația (1) este echivalentă cu sistemul $\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)<g(x).\end{cases}$

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_2(3x-1)>\log_2(5-x)$.

Rezolvare:

$$\log_2(3x-1)>\log_2(5-x)\Leftrightarrow\begin{cases}5-x>0,\\ 3x-1>5-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5,\\ x>1{,}5\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1{,}5;\ 5).$$

Răspuns: $S=(1{,}5;\ 5)$.

Similar se rezolvă inecuațiile logaritmice de tipul:

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x),\ \ \log_a f(x) < \log_a g(x),\ \ \log_a f(x) \leq \log_a g(x), \qquad (2)$$

unde $a > 0,\ a \neq 1,\ a \in \mathbb{R}$. 2

Rezolvarea inecuației logaritmice, de regulă, se reduce la rezolvarea uneia dintre inecuațiile (1) sau (2).

3 Rezolvarea inecuațiilor de tipul $\log_a f(x) \pm \log_a f(x) < \log_a h(x),\ a > 0,\ a \neq 1$

Utilizând proprietățile logaritmilor şi ținând cont de DVA al inecuației inițiale, rezolvarea acestor tipuri de inecuații se reduce la rezolvarea inecuațiilor de tipul $\log_a f(x) < b$ sau $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

Similar se rezolvă inecuațiile logaritmice de tipul $\log_a f(x) \pm \log_a g(x) \leq \log_a h(x)$.

Similar, rezolvarea inecuațiilor de tipul $\log_a f(x) \pm \log_a g(x) > \log_a h(x)$ se reduce la rezolvarea inecuațiilor de tipul $\log_a f(x) > b$ sau $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

4 Inecuații logaritmice de tipul $\log_{mx+n} a < b,\ a \in \mathbb{R}_+^*,\ b, m, n \in \mathbb{R}$

Această inecuație este echivalentă cu totalitatea de sisteme $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < mx+n < 1, \\ (mx+n)^b < a; \end{cases} \\ \begin{cases} mx+n > 1, \\ (mx+n)^b > a. \end{cases} \end{array}\right.$

Exemplu.

$$\log_{x+3} 8 < 2 \Leftrightarrow \log_{x+3} 8 < \log_{x+3}(x+3)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x+3 < 1, \\ 8 > (x+3)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 > 1, \\ 8 < (x+3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x^2+6x+9 < 8; \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x^2+6x+9 > 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ -3-2\sqrt{2} < x < -3+2\sqrt{2}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x \in (-\infty,\ -3-2\sqrt{2}) \cup (-3+2\sqrt{2},\ +\infty) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-3,\ -2), \\ x \in (-3+2\sqrt{2},\ +\infty). \end{array}\right.$$

Răspuns: $S = (-3,\ -2) \cup (-3+2\sqrt{2},\ +\infty)$.

5* Rezolvarea inecuațiilor logaritmice prin logaritmare

Exemplu. Să se rezolve în $\mathbb{R}_+^*$ inecuația $x^{2\lg x} > 100$.

Rezolvare:

DVA: $x \in (0, +\infty)$. Deoarece în DVA ambii membri ai inecuației iau valori pozitive, logaritmăm în baza 10 şi obținem: $\lg x^{2\lg x} > \lg 100 \Leftrightarrow 2\lg^2 x > 2$.

Deci, $\lg^2 x > 1 \Leftrightarrow (\lg x - 1)(\lg x + 1) > 0$. Obținem $\lg x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Deci, $\left[\begin{array}{l} \lg x < -1, \\ \lg x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \frac{1}{10}, \\ x > 10. \end{array}\right.$ Ținând cont de DVA, $x \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$.

Răspuns: $S = \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (10, +\infty)$.

Rețineți!

Dacă expresia se logaritmează în baza a, $a > 1$, atunci semnul („<”, „≤”, „>”, „≥”) inecuației obținute la logaritmare rămâne acelaşi ca şi în inecuația inițială; dacă expresia se logaritmează în baza a, $0 < a < 1$, atunci semnul inecuației obținute la logaritmare se schimbă în opusul său.

Exercițiii și probleme propuse

Profilul real

A₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația (1-3):

1. a) $\log_2(1-x)<0;$ b) $\lg(x^2+1)\le 1;$
c) $\ln(3-2x)\le 0;$ d) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-7)>-2;$
e) $\log_{0,1}(x^2-3x+2)>0;$ f) $\log_{\sqrt{3}}(x^2-2x)\ge 2.$

2. *Lucrați în perechi!* a) $\log_4(x^2+1)\ge\log_4(3x+1);$
b) $\log_{\frac{2}{3}}(2-x)\le\log_{\frac{2}{3}}(5x-8);$ c) $\lg(2x+1)>\log_{\frac{1}{10}}x.$

3. a) $\log_2(x-3)-\log_2 2x\ge 1;$ b) $\lg(2x-4)+\lg 3x<\lg(x+1).$

4. (BAC 2019) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\log_2(x-3)\le 1.$

B₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația (5-7):

5. a) $\log_{2x}8<1;$ b) $\log_{1-x}2<2;$ c) $\log_x 27<3;$ d) $\log_{x+1}3>2.$

6. a) $\lg^2(2x+3)-12\lg(2x+3)+20\le 0;$ b) $2\log^2_{\frac{1}{5}}6x-5\log_{\frac{1}{5}}6x+3>0;$
c) $\dfrac{1}{1+\log_3 x}+\dfrac{1}{1-\log_3 x}<2;$ d) $\log_2^2(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)-5\le 0.$

7. *Lucrați în grup!* a) $\log_{0,3}\left(\lg\dfrac{x^2-1}{x+3}\right)\ge 0;$ b) $\dfrac{\log_4(2-3x)}{x-4}<0;$
c) $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}}2\le 0;$ d) $\dfrac{\ln 6-\ln(10-x^2)}{\ln(x+2)}<0.$

C₁

8. (BAC 2011) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $2+\dfrac{\log_2^2|x|}{1+\log_2|x|}>\log_2|x|.$

9. (BAC 2012) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $(2x^2+11x-6)\cdot\sqrt{\log_{0,7}|x+6|}\ge 0.$

10. (BAC 2015) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|x|\log_3(3-x)\le 0.$

11*. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\log_3|x+5|-\log_{\frac{1}{3}}|x-1|\ge\log_3 x;$ b) $\dfrac{\log_{0,2}|x+1|}{x^2-9x}>0.$

12*. Fie inecuația $\left(\log_2\dfrac{4a+4}{a}\right)\cdot x^2+2\left(\log_2\dfrac{2a}{a+1}\right)\cdot x+\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}>0.$ Să se determine toate valorile parametrului real a, astfel încât inecuația să fie adevărată pentru orice valori reale ale lui x. (Olimpiada Republicană la Matematică, 2012)

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: a) $f(x)=(2-\sqrt{3})x+\sqrt{5};$ b) $f(x)=(\sqrt{3}-2)x-7;$ c) $f(x)=\dfrac{2}{17}x-\dfrac{3}{53}$
1) să se determine zeroul funcției f;
2) să se determine intervalul în care f ia valori pozitive;
3) să se reprezinte graficul G_f.

2. *Lucrați în perechi!* Olga a acumulat suma de 500 de lei. Ea a decis că poate să adauge lunar la această sumă câte 80 de lei.
a) Să se determine funcția care descrie dependența dintre suma acumulată și numărul de luni.
b) Peste câte luni ea va acumula suma de 1900 de lei, necesară pentru procurarea unui microcalculator?

3. Temperatura solului la suprafața pământului este de 20°C, la adâncimea de 2 km, temperatura este de 90°C, iar la adâncimea de 10 km – de 370°C.
a) Presupunând că dependența dintre temperatură și adâncime este liniară, să se determine această funcție.
b) Să se afle temperatura solului la adâncimea de 3,5 km.

4. Arenda unui autoturism în SUA pentru o zi depinde de distanța parcursă şi constituie (de exemplu): 41 \$ pentru 100 de mile; 51,8 \$ pentru 160 de mile; 63,5 \$ pentru 225 de mile.
a) Să se arate că dependența dintre costul arendei şi numărul de mile parcurse de autoturism este liniară şi să se determine funcția respectivă.
b) Ce sumă trebuie achitată, dacă autoturismul parcurge 200 de mile?

B

5. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$: a) $f(x)=(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x+3)^2$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$.

6. ***Lucrați în perechi!*** Să se determine intervalele pe care funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$ ia valori pozitive, dacă:
a) $f(x)=x^2+x-6$; b) $f(x)=\frac{4}{2-x}$; c) $f(x)=\log_6(x+2)$; d) $f(x)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}$.

7. Înălțimea h (de la podea) la care se află o minge aruncată în sus se determină conform formulei $h(t)=-t^2-0{,}5t+1{,}5$, unde t este timpul (măsurat în secunde), $t\in[0;\,1{,}5]$.
a) Să se determine momentul de timp t în care mingea se află la înălțimea maximă.
b) Peste cât timp mingea va cădea pe podea?

8. Într-un râu din America de Sud, nivelul apei s-a ridicat după ploaie. El a început să scadă cu 3 țoli pe oră (1 țol = 2,54 cm) şi în momentul de față este cu 3 picioare mai sus de nivelul normal (1 picior = 30 cm). Presupunând că nivelul apei scade uniform, să se scrie funcția de gradul I ce descrie dependența dintre nivelul apei (mai sus de cel normal) şi timp. Peste câte ore nivelul apei va reveni la cel normal?

C

9. ***Investigați!*** Utilizând proprietățile funcțiilor studiate, inclusiv graficele lor, să se compare:
a) $\sqrt[3]{720}$ cu $\sqrt[3]{722}$; b) $\sqrt[3]{-91}$ cu $-\sqrt[3]{91{,}2}$; c) $(\sqrt{2}-1)^{15}$ cu 1;
d) $3^{-\frac{2}{7}}$ cu $4^{-\frac{2}{7}}$; e) $\log_3\pi$ cu $\log_3 3{,}1$; f) $\log_{0,1}\pi$ cu $\log_{0,1}\pi^2$.

10. ***Lucrați în grup!*** **Proiect:** *Aplicații ale funcției exponențiale în diverse domenii*

Profilul real

A_1

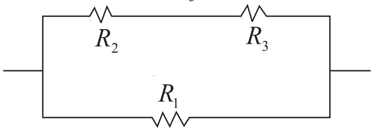
1. Utilizând proprietățile funcțiilor studiate, să se compare:
a) $\sqrt[3]{\pi}$ cu $\sqrt[3]{\frac{17}{5}}$; b) $(1{,}7)^{-\frac{5}{3}}$ cu $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{3}}$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$ cu $(\sqrt{2})^{-3}$;
d) $\log_{0,9}(2-\sqrt{3})$ cu $\log_{0,9}\sqrt[13]{2}$; e) $\log_{\sqrt{3}}17$ cu $\log_3 5$.

2. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $(\sqrt{3})^x=-1$; b) $15^x=3^x\cdot 5^{\sqrt{2}}$; c) $\log_{\sqrt{3}}(|x|+2)=-2$;
d) $\log_2 3x=\log_{32}21$; e) $\sqrt{x+2}=0{,}5-\sqrt{3}$; f) $\pi^{x^2+4}=\pi^2$.

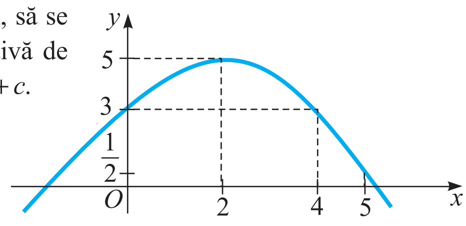
3. ***Lucrați în perechi!*** Să se determine domeniul de definiție al funcției definite prin formula:
a) $f(x)=\sqrt{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x^2-5x-6}}$; b) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}-\sqrt{x}$; c) $f(x)=(x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

B_1

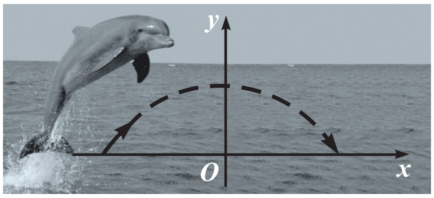
4. Pentru circuitul reprezentat se ştie că:
$R_{total}=2{,}25\,\Omega$, $R_1=3\,\Omega$, $R_2=4\,\Omega$.
Să se determine R_3.



5. Folosind datele din desen, să se determine funcția respectivă de gradul II $f(x)=ax^2+bx+c$.



6. (BAC 2024) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $(3\cdot 9^x-4\cdot 3^x+1)\sqrt{1-x}\le 0$.

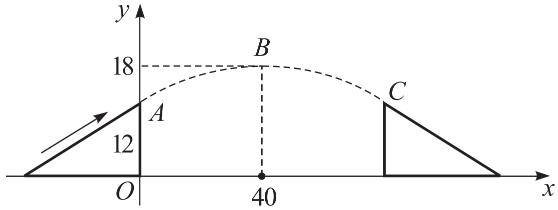


7. Un delfin sare din apă şi urmează traseul: $y = -\frac{5}{36}x^2 + 20.$

a) La ce înălțime maximă deasupra apei ajunge delfinul?

b) Care este distanța dintre punctele de ieşire şi de intrare în apă?

8. Un motociclist se deplasează pe un plan înclinat şi, parcurgând o parte a drumului prin aer, ajunge pe un alt plan înclinat. În baza datelor din desen, să se determine funcția de gradul II, a cărei porțiune de grafic reprezintă traiectoria *ABC*.

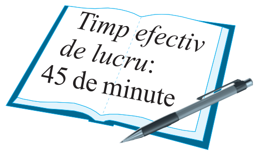


C₁

9*. Numărul real pozitiv *x* satisface inegalitatea $|\log_9 x^{2x} - \log_{\sqrt{3}} \sqrt{x}| + ||1-x| - |\log_3 x|| \le (x-1)\log_{27} x^{x^3}$. Să se determine numărul $\log_3 \frac{9x}{3^x}$. (Olimpiada Republicană la Matematică, 2010)

10. *Lucrați în grup!* **Proiect:** *Aplicații ale funcției exponențiale în economie*

Test sumativ II



Profilurile umanistic, arte, sport

1. Se ştie că este adevărată inegalitatea $(\sqrt{5})^m < (\sqrt{5})^n$.
Scrieți în casetă unul dintre semnele <, > astfel încât propoziția obținută să fie adevărată. m ☐ n

2. Fie perechea de numere $0{,}1^{-3}$ şi 10^{-2}. Aflați care dintre acestea este mai mare.

3. Determinați pentru care valori ale lui *x* are sens logaritmul: $\log_{1,2}(x^2 - 5x - 6)$.

4. a) Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

b) Indicați litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

„Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$”. | **A** | **F** |

c) Determinați proprietățile funcției *f*.

5. Dacă vom aduna vârstele tatălui şi a fiicei, vom obține 52 de ani. Peste 8 ani, valoarea raportului dintre vârsta tatălui şi vârsta fiicei va fi egală cu 3. Aflați câți ani are tatăl şi câți – fiica (inițial).

Profilul real

1. Indicați litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

„$\log_2 |1-x|$ are sens pentru $x \in \mathbb{R}$”. | **A** | **F** |

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 5^{1-x}$.
Scrieți în casetă unul dintre semnele $\in$, $\notin$ astfel încât propoziția obținută să fie adevărată. $A(3; 25)$ ☐ G_f.

3. Pe parcursul unei perioade de 10 luni ale unui an, veniturile (în mii lei) ale unei firme de vânzare a autoturismelor au variat conform legii: $f(x) = \begin{cases} -x+2, & 0 \le x \le 2 \\ -2x^2 + 20x - 32, & 2 < x \le 10, \end{cases}$ x – numărul de ordine al lunii.

a) Reprezentați graficul veniturilor firmei.

b) Determinați:

1) în care dintre aceste 10 luni veniturile firmei au fost maxime;
2) perioadele în care firma a lucrat în pierdere;
3) perioadele de creştere a veniturilor;
4) perioadele de descreştere a veniturilor.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 = -1$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $9^{2x-\sqrt{x^2-1}} - 4 \cdot 3^{2x+1-\sqrt{x^2-1}} + 27 \ge 0$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $36^{|x|} - 2 \cdot 6^{|x|} + a = 0$, unde *a* este parametru real.

MODULUL 8 Elemente de trigonometrie

Ochii înțeleptului văd mai departe.
Proverb românesc

Obiective

- *măsurarea unghiurilor folosind diverse unități de măsură;
- *utilizarea cercului trigonometric la rezolvarea unor exerciții şi probleme;
- *utilizarea în diverse contexte a proprietăților funcțiilor trigonometrice şi a funcțiilor trigonometrice inverse;
- *identificarea şi utilizarea identităților fundamentale ale trigonometriei şi a formulelor trigonometrice în diverse contexte;
- *identificarea ecuațiilor şi inecuațiilor trigonometrice şi aplicarea diverselor metode de rezolvare a acestora;
- *aplicarea elementelor de trigonometrie în diverse domenii.

§1 Funcții trigonometrice

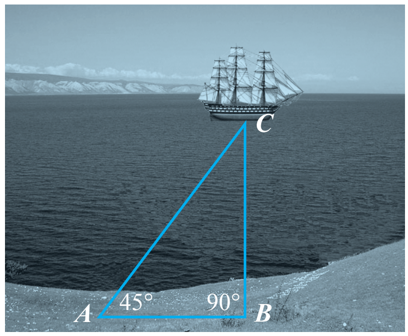
1.1. Sisteme de măsură pentru unghiuri şi arce. Generalizarea noțiunilor de *unghi* şi *arc*

Investigați!

Ştiați că...

grecii antici au învățat primii să determine distanța de la țărm până la corabia din mare? Observați desenul şi argumentați cum procedau aceştia.

Concluzie: procedeul poate fi utilizat în situații similare (dați exemple). Adică, elementele de trigonometrie, măsurile unghiurilor sunt aplicabile în diverse domenii, inclusiv în viața cotidiană.



1 *Măsura în grade*

Se ştie că fiecărui arc circular îi corespunde un unghi la centru unic determinat. În trigonometrie se folosesc două unități de măsură a unghiurilor: gradul şi radianul.

În sistemul de măsură în grade, unitatea de măsură a unghiului este ***gradul*** (1°), definit ca măsura unghiului egal cu a 90-a parte din unghiul drept. Submultiplii săi sunt ***minutul*** (1′), egal cu a 60-a parte din grad, şi ***secunda*** (1″) – a 60-a parte din minut.

Deci, $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Măsura unghiului alungit (desfăşurat) este de 180° (de 2 ori mai mare decât a unghiului drept); măsura unghiului complet (în jurul unui punct) este de 360°.

2 *Măsura în radiani*

Sistemul de măsură în radiani a unghiurilor are la bază următoarea afirmație: raportul dintre lungimea arcului circular, corespunzător unui unghi la centru, şi lungimea razei cercului este o mărime constantă, care nu depinde de lungimea razei.

Definiție

Fie l lungimea arcului circular de rază r. Numărul α, egal cu raportul dintre lungimea arcului circular şi lungimea razei cercului, se numeşte **măsura în radiani a arcului** (şi a unghiului la centru, corespunzător acestui arc), adică

$$\alpha = \frac{l}{r}. \qquad (1)$$

Dacă în (1) considerăm $l = r$, atunci $\alpha = 1$ radian. Prin urmare, în acest sistem de măsură, unitatea de măsură numită ***radian*** (notat **rad**) este măsura unghiului la centru, corespunzător arcului circular de lungimea razei cercului (fig. 8.1).

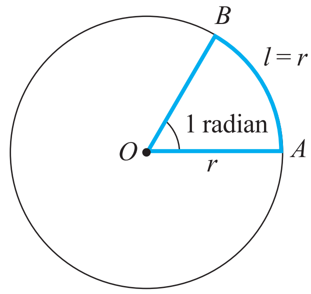


Fig. 8.1

Exemple

1. Măsura în radiani (α) a unghiului complet este de 2π rad. Într-adevăr, aşa cum lungimea cercului este $2\pi r$, rezultă că $\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ rad, unde $\pi \approx 3{,}1416$.

2. Măsura în radiani a unghiului alungit este π rad, iar a unghiului drept este $\frac{\pi}{2}$ rad.

3 ***Trecerea de la o unitate de măsură la alta*** a unui unghi se realizează prin relația

$$\boxed{\frac{a}{\alpha} = \frac{180°}{\pi},} \qquad (2)$$

unde a este măsura în grade, iar α – măsura în radiani a unghiului.

Din (2) rezultă că $\boxed{\alpha = \frac{a}{180°}\cdot\pi \text{ rad}, \quad a = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 180°.}$

Exemple

1. Unghiul de 45° are în radiani măsura $\alpha = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4}$.

2. Unghiul de 1 radian are în grade măsura $a = \frac{180°\cdot 1}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}1416} \approx 57°17'44''$.

3. Unghiul de 2,5 radiani are în grade măsura $a = \frac{2{,}5}{\pi}\cdot 180° \approx 143°$.

4 ***Unghiuri şi arce orientate***

În geometrie, unghiul se consideră ca reuniunea a două semidrepte închise care au aceeaşi origine, însă acest concept nu poate fi aplicat în unele domenii practice. De exemplu, nu este suficient să spunem: „Răsuceşte piulița cu 30°" – trebuie să indicăm şi direcția de rotație. Deseori, este necesar să rotim un ax, o cheie cu un unghi mai mare decât 360°. Pentru soluționarea acestor probleme, vom generaliza noțiunile de unghi şi arc, examinând ***unghiuri*** şi ***arce orientate***.

În plan sunt două sensuri pentru rotația unei semidrepte în jurul originii sale: sensul opus mişcării ácelor de ceasornic, numit ***sens pozitiv***, şi sensul mişcării ácelor de ceasornic, numit ***sens negativ***. Sensul de rotație se arată cu o săgeată (fig. 8.2). Considerăm că unghiul orientat AOM este generat de semidreapta $[OA$, care se roteşte în jurul originii sale. Întrucât orice unghi orientat AOM are una din laturi semiaxa pozitivă $[Ox$, considerăm pentru viitor că unghiul AOM este determinat de semidreapta $[OM$. În concordanță cu sensul rotației semidreptei $[OA$, vom numi unghiul AOM (şi arcul pe care îl descrie punctul A) ***pozitiv*** sau ***negativ***.

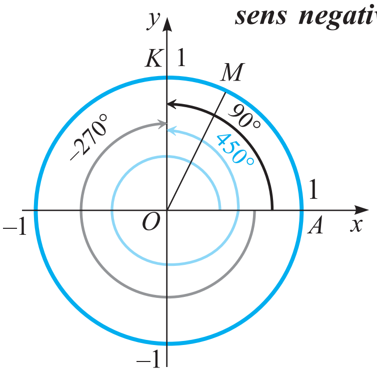


Fig. 8.2

Fie semidreapta $[OM$ formează cu direcția pozitivă a axei Ox unghiul de măsură α $(0 < \alpha < 2\pi)$. Dacă semidreapta $[OA$ mai efectuează n $(n \in \mathbb{N}^*)$ rotații complete, atunci vom obține un unghi de măsura $\alpha + 2\pi n$ sau $\alpha - 2\pi n$, după cum rotațiile se efectuează în sens pozitiv sau negativ. În figura 8.2 sunt indicate trei unghiuri formate de semidreapta $[OK$ cu semidreapta $[OA$: un unghi de măsura $90°$ $\left(\text{sau } \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$, al doilea – de măsura $450°$ $\left(\text{sau } \frac{5\pi}{2} \text{ rad}\right)$, al treilea – de măsura $-270°$ $\left(\text{sau } -\frac{3\pi}{2} \text{ rad}\right)$. În general, măsura oricărui unghi orientat, format de semidreptele $[OK$ şi $[OA$ în situația descrisă, poate fi determinată aplicând formula:

$a = 90° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$ $\left(\text{sau } \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n,\ n \in \mathbb{Z}\right)$.

Cerc trigonometric se numeşte cercul de rază 1 cu centrul în originea sistemului de coordonate.

Vom examina, de regulă, unghiuri determinate de semidreapta $[OM$ şi de semiaxa pozitivă $[Ox$, unde punctul M aparține cercului trigonometric (fig. 8.2). Vom spune că unghiul AOM aparține cadranului I, II, III sau IV, după cum punctul M aparține cadranului I, II, III sau, respectiv, IV, iar punctul A aparține semidreptei $[Ox$.

În aceste condiții se obține o corespondență biunivocă dintre mulțimea unghiurilor orientate (mulțimea arcelor) şi mulțimea numerelor reale, având stabilită unitatea de măsură – gradul sau radianul. Ținând cont de această corespondență, convenim ca prin α, β etc. să se noteze atât unghiul, cât şi măsura lui.

1.2. Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă

Problemă

Să se determine înălțimea unui stâlp de electricitate (perpendicular pe suprafața pământului), folosind numai un instrument de măsurat lungimea segmentelor.

Rezolvare:

Fie AB înălțimea stâlpului, d – o dreaptă perpendiculară pe AB ce trece prin punctul A (fig. 8.3). În punctul A_1 ($A_1 \neq A$) amplasăm vertical (paralel cu AB) o bară rectilinie $[A_1B_1]$, a cărei lungime este cunoscută. Vizual, determinăm punctul O pe dreapta d, astfel încât punctele O, B_1, B să fie coliniare. Triunghiurile dreptunghice OA_1B_1 şi OAB sunt asemenea (Argumentați!), de aceea $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1}$, de unde $AB = \frac{A_1B_1}{OA_1} \cdot OA$. Fiindcă lungimile segmentelor OA_1, A_1B_1, OA pot fi determinate prin măsurări, vom calcula lungimea segmentului AB.

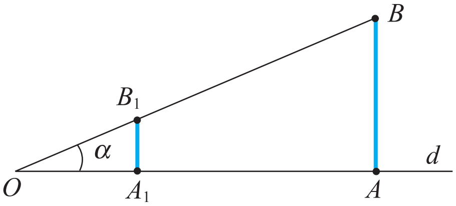


Fig. 8.3

În baza faptului că în triunghiurile dreptunghice (asemenea) OA_1B_1, OAB (fig. 8.3) rapoartele de tipul $\frac{A_1B_1}{OA_1}$, $\frac{AB}{OA}$ au valoare constantă, au fost definite noțiunile *sinus*, *cosinus*, *tangentă*, *cotangentă* pentru mărimile unghiurilor ascuțite. Anume:

$$\sin\alpha = \frac{AB}{OB},\ \cos\alpha = \frac{OA}{OB},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OA},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{OA}{AB}.$$

Definirea funcțiilor trigonometrice pentru măsura unghiului arbitrar are ca suport următoarea

Lemă

Fie $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ puncte într-un sistem cartezian de coordonate xOy şi $y_1 \cdot y_2 \neq 0$. Dacă semidreptele $[OM_1$, $[OM_2$ coincid ($M_1 \neq O$, $M_2 \neq O$), atunci

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2},\ \frac{x_1}{OM_1} = \frac{x_2}{OM_2},\ \frac{y_1}{OM_1} = \frac{y_2}{OM_2} \text{ (fig. 8.4).}$$

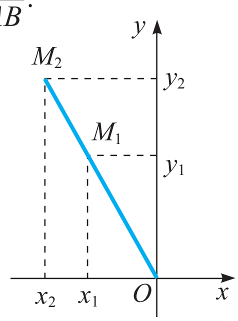


Fig. 8.4

Definiții

Fie cercul trigonometric și unghiul α format de semidreapta $[OM$ cu semiaxa pozitivă $[Ox$ (punctul $M(x, y)$ aparține cercului trigonometric) (fig. 8.5).

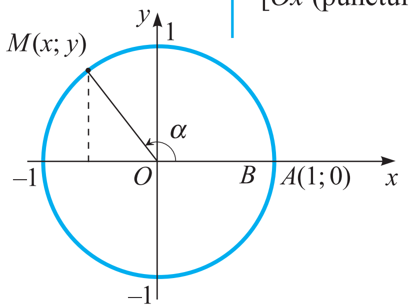


Fig. 8.5

- **Sinusul unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este ordonata punctului M (adică $\sin\alpha = y$).
- **Cosinusul unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este abscisa punctului M (adică $\cos\alpha = x$).
- **Tangenta unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este raportul dintre ordonata și abscisa punctului M (adică $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y}{x}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).
- **Cotangenta unghiului $\boldsymbol{\alpha}$** este raportul dintre abscisa și ordonata punctului M (adică $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{x}{y}$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$).

Observație

Au fost definite, de fapt, funcții numerice pe submulțimi ale mulțimii numerelor reale, deoarece măsura în radiani a oricărui unghi este un număr real.

Definiții

Se numește funcție:
- **sinus** – funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;
- **cosinus** – funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$;
- **tangentă** – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$;
- **cotangentă** – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Observație

În unele cazuri se mai folosesc și funcțiile:

secantă – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;

cosecantă – funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$.

Rețineți!

Funcțiile sinus, cosinus, tangentă, cotangentă, secantă și cosecantă se notează **sin**, **cos**, **tg**, **ctg**, **sec** și, respectiv, **cosec** și se numesc ***funcții trigonometrice***.

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice sin, cos, tg, ctg pentru unghiurile de măsuri 0, $\dfrac{3\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{3}$.

Rezolvare:

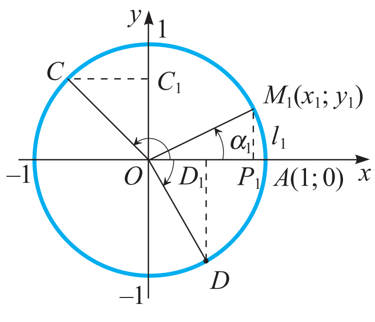


Fig. 8.6

Unghiurile 0, $\dfrac{3\pi}{4}$, $-\dfrac{\pi}{3}$ sunt determinate respectiv de semidreptele $[OA$, $[OC$, $[OD$ (fig. 8.6). Așa cum unghiurile neorientate COC_1 și DOD_1 au măsurile de $\dfrac{\pi}{4}$ și, respectiv, $\dfrac{\pi}{3}$ radiani, din triunghiurile OC_1C, OD_1D obținem $OC_1 = CC_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $DD_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $OD_1 = \dfrac{1}{2}$, ceea ce permite să determinăm coordonatele punctelor respective: $A(1, 0)$, $C\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Astfel, aplicând definițiile funcțiilor trigonometrice, obținem:

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1;$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3},\quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, iar $\operatorname{ctg} 0$ nu există.

În mod analog se obțin valorile funcțiilor trigonometrice pentru unele unghiuri frecvent folosite (tabelul 1).

Tabelul 1

	α (radiani)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	α (grade)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	–30°	–45°	–60°	–90°
Valoarea funcției	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există
	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	nu există	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.3. Proprietățile fundamentale ale funcțiilor trigonometrice

I. Funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

1° ***Domeniul de definiție***. $D(\sin) = \mathbb{R}$, fiindcă pentru fiecare $\alpha \in \mathbb{R}$ se determină în mod unic ordonata punctului M de pe cercul trigonometric, unde $[OM$ formează unghiul de măsură α cu semiaxa pozitivă $[Ox$ (fig. 8.7).

2° ***Domeniul valorilor***. $E(\sin) = [-1, 1]$. Incluziunea $[-1, 1] \supseteq E(\sin)$ este evidentă, fiindcă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $|\sin\alpha| = |y_M| \le 1$.

Incluziunea inversă $[-1, 1] \subseteq E(\sin)$ se obține folosind cercul trigonometric. Pentru orice $a \in [-1, 1]$ examinăm pe axa Oy punctul $K(0, a)$ (fig. 8.7). Dreapta paralelă cu axa Ox ce trece prin punctul K va intersecta cercul trigonometric cel puțin într-un punct, M. Din construcție rezultă că pentru orice unghi α determinat de semidreapta $[OM$ avem $\sin\alpha = a$, adică a este o valoare a funcției sinus. Se obține $E(\sin) = [-1, 1]$.

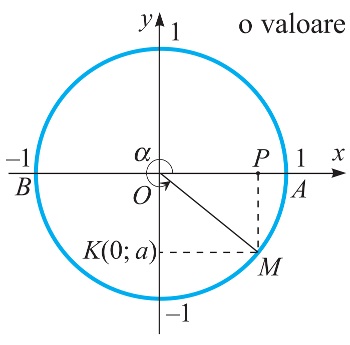


Fig. 8.7

3° ***Zerourile*** funcției sinus sunt soluțiile ecuației $\sin\alpha = 0$, adică $y = 0$. Se știe că punctele au ordonata zero, dacă ele aparțin axei Ox. În figura 8.7, acestea sunt punctele A și B. Unghiurile determinate de semidreapta $[OA$ au măsura $0 + 2\pi\cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar cele determinate de semidreapta $[OB$ au măsura $\pi + 2\pi\cdot m$, $m \in \mathbb{Z}$. Reuniunea acestor două mulțimi numerice este mulțimea $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Astfel, zerourile funcției sinus sunt numerele $x \in \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției sinus cu axa Oy sunt determinate de egalitatea $\sin 0 = 0$, adică sunt $(0; 0)$.

4° ***Periodicitatea***. Din definiția funcției sinus rezultă că $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha - 2\pi) = \sin\alpha$, deoarece unghiurile α, $\alpha \pm 2\pi$ sunt determinate de aceeași semidreaptă. Aceasta înseamnă că numărul $T = 2\pi$ este perioadă a funcției sinus. Să arătăm că $T = 2\pi$ este ***perioadă principală*** a funcției sinus (perioada pozitivă minimă). Presupunând că există o perioadă mai mică T_1, $T_1 > 0$, obținem $\sin x = \sin(x + T_1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. În particular, pentru $x = 0$ avem $0 = \sin 0 = \sin T_1$. Întrucât numărul T_1 este un zerou al funcției sinus, el are forma $T_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Unica valoare pozitivă de forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mai mică decât 2π, este $T_1 = \pi$. Dacă π ar fi perioadă, am obține $\sin x = \sin(x + \pi)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Această relație nu este însă adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

De exemplu, pentru $x=\frac{\pi}{2}$ avem $\sin\frac{\pi}{2}=1$ şi $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-1$. Rezultă că π nu este perioadă. Astfel, perioada principală a funcției sinus este 2π.

Rețineți! În baza proprietăților funcțiilor periodice, conchidem că este suficient să studiem proprietățile, variația funcției sinus pe orice interval de lungime 2π.

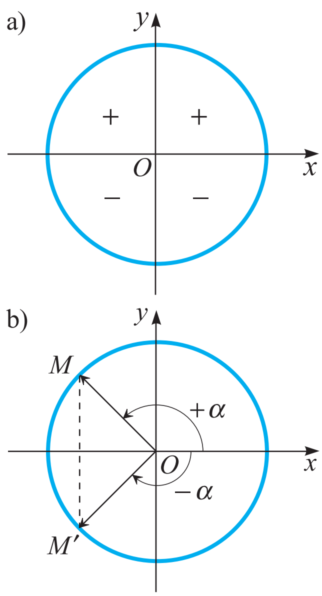


Fig. 8.8

5° ***Semnul*** funcției sinus coincide cu semnul ordonatei punctului respectiv al cercului trigonometric. Dacă $\alpha\in(2\pi k,\pi+2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$, adică unghiul α e din cadranul I sau II, atunci funcția sinus ia valori pozitive (fig. 8.8 a). Dacă $\alpha\in(2\pi k-\pi,2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$, adică unghiul α e din cadranul III sau IV, atunci funcția sinus ia valori negative (fig. 8.8 a).

6° ***Paritatea***. Dacă semidreapta $[OM$ determină un unghi α, iar semidreapta $[OM'$ determină unghiul $-\alpha$ (fig. 8.8 b), atunci punctele M, M', ce aparțin cercului trigonometric, sunt simetrice față de axa Ox. În acest caz, se obține

$$\sin(-\alpha)=y_{M'}=-y_M=-\sin\alpha,$$

pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția sinus este o funcție impară.

7° ***Monotonia***. În § 2 se va demonstra că funcția sinus este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, cu valori de la –1 până la 1, şi strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, cu valori de la 1 până la –1.

8° ***Extremele***. În baza monotoniei funcției sinus, punctele $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, sunt puncte de maxim local ale acesteia, adică $x_{\max}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, şi $y_{\max}=f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=1$, iar punctele $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, sunt punctele ei de minim local, adică $x_{\min}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, şi $y_{\min}=f\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)=-1$.

9° ***Graficul*** funcției sinus pe $[0,2\pi]$ se construieşte mai uşor dacă se foloseşte cercul trigonometric. Pentru a obține, geometric, valorile aproximative ale funcției sinus (fig. 8.9), se va ține cont că $2\pi\approx 6{,}28$.

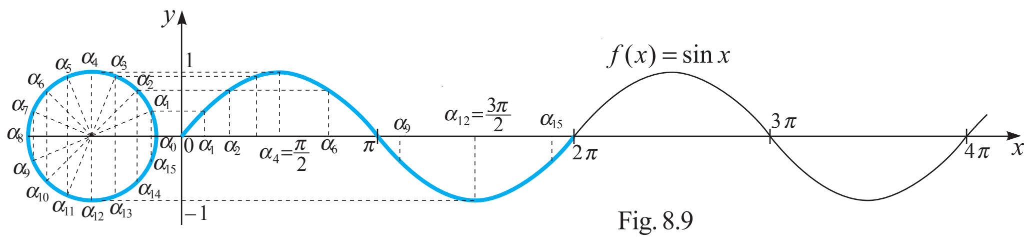


Fig. 8.9

Pe intervalele $[2\pi,4\pi]$, $[-2\pi,0]$, … graficul funcției sinus se obține în baza periodicității funcției sinus, repetând comportarea acesteia pe $[0,2\pi]$.

II. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$

Proprietățile funcției cosinus se obțin în mod analog cu proprietățile funcției sinus.

1° $D(\cos)=\mathbb{R}$.

2° $E(\cos)=[-1,1]$.

3° Zerourile funcției cosinus sunt numerele $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$, iar graficul ei intersectează axa Oy în punctul (0; 1).

4° Funcția cosinus este periodică, cu perioada principală 2π.

5° Semnele valorilor funcției cosinus coincid cu semnele absciselor punctelor cercului trigonometric: valorile funcției cosinus sunt pozitive, dacă unghiul α e din cadranul IV sau I $\left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right)$, şi negative, dacă unghiul α e din cadranul II sau III $\left(\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}\right)$.

6° Funcția cosinus este pară, deoarece dacă semidreptele $[OM$ şi $[OM'$ determină, respectiv unghiurile α şi $-\alpha$, atunci punctele M, M' ale cercului trigonometric sunt simetrice față de axa Ox şi au aceeaşi abscisă. Deci, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

7° Funcția cosinus este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $[\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$ (cadranele III, IV), cu valori de la –1 la 1, şi strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $[2\pi k, \pi+2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$ (cadranele I, II), cu valori de la 1 până la –1.

8° Pentru funcția cosinus, punctele $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, sunt puncte de maxim local, adică $x_{\max}=2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, şi $y_{\max}=f(2\pi k)=1$, iar punctele $\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, sunt puncte de minim local, adică $x_{\min}=\pi+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, şi $y_{\min}=f(\pi+2\pi k)=-1$.

9° O porțiune a graficului funcției cosinus este reprezentată în figura 8.10.

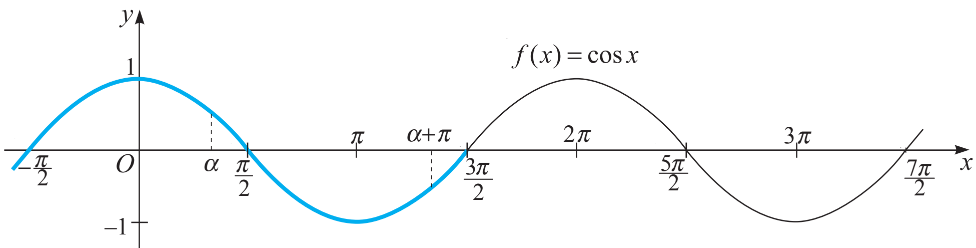


Fig. 8.10

III. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$

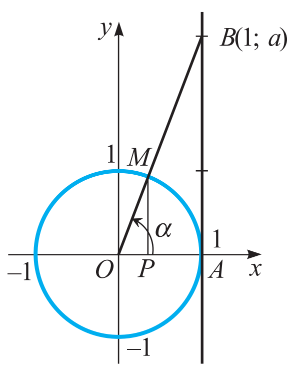


Fig. 8.11

1° $D(\operatorname{tg})=\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+\pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2° $E(\operatorname{tg})=\mathbb{R}$. Pentru orice $a \in \mathbb{R}_+$ există un unghi α, astfel încât $\operatorname{tg}\alpha = a$, deoarece $\operatorname{tg}\alpha=\frac{MP}{OP}=\frac{AB}{OA}=\frac{a}{1}=a$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 8.11). Similar, pentru $a \in \mathbb{R}_-$ şi $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Ordonata punctului de intersecție a semidreptei $[OM$ cu tangenta AB la cercul trigonometric în punctul $A(1; 0)$ este $\operatorname{tg}\alpha$, de aceea dreapta AB se numeşte ***dreapta (axa) tangentelor***. Deci, $\operatorname{tg}\alpha = a = y_B$.

3° Zerourile funcției tangentă coincid cu zerourile funcției sinus: $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

4° Funcția tangentă este periodică. Se poate arăta că perioada principală a funcției tangentă este π.

5° Funcția tangentă ia valori pozitive în cadranele I, III, unde funcțiile sinus şi cosinus iau valori de acelaşi semn, şi valori negative – în cadranele II, IV, unde funcțiile sinus şi cosinus iau valori de semne opuse.

6° Funcția tangentă este impară, deoarece pentru orice $\alpha \in D(\operatorname{tg})$ obținem:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

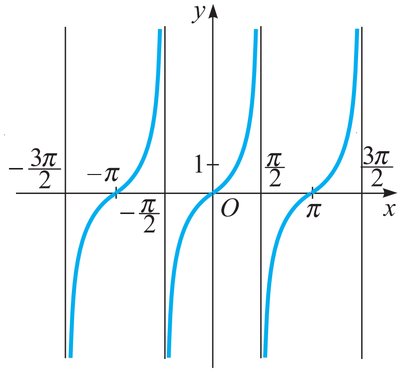


Fig. 8.12

7° Funcția tangentă este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ (fig. 8.12).

8° Funcția tangentă nu are extreme.

9° O porțiune a graficului funcției tangentă este reprezentată în figura 8.12.

IV. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$

1° $D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2° $E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}$ (fig. 8.13). Abscisa punctului $B(a, 1)$ este $\operatorname{ctg}\alpha$, adică $a = \operatorname{ctg}\alpha$, de aceea dreapta AB (dreapta tangentă la cerc în punctul $A(0; 1)$) se numește ***dreapta (axa) cotangentelor***. Deci, $\operatorname{ctg}\alpha = a = x_B$.

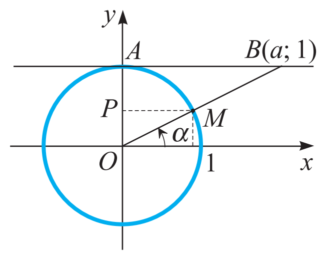


Fig. 8.13

3° Zerourile funcției cotangentă sunt numerele

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

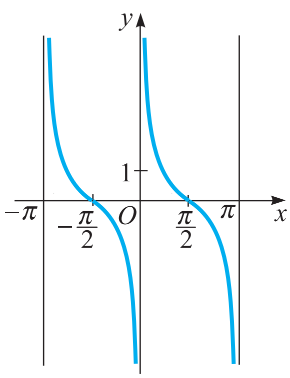


Fig. 8.14

4° Perioada principală a funcției cotangentă este π.

5° Funcția cotangentă ia valori pozitive în cadranele I, III şi negative – în cadranele II, IV.

6° Funcția cotangentă este impară:

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,\ x \in D(\operatorname{ctg}).$$

7° Funcția cotangentă este strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$ (fig. 8.14).

8° Funcția cotangentă nu are extreme.

9° O porțiune a graficului funcției cotangentă este reprezentată în figura 8.14.

Următoarele exemple se rezolvă aplicând proprietățile funcțiilor trigonometrice.

Exerciții rezolvate

1. Să se determine semnul produsului $a = \cos\frac{2\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cos\frac{4\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3}$.

Rezolvare:

Constatăm că unghiurile de $\frac{2\pi}{5}$ rad, $\frac{\pi}{4}$ rad aparțin cadranului I, unghiul de $\frac{2\pi}{3}$ rad – cadranului II, unghiul de $\frac{4\pi}{3}$ rad – cadranului III, unghiul de $\frac{5\pi}{3}$ rad – cadranului IV. Deoarece $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$, $\sin\frac{2\pi}{3} > 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{4\pi}{3} < 0$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{3} < 0$, rezultă că valoarea expresiei a este un număr pozitiv.

2. Să se determine semnul valorii expresiei $\frac{\cos 10° - \cos 9°}{2 - \sin 2}$.

Rezolvare:

Aşa cum $0° < 9° < 10° < 180°$, iar funcția cosinus pe $[0°, 180°]$ este strict descrescătoare, rezultă: $\cos 9° > \cos 10°$. Deci, $\cos 10° - \cos 9° < 0$, adică numărătorul este negativ. Valoarea expresiei de la numitor este pozitivă, deoarece $\sin 2 < 1$. Prin urmare, valoarea expresiei inițiale este un număr negativ.

1.4. Identitățile fundamentale ale trigonometriei

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $M(\cos\alpha; \sin\alpha)$ punctul respectiv pe cercul trigonometric. Coordonatele originii fiind (0;0), pentru lungimea segmentului OM (raza cercului trigonometric) se obține:

$$1 = \sqrt{(\cos\alpha - 0)^2 + (\sin\alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}.$$

Astfel, am obținut ***identitatea fundamentală a trigonometriei***:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \ \alpha \in \mathbb{R}.} \tag{3}$$

Înmulțind expresiile din definițiile funcțiilor tangentă și cotangentă, obținem:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \ \text{ sau } \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \ \text{ sau } \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbb{Z}.} \tag{4}$$

Împărțind ambii membri ai identității (3) la $\sin^2\alpha$, apoi la $\cos^2\alpha$, obținem:

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \ \alpha \neq \pi k, \ k \in \mathbb{Z}; \ 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}.} \tag{5}$$

Exerciții și probleme propuse

Profilul real

A₁

1. Să se exprime în radiani măsura unghiului:

a) 45°, 20°, 110°; b) 60°, –78°, 270°; c) –120°, –31°, 180°; d) 150°, –218°, –90°.

2. Să se exprime în grade măsura unghiului:

a) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{5}, -2\pi$; c) $\frac{2\pi}{7}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{18}, \frac{3\pi}{2}$.

3. Să se calculeze valoarea expresiei:

a) $\sin 90° + \cos 270° - \sin^2 45°$; b) $\operatorname{tg}\pi - \cos^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

c) $5\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} - 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin 2\pi$; d) $-4\sin\frac{3\pi}{2} + 0{,}5\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}$.

4. ***Investigați!*** Este posibil ca sinusul și cosinusul unuia și aceluiași unghi să fie egale respectiv cu:

a) $\frac{1}{2}$ și $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{7}{25}$ și $-\frac{24}{25}$; c) 0,3 și 0,9; d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ și $-\frac{1}{\sqrt{3}}$?

5. ***Investigați!*** Este posibil ca tangenta și cotangenta unuia și aceluiași unghi să fie egale respectiv cu:

a) $\frac{2}{3}$ și $-\frac{3}{2}$; b) $-\frac{3}{7}$ și $-\frac{7}{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $\sqrt{5} - 2$ și $\sqrt{5} + 2$?

6. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$; b) $\sin\alpha - \sin^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha$; c) $\frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{4}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} - 5$;

d) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$; e) $(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$; f) $\sin^4 x + \cos^2 x - \cos^4 x$.

B₁

7. Să se calculeze:

a) $3\cos 0° - 2\sin\frac{\pi}{2} + 6\operatorname{tg}\pi$; b) $\sin 270° + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}90° - 2\cos 0°$;

c) $\operatorname{tg}60° \cos 60° - 4\sin 90° \cos 45°$; d) $\cos 60° + \frac{1}{3}\operatorname{tg}30° \cdot \sin 30°$.

8. Să se calculeze valoarea expresiei:

a) $E=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\pi$; b) $E=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

9. Să se determine $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, dacă:

a) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ şi $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; b) $\operatorname{ctg}\alpha=1{,}5$ şi α aparține cadranului III;

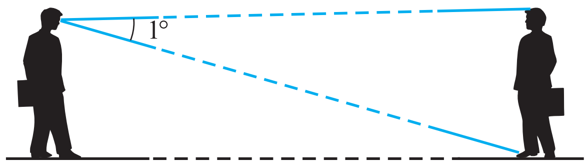
c) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ şi $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$; d) $\operatorname{tg}\alpha=2$ şi $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

10. Să se afle lungimea ipotenuzei şi măsurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic care are catetele de:

a) 4 cm şi $4\sqrt{3}$ cm; b) 1 cm şi $\sqrt{3}$ cm.

11. ***Lucrați în perechi!*** Să se afle măsurile unghiurilor rombului cu latura de 2 cm şi înălțimea de $\sqrt{2}$ cm.

12. Care este distanța dintre doi oameni de înălțimea 1,7 m, dacă unul îl vede pe celălalt sub un unghi de 1°?



13. Să se exprime în radiani unghiurile unui triunghi isoscel care are un unghi de 30°.

14. O roată are 90 de dinți. Să se exprime în radiani unghiul de rotație al roții dacă ea se roteşte cu:

a) 30 de dinți; b) 40 de dinți; c) 60 de dinți; d) 100 de dinți.

15. Să se determine domeniul de definiție al funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; b) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{tg}2x}$; c) $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x$.

16. Să se determine semnul produsului $\cos 110^\circ\sin\frac{5\pi}{3}\cos(-10^\circ)\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

17. Fie funcția $f: D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x\cos x\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Să se calculeze:

a) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; b) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; c) $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; d) $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)$.

18. ***Investigați!*** Folosind monotonia funcțiilor trigonometrice, să se determine semnul valorii expresiei:

a) $\frac{\operatorname{tg}100^\circ-\operatorname{tg}160^\circ}{\sin(-10^\circ)-\sin(-20^\circ)}$; b) $\frac{\operatorname{tg}111^\circ-\operatorname{tg}105^\circ}{\sin 15^\circ-\cos 10^\circ}$; c) $\frac{\sin 1-\sin\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}-\operatorname{tg}2}$.

19. ***Investigați!*** Să se determine paritatea funcției definite prin formula:

a) $f(x)=\sin x+\cos x$; b) $f(x)=\sin^2 x+2$; c) $f(x)=\sin 2x+\sin^3 x$.

C_1

20. Să se afle mulțimea valorilor funcției definite prin formula:

a*) $f(x)=3\cos x$; b*) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$; c*) $f(x)=\frac{4}{\cos x}$; d) $f(x)=2\sin x-3$.

21*. Să se reprezinte grafic funcția definită prin formula:

a) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$; b) $f(x)=3\sin 2x$; c) $f(x)=|\cos x|$; d) $f(x)=\frac{1}{2}|\sin x|$.

§2 Transformări ale expresiilor trigonometrice

2.1. Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri

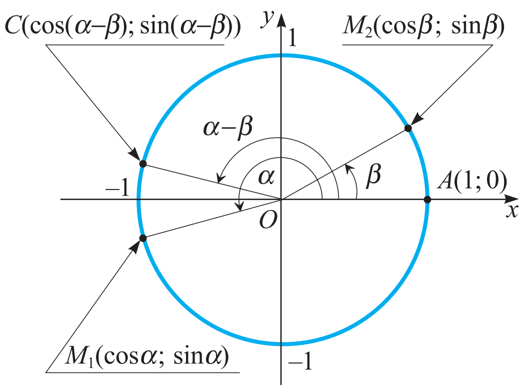


Fig. 8.15

a) Fie $\alpha \geq \beta$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$, $m(\angle AOM_2) = \beta$, $m(\angle AOM_1) = \alpha$, unde $A(1; 0)$, $M_1(\cos\alpha; \sin\alpha)$, $M_2(\cos\beta; \sin\beta)$ sunt puncte de pe cercul trigonometric (fig. 8.15).

Să calculăm $\cos(\alpha-\beta)$. Fie C un punct pe cercul trigonometric, astfel încât $l_{\smile AM_2C} = l_{\smile ACM_1} - l_{\smile AM_2}$. Aceasta înseamnă că $m(\angle AOC) = \alpha - \beta$.

Așa cum arcele AM_2C și M_2CM_1 au aceeași măsură, rezultă că și coardele ce le subîntind sunt congruente, adică $AC = M_1M_2$. Ținând seama de coordonatele punctelor $A(1; 0)$, $M_2(\cos\beta; \sin\beta)$, $C(\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta))$, $M_1(\cos\alpha; \sin\alpha)$ și aplicând formula distanței dintre două puncte, obținem:

$$AC^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + (\sin(\alpha-\beta)-0)^2 =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta); \quad (1)$$
$$M_1M_2^{\,2} = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha -$$
$$- 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta). \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. (3)

b) Fie $\beta > \alpha$, $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Deoarece funcția cosinus este pară, rezultă că $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha)$. Aplicând formula (3), obținem:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Se știe că orice numere reale α^*, β^* (care sunt măsurile unor unghiuri în radiani) pot fi scrise sub forma $\alpha^* = \alpha + 2k\pi$, $\beta^* = \beta + 2n\pi$, $k, n \in \mathbb{Z}$, unde $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Astfel, pentru orice numere reale α, β, ținând cont de periodicitatea funcțiilor sinus, cosinus, obținem formula:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.} \quad (4)$$

Deoarece $\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$, luând în considerare paritatea funcțiilor trigonometrice respective, obținem:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta, \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.} \quad (5)$$

Exerciții rezolvate

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos t + \sin\frac{\pi}{2}\sin t = \sin t.$

2. Substituind în formula din exemplul **1** t cu $\frac{\pi}{2} - t$, obținem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = \cos t.$$

Vom deduce formula pentru $\sin(\alpha-\beta)$, aplicând formula (5) și cele din exercițiile rezolvate **1** și **2**:

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha-\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right] =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Astfel, am obținut formula:

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.} \quad (6)$$

Înlocuind în (6) β cu $-\beta$ și aplicând proprietățile funcțiilor trigonometrice, obținem (Demonstrați!) următoarea formulă:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \text{ pentru orice } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.} \quad (7)$$

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Rezolvare:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

Utilizând formulele (4)–(7), se deduc formulele:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad (8)$$

pentru orice $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, astfel încât există tangentele respective și $1\pm\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$.

Exercițiu Deduceți formulele (8), aplicând formulele (4)–(7).

2.2. Formulele de reducere

Se știe că orice unghi β măsurat în radiani poate fi scris sub forma $\beta=\frac{\pi}{2}k+\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$, $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$. Atunci, în baza formulelor din secvența 2.1, calculul valorilor funcțiilor trigonometrice pentru un unghi arbitrar β poate fi redus la calculul valorilor lor pentru un unghi ascuțit α.

Exemple

1. $\sin(\alpha+\pi)=\sin\alpha\cos\pi+\cos\alpha\sin\pi=-1\cdot\sin\alpha=-\sin\alpha.$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha;$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha.$

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$

Observație

Funcția sin (respectiv, funcția tg) se numește ***cofuncție*** a funcției cos (respectiv, a funcției ctg), și invers.

Rețineți!

Pentru facilitarea calculului valorilor funcțiilor trigonometrice, pot fi aplicate două reguli, numite ***reguli de reducere***:

1) valoarea absolută a oricărei funcții trigonometrice de unghiul $\beta=\frac{\pi}{2}k\pm\alpha$, $k\in\mathbb{Z}$, este egală cu valoarea absolută a funcției trigonometrice de același nume de unghiul α pentru k număr par și este egală cu valoarea absolută a cofuncției trigonometrice corespunzătoare de unghiul α pentru k număr impar;
2) semnul rezultatului coincide cu semnul valorii funcției trigonometrice inițiale, ținând cont de cadranul în care se află unghiul $\frac{\pi}{2}k\pm\alpha$ și considerând că $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (indiferent de măsura unghiului α).

Exercițiu rezolvat

Să se calculeze $\sin 1020°$.

Rezolvare:

$\sin 1020°=\sin(90°\cdot 11+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, deoarece $k=11$ este număr impar și $1020°$ aparține cadranului IV, unde valoarea funcției sinus este număr negativ.

2.3. Formule pentru funcții trigonometrice ale multiplilor unui unghi

Considerând $\beta=\alpha$ în formulele (5) și (7), obținem:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,} \tag{9}$$

numite ***formule ale cosinusului și sinusului unghiului dublu***.

Considerând $\beta=\alpha$ în prima dintre formulele (8) și tgα, tg2α definite, obținem următoarea formulă pentru tangenta de unghi dublu:

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{2},\quad \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{4},\quad n\in\mathbb{Z}.} \tag{10}$$

Pentru funcțiile trigonometrice de unghi triplu avem formulele:

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.} \tag{11}$$

Exercițiu Deduceți formulele (10) și (11).

Rețineți!

Vom deduce două formule, numite ***formule de micșorare a exponentului puterii funcțiilor trigonometrice***:

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1}\qquad\boxed{\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\qquad\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \tag{12}$$

Aplicând formulele (12), putem micșora puterile cu exponent par ale funcțiilor trigonometrice, reducându-le la cele de gradul I.

Exemplu

$$\cos^2\frac{\pi}{24}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}(\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

2.4*. Formulele de transformare a sumelor în produse (opțional)

Avem $\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+$

$$+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Deci, $\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \text{pentru orice } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$

Similar,

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{13}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

pentru orice $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Exercițiu Deduceți formulele (13).

Exercițiu rezolvat

Să se aducă la forma cea mai simplă expresia $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)$.

Rezolvare:

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x\cos\frac{\pi}{4}=2\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\sqrt{2}\sin x.$

Formulele (13) au o aplicație importantă la demonstrarea monotoniei funcțiilor trigonometrice (a se vedea § 1).

Fie $-\frac{\pi}{2}\le\alpha_1<\alpha_2\le\frac{\pi}{2}$. Pentru diferența $A=\sin\alpha_2-\sin\alpha_1$ se obține

$A=2\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$. Deoarece $\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}>0,\ \cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}>0,\ A>0.$

Prin urmare, $\sin\alpha_2>\sin\alpha_1$ și funcția sinus pe intervalul indicat este strict crescătoare.

În mod analog poate fi demonstrată monotonia funcțiilor cosinus, tangentă, cotangentă (expusă în § 1). (Demonstrați!)

2.5. Formulele substituției universale

Avem $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (14) și $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$ (15).

Împărțind membrul drept al egalității (14) la expresia $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$, fiind egală cu 1, obținem $\sin\alpha=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ (16).

Împărțind în membrul drept al egalității (16) numărătorul și numitorul la $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, obținem:

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\ne(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}.}\qquad(17)$$

Similar, din $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (18), împărțind membrul drept al acestei egalități la expresia $\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$, fiind egală cu 1, obținem: $\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (19).

Împărțind în membrul drept al egalității (19) numărătorul și numitorul la $\cos^2\frac{\alpha}{2}$, obținem:

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\ne(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}.}\qquad(20)$$

Din (17) și (20) obținem (Deduceți!):

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\ne(2n+1)\pi,\ \alpha\ne\frac{(2n+1)\pi}{2},n\in\mathbb{Z}.}\ (21)\quad\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\ne\pi n,\ \alpha\ne(2n+1)\pi,n\in\mathbb{Z}.}\ (22)$$

Formulele (17), (20), (21) și (22) se numesc ***formulele substituției universale***, care permit exprimarea $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ prin $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Exerciții și probleme propuse

Profilul real

A1

1. ***Lucrați în perechi!*** Să se calculeze:

a) $\cos(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, știind că $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, și $\sin\beta=\frac{3}{4}$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{tg}2\beta$, știind că $\cos\alpha=\frac{15}{17}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, și $\cos\beta=\frac{1}{4}$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Să se calculeze: a) $\sin 50°\cos 40°+\cos 50°\sin 40°$; b) $\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{10}+\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{10}$;

c) $\sin 110°\cos 70°-\cos 110°\sin(-70°)$; d) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{10}$.

3. ***Investigați!*** Să se determine dacă există un unghi α, astfel încât:

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; b) $\sin\alpha=\frac{40}{41}$, $\cos\alpha=\frac{8}{41}$; c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=1{,}25$; d) $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{5}-2$, $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{5}+2$.

B1

4. (BAC 2012) Calculați valoarea expresiei:

$$\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin x}+\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\cos x},\ \text{dacă}\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$$

5. (BAC 2022) Fie expresia $E(x)=(\cos x+1)^2+(\cos x-1)^2$. Arătați că valoarea expresiei $2\sqrt{3}\cdot E(15°)$ este un număr natural.

6. (BAC 2016) Calculați valoarea expresiei:

$$E(\alpha)=\frac{4}{5}\operatorname{tg}\alpha+\frac{5}{12}\sin(2\alpha),$$

dacă $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ și $\alpha\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$.

7. ***Lucrați în perechi!*** Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha-1$; b) $2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}2\alpha$;

c) $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\operatorname{ctg}^2 2\alpha$; d) $\operatorname{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha-1)$;

e) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$; f) $\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha+1}{\cos\alpha}$.

8. Utilizând formulele de micșorare a exponentului puterii, să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$; b) $\sin^2\alpha-\cos 2\alpha$;

c) $\cos^2\alpha+\cos 2\alpha$.

9. Să se afle $\sin\alpha\cos\alpha$, dacă $\sin\alpha+\cos\alpha=0{,}6$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

10. Să se afle $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, dacă

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2{,}5,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi n}{2}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}.$$

11. Să se afle $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ și $\operatorname{ctg}\alpha$, dacă:

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1{,}5$; b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-0{,}5$.

12. Să se afle $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg}2\alpha$ și $\operatorname{ctg}2\alpha$, dacă $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$.

13. Să se demonstreze identitatea:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

b) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

14. Să se demonstreze că: a) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)-\sin\alpha=\cos\alpha-\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)$, dacă $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi n}{2}\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$;

b) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha}$, dacă $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\frac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\frac{1}{\operatorname{ctg}2\alpha}$, dacă $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$.

C1

15. Să se arate că dacă în ΔABC:

a) $\cos B+\cos C=\sin B+\sin C$, atunci triunghiul este dreptunghic;

b) $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$, atunci triunghiul este dreptunghic sau isoscel;

c) $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$, atunci triunghiul este isoscel;

d) $\cos A+\cos B-\cos(A+B)=\frac{3}{2}$, atunci triunghiul este echilateral.

16. Să se afle înălțimea trapezului dreptunghic circumscris unui cerc, dacă măsura unghiului ascuțit al trapezului este a, iar perimetrul lui este P.

17. ***Investigați!*** Utilizând internetul, să se aducă exemple din diverse domenii de aplicare a elementelor de trigonometrie.

§3 Ecuații trigonometrice

3.1. Funcții trigonometrice inverse

Vom examina funcțiile trigonometrice numai pe domeniile unde ele sunt inversabile. Anume, vom examina funcțiile:

$$f_1\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],\ f_1(x) = \sin x; \quad f_2\colon [0, \pi] \to [-1, 1],\ f_2(x) = \cos x;$$

$$f_3\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \operatorname{tg} x; \quad f_4\colon (0, \pi) \to \mathbb{R},\ f_4(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Inversele lor se notează respectiv cu arcsin, arccos, arctg, arcctg şi se citesc „arcsinus", „arccosinus", „arctangentă", „arccotangentă".

Aşadar, în baza definiției funcției inverse, obținem:

$$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x,\ x \in [-1, 1],\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \tag{1}$$

$$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x,\ x \in [-1, 1],\ y \in [0, \pi]; \tag{2}$$

$$\operatorname{arctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \tag{3}$$

$$\operatorname{arcctg} x = y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y = x,\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0, \pi). \tag{4}$$

Definiție

Funcțiile $\arcsin\colon [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ g_1(x) = \arcsin x;$

$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi],\ g_2(x) = \arccos x;$

$\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ g_3(x) = \operatorname{arctg} x;$

$\operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi),\ g_4(x) = \operatorname{arcctg} x,$

se numesc **funcții trigonometrice inverse**.

Exemple

1. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, fiindcă $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, deoarece $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$ şi $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Pentru determinarea valorilor funcțiilor trigonometrice inverse se pot folosi tabelele de valori ale funcțiilor sinus, cosinus, tangentă, cotangentă (tabelul 1, secvența 1.2) pe intervalele respective, schimbând rolurile valorilor argumentelor şi valorilor funcțiilor (tabelele 2 şi 3):

Tabelul 2

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Tabelul 3

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Se poate demonstra că:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R};$$
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ x \in \mathbb{R}; \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ x \in \mathbb{R}.$$

Din definiția funcțiilor trigonometrice inverse şi din relațiile (1)–(4) rezultă ***relațiile*** (***identitățile***) (5)–(9):

$$\sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1, 1]; \quad \arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{5}$$
$$\cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1, 1]; \quad \arccos(\cos x) = x,\ x \in [0, \pi]. \tag{6}$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x,\ x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,\ x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ x \in (0, \pi). \tag{8}$$
$$\left.\begin{array}{l} \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1, 1]; \\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1, 1]; \\ \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1]. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Exercițiu rezolvat

Să se afle domeniile de definiție ale funcțiilor $f, h: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos(2x-1)$, $h(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2x-2}$.

Rezolvare:

În baza definiției funcției arccosinus, avem $-1 \le 2x-1 \le 1$, de unde $0 \le x \le 1$. Astfel, $D(f) = [0, 1]$. Argumentul funcției arctangentă poate lua orice valoare reală, deci este suficient ca numitorul raportului $\dfrac{x-3}{2x-2}$ să nu ia valoarea 0. Astfel, $D(h) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Exercițiu

Trasați graficele funcțiilor trigonometrice inverse, ştiind că ele sunt simetrice graficelor funcțiilor trigonometrice respective ((1), (2), (3), (4)), față de bisectoarea cadranelor I şi III. (*Indicație*. Vezi p. 193.)

3.2. Ecuații trigonometrice

Problemă

Se ştie că aria suprafeței laterale a unei piramide triunghiulare regulate este de 2 ori mai mare decât aria bazei. Să se afle măsura $\angle CDB$ al triunghiului isoscel CDB (fig. 8.16).

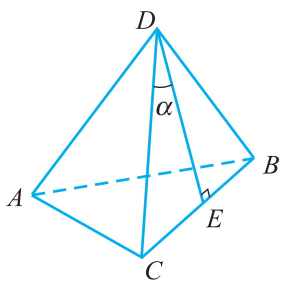


Fig. 8.16

Rezolvare:

Fie $AB = a$, $m(\angle CDE) = \alpha$, unde $DE \perp BC$.

Avem $\mathcal{A}_b = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ şi $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot DE$. Aşa cum $CE = \dfrac{a}{2}$, din triunghiul CED ($m(\angle E) = 90°$) obținem: $\dfrac{DE}{CE} = \operatorname{ctg}\alpha$, $DE = CE \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Deoarece $\mathcal{A}_l = 2\mathcal{A}_b$, obținem $3a \cdot \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\alpha = 2 \cdot \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Astfel, problema s-a redus la rezolvarea ecuației $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, care este o *ecuație trigonometrică*.

Rezolvând această ecuație (în continuare vom studia metoda ei de rezolvare) şi luând în considerare că $\angle CDE$ este ascuțit, obținem $m(\angle CDE) = \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{3} = 60°$.

Deci, $m(\angle CDB) = 2 \cdot m(\angle CDE) = 120°$. *Răspuns*: 120°.

Definiție

Ecuațiile care conțin necunoscuta numai la argumentul funcțiilor trigonometrice se numesc **ecuații trigonometrice**.

1 *Ecuații trigonometrice fundamentale*

Definiție

Ecuațiile trigonometrice de tipul $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, unde $a \in \mathbb{R}$, se numesc **ecuații trigonometrice fundamentale**.

Să determinăm formulele de calcul al soluțiilor ecuațiilor trigonometrice fundamentale. Sunt posibile două modalități de ilustrare a soluțiilor acestor ecuații:

1) folosind cercul trigonometric;

2) utilizând graficele funcțiilor trigonometrice.

1 Ecuația $\sin x = a$

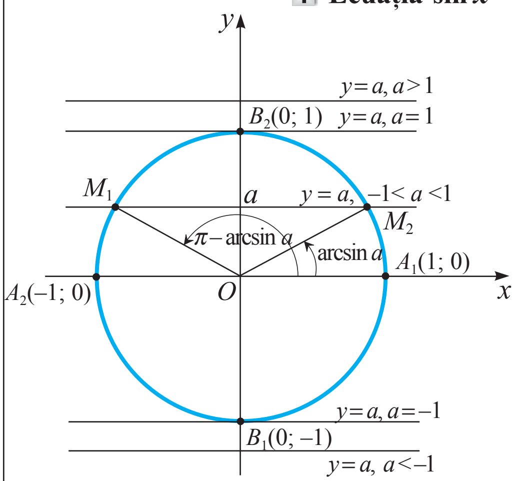


Fig. 8.17

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Vom ilustra rezolvarea ecuației date folosind cercul trigonometric. Fie cercul trigonometric și dreapta $y = a$ (fig. 8.17). Soluțiile ecuației $\sin x = a$ sunt măsurile unghiurilor (în radiani sau în grade) formate de semiaxa pozitivă $[Ox$ cu semidreptele $([OM_1, [OM_2)$ corespunzătoare punctelor pe cerc care au ordonata a. Deci, dacă $|a| > 1$, ecuația $\sin x = a$ nu are soluții.

Dacă $a = 1$, atunci unicul punct care are ordonata 1 (punctul de intersecție a cercului cu dreapta $y = 1$) este $B_2(0; 1)$. Prin urmare, o ***soluție particulară*** a ecuației $\sin x = 1$ este $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Luând în calcul periodicitatea funcției sinus, obținem toate soluțiile ecuației $\sin x = 1$:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.} \tag{10}$$

Similar, pentru $a = -1$ (punctul $B_1(0; -1)$) obținem toate soluțiile ecuației $\sin x = -1$:

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.} \tag{11}$$

Dacă $a = 0$, atunci pe cerc există punctele $A_1(1; 0)$ și $A_2(-1; 0)$ cu ordonata 0. Astfel, ***soluții particulare*** ale ecuației $\sin x = 0$ sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = \pi$.

Ținând seama de periodicitatea funcției sinus, obținem toate soluțiile ecuației $\sin x = 0$: $x = 0 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, sau reuniunea lor:

$$\boxed{x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.} \tag{12}$$

Dacă $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, atunci dreapta $y = a$ intersectează cercul trigonometric (fig. 8.17) în două puncte, M_1 și M_2, cu ordonata a. Aceste puncte sunt simetrice față de axa ordonatelor. Deci, soluții particulare ale ecuației $\sin x = a$ sunt $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$. În baza periodicității funcției sinus, obținem formulele de calcul al tuturor soluțiilor ecuației $\sin x = a$ pentru $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$:

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Aceste formule pot fi unite într-una singură:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.} \tag{13}$$

Observăm că din (13), pentru $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$, obținem respectiv soluțiile (10)–(12). Prin urmare, (13) este formula de calcul al tuturor soluțiilor ecuației trigonometrice fundamentale $\sin x = a,\ a \in [-1, 1]$.

Astfel, mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a,\ a \in [-1, 1]$, este:

$$\boxed{S = \{(-1)^k \arcsin a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.}$$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare:

Aplicând formula (13), obținem:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ sau } x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Răspuns: $S = \{(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Rețineți!

Ecuația $\sin x = a$, unde $a \in [-1, 1]$, are în mulțimea $\mathbb{R}$ o infinitate de soluții. Acest fapt poate fi ilustrat prin abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f(x) = \sin x$ și $g(x) = a$ (fig. 8.18).

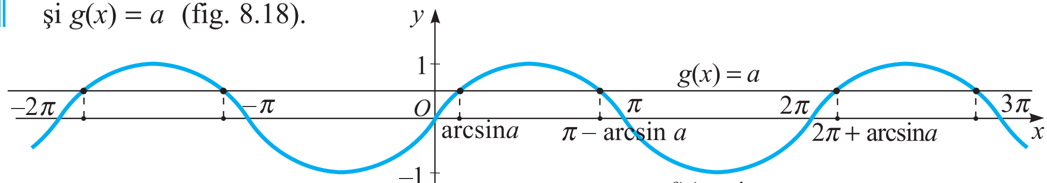


Fig. 8.18

Atenție! La rezolvarea ecuațiilor (respectiv, inecuațiilor) trigonometrice se va avea în vedere că $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

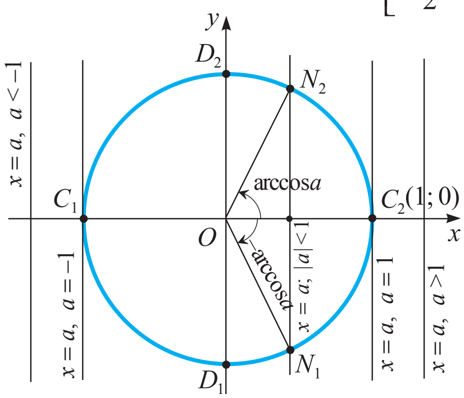


Fig. 8.19

2 Ecuația $\cos x = a$

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Fie cercul trigonometric și dreapta $x = a$ (fig. 8.19).

Soluțiile ecuației $\cos x = a$ sunt măsurile unghiurilor formate de semiaxa pozitivă $[Ox$ cu semidreptele ($[ON_1$, $[ON_2$) corespunzătoare punctelor pe cerc care au abscisa a. Astfel, dacă $|a| > 1$, ecuația $\cos x = a$ nu are soluții.

Utilizând figura 8.19 și ținând cont de periodicitatea funcției cosinus, obținem formula de calcul a tuturor soluțiilor ecuației fundamentale $\cos x = a,\ a \in [-1, 1]$:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Deci, mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a,\ a \in [-1, 1]$, este:

$$\boxed{S = \{\pm \arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.} \quad (14)$$

Exercițiu Deduceți formula (14).

Atenție! La rezolvarea ecuațiilor (respectiv, inecuațiilor) trigonometrice se va ține cont de faptul că $\arccos a \in [0, \pi]$ și $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Conform formulei (14) și a proprietății arccosinusului (indicată mai sus), obținem soluțiile:

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

de unde $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

❍ Rețineți!

Ecuația $\cos x = a$, unde $a \in [-1, 1]$, are în mulțimea $\mathbb{R}$ o infinitate de soluții. Acest fapt poate fi ilustrat prin abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f(x) = \cos x$ și $g(x) = a$ (fig. 8.20).

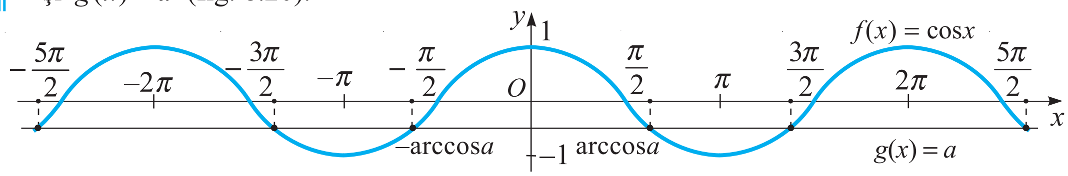


Fig. 8.20

3 Ecuația tg $x = a$

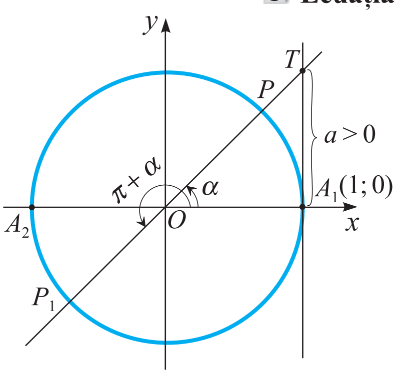


Fig. 8.21

DVA: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Așa cum $E(\text{tg}) = \mathbb{R}$, rezultă că ecuația tg $x = a$ are soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Vom ilustra rezolvarea ecuației $\text{tg}\, x = a$ folosind cercul trigonometric și axa tangentelor A_1T (fig. 8.21). Pentru orice număr a, pe dreapta (axa) tangentelor este un unic punct $T(1, a)$, a cărui ordonată este a. Dreapta OT intersectează cercul trigonometric în două puncte (P și P_1). Deci, există două unghiuri α și $\pi + \alpha$ ale căror tangentă este a, unde $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\alpha = \text{arctg}\, a$.

Atunci, o ***soluție particulară*** a ecuației tg $x = a$ este $x_1 = \text{arctg}\, a$. Similar rezolvării ecuațiilor $\sin x = a$, $\cos x = a$, utilizând figura 8.21 și ținând cont de periodicitatea funcției tangentă, obținem formula de calcul a tuturor soluțiilor ecuației fundamentale $\text{tg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$:

$$x = \text{arctg}\, a + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $a = 0$ obținem formula de calcul al tuturor soluțiilor ecuației $\text{tg}\, x = 0$:

$$x = \pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Prin urmare, mulțimea soluțiilor ecuației $\text{tg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$, este:

$$\boxed{S = \{\text{arctg}\, a + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}.} \qquad (15)$$

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\text{tg}\, x = -\sqrt{3}$.

Rezolvare:

Conform formulei (15), $x = \text{arctg}\,(-\sqrt{3}) + n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\text{arctg}\,\sqrt{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, de unde $x = -\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

❍ Rețineți!

Ecuația $\text{tg}\, x = a$, $a \in \mathbb{R}$, are în mulțimea $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ o infinitate de soluții. Acest fapt este ilustrat prin abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f(x) = \text{tg}\, x$ și $g(x) = a$ (fig. 8.22).

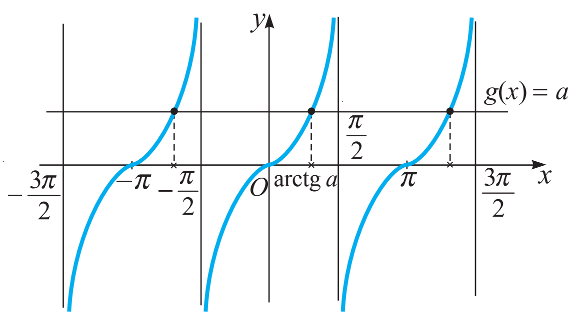


Fig. 8.22

Atenție! La rezolvarea ecuațiilor (inecuațiilor) trigonometrice se va lua în considerare că $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

4 Ecuația ctg*x* = *a*

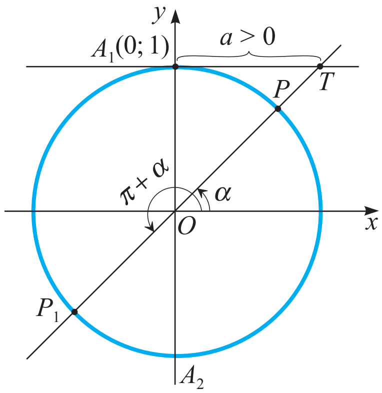


Fig. 8.23

DVA: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Deoarece $E(\text{ctg}) = \mathbb{R}$, rezultă că ecuația $\operatorname{ctg} x = a$ are soluții pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Vom ilustra rezolvarea ecuației $\operatorname{ctg} x = a$ folosind cercul trigonometric și dreapta (axa) cotangentelor A_1T (fig. 8.23).

Similar ecuației $\operatorname{tg} x = a$, pentru ecuația fundamentală $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, avem formula de calcul a tuturor soluțiilor ei:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $a = 0$ obținem formula de calcul a tuturor soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = 0$:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Deci, mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, este:

$$\boxed{S = \{\operatorname{arcctg} a + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}.} \quad (16)$$

Exercițiu Deduceți formula (16).

Rețineți!

Ecuația $\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, are o infinitate de soluții în mulțimea $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Acest fapt poate fi ilustrat prin abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f(x) = \operatorname{ctg} x$ cu dreapta $g(x) = a$ (fig. 8.22).

Atenție! La rezolvarea ecuațiilor (inecuațiilor) trigonometrice se va ține cont de faptul că $\operatorname{arcctg} a \in (0, \pi)$ și $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Rezolvare:

Conform formulei (16), $x = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$.

2 *Ecuații trigonometrice de tipul f(sinx) = 0, f(cosx) = 0, f(tgx) = 0, f(ctgx) = 0*

Ecuațiile în care necunoscuta este argument numai al unei funcții trigonometrice se rezolvă, de regulă, prin ***metoda utilizării necunoscutei auxiliare***, care reduce ecuația inițială la o ecuație care nu conține funcții trigonometrice.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos^2 x + 2\sin x + 2 = 0$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Așa cum $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, obținem ecuația echivalentă $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$. Fie $\sin x = t$, unde $|t| \le 1$. Atunci, din ultima ecuație obținem ecuația algebrică de gradul II $t^2 - 2t - 3 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Valoarea $t_2 = 3$ nu satisface condiția $|t| \le 1$. Revenind la necunoscuta *x*, obținem ecuația $\sin x = -1$, de unde $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3 *Ecuații trigonometrice omogene*

Definiție

Ecuațiile trigonometrice de forma

$$a_n \sin^n x + a_{n-1} \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_1 \sin x \cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0 \qquad (17)$$

se numesc **ecuații trigonometrice omogene de gradul n, $n \in \mathbb{N}^*$, în $\sin x$ și $\cos x$.**

Ecuațiile de forma (17) se rezolvă prin împărțirea ambilor membri la $\cos^n x$ pentru $a_n \neq 0$ (la $\sin^n x$ pentru $a_0 \neq 0$), dacă $\cos x$ (respectiv, $\sin x$) nu este factor comun.

Obținem ecuația echivalentă $a_n \mathrm{tg}^n x + a_{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} x + \ldots + a_1 \mathrm{tg}\, x + a_0 = 0$, care, prin substituția $\mathrm{tg}\, x = t$, se reduce la ecuația algebrică $a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 = 0$.

Într-adevăr, dacă $a_n \neq 0$ (respectiv, $a_0 \neq 0$), atunci nu există un unghi φ pentru care $\cos\varphi = 0$ (respectiv, $\sin\varphi = 0$), deoarece, dacă ar exista un astfel de unghi, atunci, înlocuind în această ecuație x cu φ, am obține $a_n \sin^n \varphi = 0$ (respectiv, $a_0 \cos^n \varphi = 0$) sau $\sin\varphi = 0$ (respectiv, $\cos\varphi = 0$). Nu există însă un unghi pentru care funcția sinus și funcția cosinus să ia simultan valoarea 0. Așadar, prin împărțirea ambilor membri ai ecuației (17) la $\cos^n x$ (respectiv, la $\sin^n x$) obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos^2 x - \sin x \cos x + 4\sin^2 x = 2$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Substituind în ecuația dată $2 = 2 \cdot 1 = 2(\cos^2 x + \sin^2 x)$, obținem ecuația omogenă $\cos^2 x + \sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$. Împărțind ultima ecuație la $\sin^2 x$, obținem ecuația echivalentă $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$.

Fie $\mathrm{tg}\, x = t$. Atunci obținem ecuația algebrică $t^2 + t - 2 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Revenind la necunoscuta x, obținem totalitatea de ecuații trigonometrice $\mathrm{tg}\, x = -2$; $\mathrm{tg}\, x = 1$, cu mulțimile de soluții $S_1 = \{-\mathrm{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ și $S_2 = \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Răspuns: $S = \{-\mathrm{arctg} 2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Atenție! Dacă la rezolvarea ecuațiilor trigonometrice (mai ales a celor omogene) e posibilă aplicarea ***metodei descompunerii în factori***, atunci mai întâi aplicăm această metodă, apoi folosim alte metode pentru rezolvarea ecuațiilor obținute. În caz contrar, putem pierde soluții chiar la prima etapă de rezolvare.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația omogenă $\cos^2 x - 3\sin x \cos x = 0$.

Rezolvare:

În membrul stâng, $\cos x$ este factor comun.

Rezolvând această ecuație prin metoda descompunerii în factori, obținem ecuația $\cos x(\cos x - 3\sin x) = 0$, echivalentă cu totalitatea $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \cos x - 3\sin x = 0.\end{array}\right.$

Prima ecuație are mulțimea soluțiilor $S_1 = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, iar ecuația a doua – mulțimea soluțiilor $S_2 = \left\{\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Răspuns: $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Observație

Dacă am fi împărțit ambii membri ai ecuației la $\cos^2 x$, am fi pierdut soluțiile ecuației inițiale de forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (soluțiile ecuației $\cos x = 0$).

4 Ecuații trigonometrice de forma $a\sin x + b\cos x = c,\ a, b \in \mathbb{R}^*$

Vom examina câteva metode de rezolvare a ecuațiilor de acest tip.

1 Metoda omogenizării

Pornind de la faptul că $\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, iar $\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ şi $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$, din $a\sin x + b\cos x = c$ obținem, în caz general, o ecuație omogenă:

$$(b-c)\cos^2\frac{x}{2} + 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - (b+c)\sin^2\frac{x}{2} = 0. \qquad (18)$$

Rețineți!

Ecuația de forma $a\sin x + b\cos x = c$ are soluții dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 \geq c^2$ (deoarece ecuația de gradul II are soluții dacă şi numai dacă $\Delta \geq 0$). Pentru $b = -c$ obținem ecuația trigonometrică fundamentală de tipul $\text{tg}\, t = a$, iar pentru $b = c$ vom aplica metoda descompunerii în factori. Pentru $c = 0$ obținem o ecuație trigonometrică omogenă de gradul I.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2\sin x + 3\cos x = 1$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Omogenizăm această ecuație (ea are soluții, deoarece $2^2 + 3^2 > 1^2$) şi obținem:

$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2 x = 0.$ Împărțind ambii membri ai ultimei ecuații la $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0,$ obținem ecuația echivalentă $2\text{tg}^2\frac{x}{2} - 2\text{tg}\frac{x}{2} - 1 = 0.$ Fie $\text{tg}\frac{x}{2} = t.$ Substituind, obținem ecuația algebrică $2t^2 - 2t - 1 = 0,$ cu soluțiile $t_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2},\ t_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$ Revenind la necunoscuta x, obținem totalitatea de ecuații $\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2};\ \text{tg}\frac{x}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, respectiv cu mulțimile de soluții:

$S_1 = \left\{2\text{arctg}\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\},\quad S_2 = \left\{2\text{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{2} + 2n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

Răspuns: $S = \left\{2\text{arctg}\frac{1-\sqrt{3}}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{2\text{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{2} + 2n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

2 Metoda unghiului auxiliar

Împărțind ambii membri ai ecuației $a\sin x + b\cos x = c$ (19) la a, $a \in \mathbb{R}^*$, obținem ecuația echivalentă $\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$ (20).

Fie $\frac{b}{a} = \text{tg}\,\alpha$, unde $\alpha = \text{arctg}\frac{b}{a} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Unghiul α se numeşte ***unghi auxiliar***.

Substituind $\frac{b}{a} = \text{tg}\,\alpha$ în ecuația (20), obținem:

$\sin x + \text{tg}\,\alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha.$

Rezolvând această ecuație fundamentală, obținem soluțiile ecuației (19).

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$.

Rezolvare:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Împărțind ambii membri ai ecuației inițiale la $\sqrt{3}$, obținem ecuația:

$$\sin x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos x=1. \qquad (*)$$

Avem $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Prin urmare, $\alpha=\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Substituind $\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$ în ecuația $(*)$, obținem $\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cdot\cos x=1\Leftrightarrow \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Deci, $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Răspuns: $S=\left\{(-1)^k\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

În unele cazuri se introduce ***unghiul auxiliar*** ținând cont de faptul că ecuația $a\sin x+b\cos x=c$ este echivalentă cu ecuația $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, unde φ se obține rezolvând sistemul $\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\\ \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$

În cazul ecuației $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$ avem: $a=\sqrt{3},\ b=1$, deci $\sqrt{a^2+b^2}=2$.

Împărțim ambii membri ai ecuației la 2, obținem: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Deci, $\varphi=\frac{\pi}{6}$ și $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Răspuns: $S=\left\{(-1)^k\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3 Metoda reducerii la un sistem de ecuații algebrice

Având ecuația $a\sin x+b\cos x=c,\ a,b\in\mathbb{R}^*$, și știind că $\sin^2x+\cos^2x=1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, efectuăm substituțiile $\sin x=u,\ \cos x=v$. Astfel, ecuația inițială se reduce la sistemul de ecuații algebrice $\begin{cases}u^2+v^2=1,\\ au+bv=c.\end{cases}$ Rezolvând acest sistem și revenind la substituțiile făcute, obținem soluțiile ecuației inițiale.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin 3x+\cos 3x=1$.

Rezolvare:

Fie $\sin 3x=u,\ \cos 3x=v$. Știind că $\sin^2 3x+\cos^2 3x=1$, ecuația se reduce la sistemul de ecuații algebrice: $\begin{cases}u^2+v^2=1,\\ u+v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-v)^2+v^2=1,\\ u=1-v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-2v+v^2+v^2=1,\\ u=1-v\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2v(1-v)=0,\\ u=1-v\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}v=0,\\ u=1-v;\end{cases}\\ \begin{cases}1-v=0,\\ u=1-v\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}v=0,\\ u=1;\end{cases}\\ \begin{cases}v=1,\\ u=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Revenind la substituțiile făcute, obținem:

a) $\begin{cases}\sin 3x = 1,\\ \cos 3x = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z},\\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sin 3x = 0,\\ \cos 3x = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ 3x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z},\\ x = \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}.\end{cases}$

Răspuns: $S = \left\{\dfrac{2\pi n}{3} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{3} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

5 *Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice cu selectarea soluțiilor*

Uneori se cere nu numai rezolvarea ecuației trigonometrice respective, dar și selectarea soluțiilor care satisfac anumite condiții speciale: aparțin unui interval numeric, sunt soluții ale altor ecuații sau inecuații etc. Vom explica procedeul de selectare a soluțiilor printr-un exemplu.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $5(\sin x + \cos x) - 4\sin x \cos x = 5$ și să se determine soluțiile ei care aparțin intervalului $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Rezolvare:

DVA: $x \in \mathbb{R}$. Fie $\sin x + \cos x = t$. Atunci, $\sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$ (Argumentați!) și ecuația inițială se reduce la ecuația algebrică de gradul II $2t^2 - 5t + 3 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 1$, $t_2 = 1{,}5$ (Verificați!). Revenind la necunoscuta *x*, obținem totalitatea de ecuații: $\sin x + \cos x = 1$; $\sin x + \cos x = 1{,}5$. Ecuația a doua nu are soluții în $\mathbb{R}$. (Verificați!)

Pentru a rezolva prima ecuație, aplicăm metoda unghiului auxiliar și obținem ecuația $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, cu soluțiile:

$x = (-1)^k \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, sau $x = [(-1)^k - 1]\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Pentru a determina soluțiile care aparțin intervalului $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right]$, examinăm două cazuri:

1) Fie $k = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$. Avem $x = [(-1)^{2n} - 1]\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, sau $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Așa cum $x \in \left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $-\pi \le 2\pi n \le \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

Deci, $-\dfrac{1}{2} \le n \le \dfrac{1}{4},\ n \in \mathbb{Z}$. Conchidem că $n = 0$.

Atunci, $x = 2\pi \cdot 0$ sau $x = 0$. Deci, numai o soluție aparține intervalului $\left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2) Fie $k = 2n + 1,\ n \in \mathbb{Z}$. Atunci, $x = [(-1)^{2n+1} - 1]\dfrac{\pi}{4} + (2n + 1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, sau $x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Adică, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Deoarece $x \in \left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $-\pi \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \le \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$, sau $-1 \le \dfrac{1}{2} + 2n \le \dfrac{1}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

Deci, $-\frac{3}{4} \le n \le 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Conchidem că $n = 0$.

Atunci, $x = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 0 \cdot \pi$ sau $x = \frac{\pi}{2}$. Deci, numai o soluție aparține intervalului $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

Reuniunea mulțimilor soluțiilor obținute în ambele cazuri formează mulțimea soluțiilor ecuației inițiale, ce aparțin intervalului indicat.

Răspuns: $S = \left\{0, -\frac{\pi}{2}\right\}$.

Observație În acest exercițiu am arătat cum se aplică ***metoda utilizării necunoscutei auxiliare*** la rezolvarea unor ecuații de tipul $f(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$.

Atât funcțiile trigonometrice, cât şi ecuațiile trigonometrice se aplică în diverse domenii. De exemplu:

- Transformarea de rotație este descrisă de o relație în care apar funcțiile trigonometrice.
- În medicină, ecuația funcționării inimii se descrie printr-o ecuație trigonometrică complexă.
- Savanții biologi susțin că drumul parcurs de peşti în apă are o traiectorie sinusoidală (sau cosinusoidală), iar în timp ce înoată corpul lor ia forma graficului tangentei (sau cotangentei).
- În geografie, la calcularea distanței dintre diverse puncte (accesibile sau inaccesibile) se utilizează teorema cosinusurilor.
- În arhitectură, pentru calcularea înălțimilor se foloseşte unghiul de elevație, care se determină din relații cu funcții trigonometrice.
- În arta decorativă întâlnim diverse curbe, care au descriere trigonometrică.
- În fizică, pendulul realizează oscilații periodice având descriere trigonometrică etc.

Exerciții şi probleme propuse

Profilul real

A_1

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația (1–3):

1. a) $\sin 2x = \sqrt{2}$; b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; d) $\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

2. a) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\cos 5x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \frac{1}{2}$.

3. a) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\operatorname{tg} 2x = 25$; c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = 1$; d) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{5}\right) = \sqrt{3}$.

B_1

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația (4–8):

4. a) $\cos^2 \frac{5x}{2} = \frac{1}{4}$; b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$; c) $\operatorname{tg}^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;
d) $1 - \cos^2(3x - 2) = \cos\frac{\pi}{3}$; e) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin 6x$; f) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2\cos 3x$.

5. a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; b) $\cos^2 x - 5\cos x + 6 = 0$; c) $\operatorname{tg}^2 x - 7\operatorname{tg} x + 12 = 0$; d) $2\cos^2 5x + \sin 5x + 1 = 0$.

6. a) $\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3} = 0$; b) $4\sin x - 3\cos x = 0$; c) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = \sin 2x$; d) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$.

7. a) $\cos x + \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{2}$; c) $5\sin x + \cos x = 5$; d) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 3x$.

8. ***Lucrați în perechi!***

a) $\cos 2x = \sin x - \cos x$;

b) $\sin 2x = 1 - \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$;

c) $2\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 1$;

d) $\sin^4 2x - \cos^4 2x = 1$;

e) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$;

f*) $\sin x \sin 3x \cos 5x = 1$;

g) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$;

h) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$;

i) $\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3} = \sqrt{2}\sin\frac{5x}{2}$;

j) $\frac{1 - \operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg} 2x} = 1 - \sin 4x$.

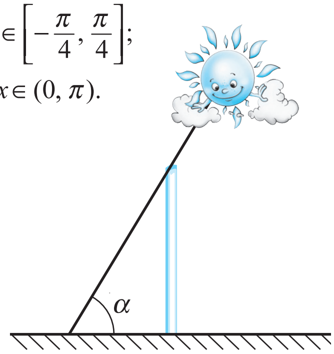
9. ***Investigați!*** Să se afle soluțiile reale ale ecuației trigonometrice care aparțin intervalului indicat:

a) $1 - \sin 2x + \sin x - \cos x = 0,\ -\frac{3\pi}{4} \le x \le \pi$;

b) $2\sin 5x \sin\frac{3}{2}x = \cos\frac{x}{2},\ x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;

c) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$;

d) $2\cos^2 x - 7\cos x + 2 = 0,\ x \in (0, \pi)$.



10. Umbra unui stâlp vertical de 7 m are lungimea de 4 m. Să se afle α din figura alăturată.

11. Un patrulater înscris într-un cerc are laturile de lungime $a = 10$ cm, $b = 4$ cm, $c = 2$ cm, $d = 8$ cm (în această ordine). Să se afle măsura unghiului format de laturile a şi b.

12. Valoarea raportului dintre aria laterală şi aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este egală cu $\sqrt{2}$. Să se afle măsura unghiului format de muchia laterală şi înălțimea piramidei.

13. ***Lucrați în perechi!*** Diagonalele fețelor laterale ale unui paralelipiped dreptunghic formează cu laturile respective ale bazei unghiurile α şi β. Să se afle măsura unghiului format de diagonala paralelipipedului şi diagonala respectivă a bazei.

14. Se ştie că două laturi ale unui triunghi au lungimile l şi m, iar bisectoarea unghiului format de aceste laturi are lungimea b. Să se afle măsura acestui unghi.

C_1

15. Să se compună şi să se rezolve o ecuație trigonometrică:

a) omogenă; b) de forma $a\sin x + b\cos x = c,\ a, b \in \mathbb{R}^*$; c) care se reduce la o ecuație algebrică.

16*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$, unde a este un parametru real, ecuația:

a) $a\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

b) $(a+1)\sin^2 x - 2\sin x + a - 1 = 0$;

c) $(2a+1)\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x - a = 0$;

d) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 3a - 1$.

§4 Inecuații trigonometrice

4.1. Noțiunea de inecuație trigonometrică

Definiție

Inecuațiile care conțin necunoscuta numai la argumentul funcțiilor trigonometrice se numesc **inecuații trigonometrice**.

Inecuațiile trigonometrice pot fi rezolvate aplicând atât proprietățile funcțiilor trigonometrice (periodicitatea, monotonia, identitățile respective etc.), cât şi metodele generale de rezolvare a inecuațiilor (inclusiv metoda intervalelor). Deoarece la rezolvarea inecuațiilor trigonometrice verificarea soluțiilor este deseori dificilă, vom avea grijă ca transformările efectuate să fie transformări echivalente.

Rezolvarea inecuațiilor trigonometrice se reduce, de regulă, la rezolvarea inecuațiilor trigonometrice fundamentale sau la rezolvarea sistemelor (totalităților) de inecuații trigonometrice fundamentale.

4.2. Inecuații trigonometrice fundamentale

Definiție

Inecuațiile de tipul $\sin t > a$, $\sin t < a$, $\sin t \geq a$, $\sin t \leq a$, $\cos t > a$, $\cos t < a$, $\cos t \geq a$, $\cos t \leq a$, $\operatorname{tg} t > a$, $\operatorname{tg} t < a$, $\operatorname{tg} t \geq a$, $\operatorname{tg} t \leq a$, $\operatorname{ctg} t > a$, $\operatorname{ctg} t < a$, $\operatorname{ctg} t \geq a$, $\operatorname{ctg} t \leq a$ $(a \in \mathbb{R})$ se numesc **inecuații trigonometrice fundamentale**.

Inecuațiile trigonometrice fundamentale (similar ecuațiilor trigonometrice fundamentale) pot fi rezolvate:

1) folosind cercul trigonometric;
2) folosind graficele funcțiilor trigonometrice.

Vom ilustra rezolvarea inecuațiilor trigonometrice fundamentale pe cercul trigonometric.

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\sin t > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare:

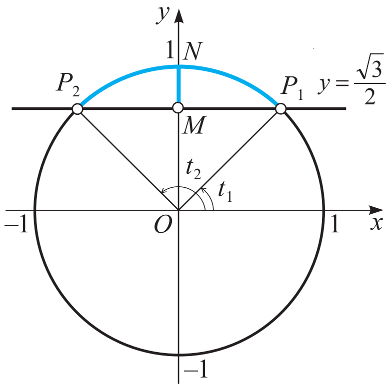


Fig. 8.24

DVA: $t \in \mathbb{R}$. Rezolvăm, mai întâi, inecuația pe intervalul $[0, 2\pi]$ de lungime 2π. Fie cercul trigonometric şi dreapta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (fig. 8.24). Toate punctele cercului trigonometric corespunzătoare valorilor lui t $(t_1 < t < t_2)$, care satisfac inecuația inițială, au ordonata mai mare decât $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mulțimea acestor puncte formează arcul P_1P_2, subîntins de unghiul P_1OP_2. Extremității P_1 îi corespunde valoarea $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, iar extremității P_2 – valoarea $t_2 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Deci, punctul cercului va aparține arcului P_1P_2 dacă $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$. Rezultă că toate soluțiile inecuației inițiale, care aparțin intervalului $[0, 2\pi]$ de lungime 2π, sunt $\frac{\pi}{3} < t < \frac{2\pi}{3}$.

Deoarece funcția sinus este o funcție periodică cu perioada principală 2π, toate celelalte soluții ale inecuației inițiale se obțin prin adunarea numerelor de forma $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, la cele deja determinate. Astfel, soluțiile inecuației inițiale sunt: $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right)$.

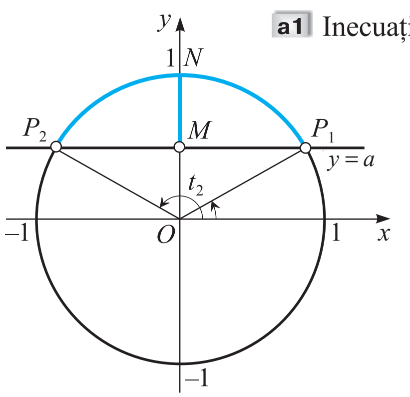


Fig. 8.25

a1 Inecuația fundamentală $\mathbf{\sin t > a}$ (1)

1) Pentru $a \geq 1$ inecuația (1) nu are soluții.
2) Pentru $a < -1$ soluția inecuației este orice $t \in \mathbb{R}$.
3) Fie $-1 \leq a < 1$, $\alpha = \arcsin a$. Atunci, în baza periodicității funcției sinus, obținem soluțiile inecuației (1) (fig. 8.25):

$$\arcsin a + 2\pi k < t < \pi - \arcsin a + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Aşadar, mulțimea soluțiilor inecuației (1) este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\arcsin a + 2\pi k, \ \pi - \arcsin a + 2\pi k).}$$

a2 Inecuația fundamentală $\sin t < a$ (2)

1) Pentru $a > 1$ inecuația (2) are soluția orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a \le -1$ inecuația (2) nu are soluții.
3) Rezolvarea inecuației (2) pentru $-1 < a \le 1$ se reduce la rezolvarea inecuației $\sin t > a$, efectuând substituția $t = -z$.

În acest caz, soluțiile inecuației (2) sunt: $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < t < \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Mulțimea soluțiilor inecuației (2) este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi k,\ \arcsin a + 2\pi k).}$$

a3 Inecuația fundamentală $\sin t \ge a$ (3)

1) Pentru $a \le -1$ inecuația (3) are soluția orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a > 1$ inecuația (3) nu are soluții.
3) Pentru $-1 < a \le 1$ soluțiile inecuației (3) sunt:
$\arcsin a + 2\pi k \le t \le \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\arcsin a + 2\pi k,\ \pi - \arcsin a + 2\pi k].}$$

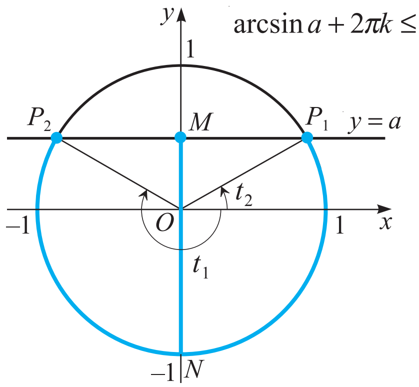


Fig. 8.26

a4 Inecuația fundamentală $\sin t \le a$ (4)

1) Pentru $a \ge 1$ inecuația (4) are soluția orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a < -1$ inecuația (4) nu are soluții.
3) Pentru $-1 \le a < 1$ soluțiile inecuației (4) sunt (fig. 8.26):
$-\pi - \arcsin a + 2\pi k \le t \le \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\pi - \arcsin a + 2\pi k,\ \arcsin a + 2\pi k].}$$

Rețineți!

La rezolvarea inecuațiilor trigonometrice fundamentale se caută mai întâi soluțiile pe un interval de lungime 2π (pentru sinus şi cosinus) sau de lungime π (pentru tangentă şi cotangentă). Răspunsul se va scrie ținându-se cont de periodicitatea funcției respective.

b1 Inecuația fundamentală $\cos t > a$ (5)

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\cos t > \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

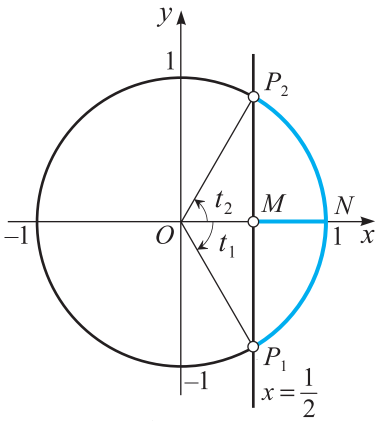


Fig. 8.27

DVA: $t \in \mathbb{R}$. Rezolvăm inecuația pe intervalul $[-\pi, \pi]$ de lungimea 2π.

Fie cercul trigonometric şi dreapta $x = \frac{1}{2}$ (fig. 8.27). Toate punctele cercului trigonometric pentru orice valoare a lui t care satisface inecuația inițială au abscisa mai mare decât $\frac{1}{2}$.

Mulțimea acestor puncte formează arcul P_1P_2, subîntins de unghiul P_1OP_2.

Avem $P_1\left(\frac{1}{2}; -\arccos\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2}; \arccos\frac{1}{2}\right)$.

Prin urmare, pe intervalul $[-\pi, \pi]$ punctul va aparține arcului P_1P_2, dacă $-\arccos\frac{1}{2} < t < \arccos\frac{1}{2}$, sau $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$. Rezultă că soluțiile inecuației inițiale, care aparțin intervalului $[-\pi, \pi]$ de lungimea 2π, sunt $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{3}$.

Deoarece funcția cosinus este o funcție periodică cu perioada principală 2π, toate celelalte soluții ale inecuației se obțin prin adunarea numerelor de forma $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, la cele deja determinate. Deci, soluțiile inecuației inițiale sunt: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$.

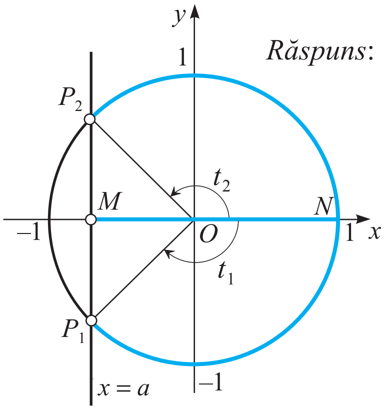


Fig. 8.28

Revenim la inecuația $\cos t > a$. Se poate demonstra că:
1) pentru $a \geq 1$ inecuația (5) nu are soluții;
2) pentru $a < -1$ inecuația (5) are soluția orice $t \in \mathbb{R}$;
3) pentru $-1 \leq a < 1$ soluțiile inecuației (5) sunt (fig. 8.28):
$-\arccos a + 2\pi k < t < \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Prin urmare, mulțimea soluțiilor inecuației (5) este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\arccos a + 2\pi k,\ \arccos a + 2\pi k).}$$

b2 Inecuația fundamentală $\boldsymbol{\cos t < a}$ (6)

1) Pentru $a > 1$ inecuația (6) are soluția orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a \leq -1$ inecuația (6) nu are soluții.
3) Pentru $-1 < a \leq 1$ soluțiile inecuației (6) sunt:
$\arccos a + 2\pi k < t < 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, mulțimea soluțiilor fiind:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\arccos a + 2\pi k,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k).}$$

b3 Inecuația fundamentală $\boldsymbol{\cos t \geq a}$ (7)

1) Pentru $a \leq -1$ inecuația (7) are soluția orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a > 1$ inecuația (7) nu are soluții.
3) Pentru $-1 < a \leq 1$ soluțiile inecuației (7) sunt: $-\arccos a + 2\pi k \leq t \leq \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, iar mulțimea soluțiilor este:

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\arccos a + 2\pi k,\ \arccos a + 2\pi k].}$$

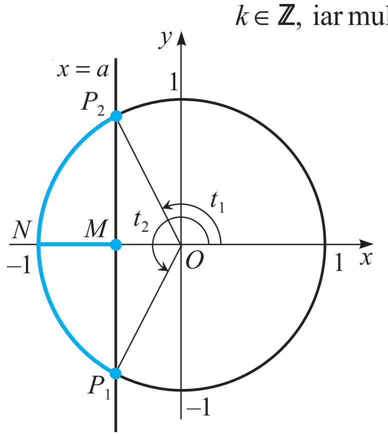


Fig. 8.29

b4 Inecuația fundamentală $\boldsymbol{\cos t \leq a}$ (8)

1) Pentru $a \geq 1$ inecuația (8) are soluția orice $t \in \mathbb{R}$.
2) Pentru $a < -1$ inecuația (8) nu are soluții.
3) Pentru $-1 \leq a < 1$ soluțiile inecuației (8) sunt (fig. 8.29):
$\arccos a + 2\pi k \leq t \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\arccos a + 2\pi k,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k].}$$

c1 Inecuația fundamentală $\boldsymbol{\operatorname{tg} t > a,\ a \in \mathbb{R}}$ (9)

Exercițiu rezolvat

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $\operatorname{tg} t > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rezolvare:

DVA: $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Fiindcă perioada principală a funcției tangentă este π și $\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, vom determina soluțiile inecuației care aparțin intervalului $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de lungimea π.

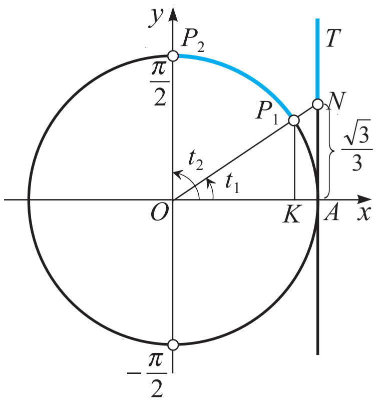


Fig. 8.30

Fie cercul trigonometric şi axa tangentelor AT (fig. 8.30). Dacă valoarea lui t este soluţie a inecuaţiei iniţiale, atunci ordonata punctului T, care este egală cu $\operatorname{tg} t$, trebuie să fie mai mare decât $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Mulţimea tuturor acestor puncte T formează semidreapta $(NT$. Toate punctele semicercului $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, care corespund semidreptei $(NT$, formează arcul P_1P_2. Atunci, $t_1 < t < t_2$ (atragem atenţia că punctele P_1 şi P_2 nu aparţin acestui arc).

Prin urmare, $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} < t < \frac{\pi}{2}$, adică $\frac{\pi}{6} < t < \frac{\pi}{2}$.

Ţinând cont de periodicitatea funcţiei tangentă, obţinem soluţiile inecuaţiei iniţiale: $\frac{\pi}{6} + \pi k < t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Răspuns: $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

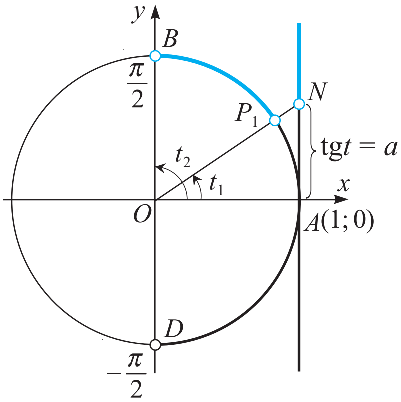


Fig. 8.31

Analizând figura 8.31, observăm că punctul P_1 divizează arcul DAB în două părţi: arcul P_1B şi arcul DAP_1. Pe arcul P_1B (punctele P_1 şi B se exclud) are loc inegalitatea $\operatorname{tg} t > a$. Astfel, soluţiile inecuaţiei (9) sunt:
$\operatorname{arctg} a + \pi k < t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right).}$$

c2 Inecuaţia fundamentală $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{t < a,\ a \in \mathbb{R}}$ (10)
Pe arcul DAP_1 (fig. 8.31, punctele D şi P_1 se exclud) are loc inegalitatea $\operatorname{tg} t < a$. Prin urmare, soluţiile inecuaţiei (10) sunt:
$-\frac{\pi}{2} + \pi k < t < \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k\right).} \qquad (11)$$

c3 Inecuaţia fundamentală $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{t \geq a,\ a \in \mathbb{R}}$, are soluţiile:
$\operatorname{arctg} a + \pi k \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right).} \qquad (12)$$

c4 Inecuaţia fundamentală $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{t \leq a,\ a \in \mathbb{R}}$, are soluţiile:
$-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \leq \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k\right].} \qquad (13)$$

Exerciţiu Deduceţi formulele (11)–(13).

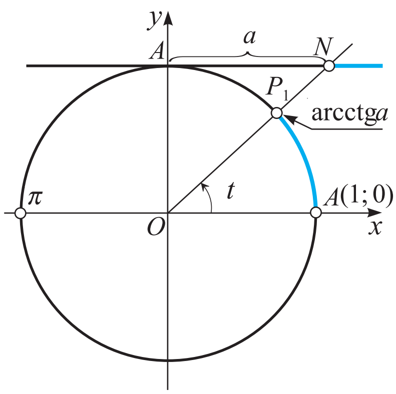


Fig. 8.32

d1 Inecuaţia fundamentală $\mathbf{ctg}\, \boldsymbol{t > a,\ a \in \mathbb{R}}$, (fig. 8.32) are soluţiile:
$\pi k < t < \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi k,\ \operatorname{arcctg} a + \pi k).} \qquad (14)$$

d2 Inecuația fundamentală $\mathbf{ctg}\, t < a,\ a \in \mathbb{R}$, are soluțiile:
$\operatorname{arcctg} a + \pi k < t < \pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi k,\ \pi + \pi k).} \tag{15}$$

d3 Inecuația fundamentală $\mathbf{ctg}\, t \geq a,\ a \in \mathbb{R}$, are soluțiile:
$\pi k < t \leq \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi k,\ \operatorname{arcctg} a + \pi k].} \tag{16}$$

d4 Inecuația fundamentală $\mathbf{ctg}\, t \leq a,\ a \in \mathbb{R}$, are soluțiile:
$\operatorname{arcctg} a + \pi k \leq t < \pi + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, iar

$$\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [\operatorname{arcctg} a + \pi k,\ \pi + \pi k).} \tag{17}$$

Exercițiu Deduceți formulele (14)–(17).

Exerciții și probleme propuse

Profilul real

A₁

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația (1–2):

1. a) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\sin x < -2$; e) $\cos x < \frac{1}{2}$;
f) $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; g) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; h) $\cos x \leq 4$; i) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$; j) $\operatorname{tg} x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
k) $\operatorname{tg} x \geq -2$; l) $\operatorname{tg} x \leq 1$; m) $\operatorname{ctg} x < 1$; n) $\operatorname{ctg} x \leq -\sqrt{3}$; o) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;
p) $\operatorname{ctg} x > -3$; q) $2\cos^2 x + \cos x \leq 0$; r) $\sin^2 x - 5\sin x \geq 0$; s) $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 > 0$.

2. a) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos 3x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\operatorname{ctg} 5x > -1$;
d) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < -\sqrt{3}$; e) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) > -1$; f) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$.

B₁

3. *Lucrați în perechi!* Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația.
a) $\sin x - \cos x < \sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x \geq 1$; c) $\sin 5x + \cos 5x > -1$;
d) $\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; e*) $\cos 2x + |\cos x| > 0$; f*) $\sin^2 x - \cos^2 x < 3\sin x - 2$.

4. *Investigați!* Să se determine soluțiile ecuației $2\cos 2x - 4\cos x - 1 = 0$ pentru care $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$.

5. *Investigați!* Să se determine soluțiile ecuației $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$, astfel încât $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.

C₁

6. Să se compună o inecuație trigonometrică ce se rezolvă prin metoda substituției.

7*. Să se arate că $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

8. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $|\sin x| \leq |\cos x|$.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilul real

A₁

1. Să se calculeze valoarea expresiei:

a) $\sin\frac{3\pi}{2} - \cos 180° + \cos^2 15°$; b) $\text{ctg}90° \cdot \sin\frac{\pi}{17} + \sin^2\frac{\pi}{6}$.

2. Să se afle $\cos 2\alpha$, dacă se știe că:

a) $\cos\alpha = 0{,}6$; b) $\sin\alpha = -0{,}4$.

3. Să se afle valoarea expresiei:

a) $\frac{3\cos(-57°)}{\sin(-33°)}$; b) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi - \alpha)$.

4. O scară rezemată de un perete vertical formează cu acesta un unghi de 15°. Să se afle lungimea scării, dacă distanța de la baza scării până la perete este de 1,2 m.

5. Pendulul de lungimea 20 cm al unui ceasornic oscilează și unghiul format de două poziții extreme este de 60°. Să se determine înălțimea la care ajunge capătul lui în raport cu poziția pendulului în condiția de echilibru stabil.

6. Să se ordoneze crescător valorile: $\sin\frac{4\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\text{tg}\frac{\pi}{6}$, $\text{ctg}\frac{3\pi}{4}$.

7. ***Lucrați în perechi!*** Fie:

a) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ și $0° < \alpha < 90°$. Să se afle $\cos(90° + \alpha)$.

b) $\sin\alpha = 0{,}28$ și $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Să se afle $\sin 2\alpha$.

c) $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ și $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Să se afle $\sin\alpha$.

d) $\text{tg}\alpha = 3$, $\text{tg}(\alpha + \beta) = 1$. Să se afle $\text{tg}\beta$.

e) $\text{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\text{tg}(\alpha + \beta) = 3$. Să se afle $\text{ctg}\beta$.

8. Să se calculeze:

a) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; b) $\text{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; c) $\text{arcctg}(-\sqrt{3})$.

B₁

9. ***Investigați!*** Un călător s-a apropiat de malul unui râu. Pe malul celălalt, lângă apă, crește un copac.

a) Cum poate determina călătorul lățimea râului cu ajutorul raportorului?

b) Cum poate proceda el dacă nu ar avea raportor?

10. O roată are 72 de zimți. Să se exprime în grade unghiul de rotație pentru cazul de rotire a roții cu: 1 zimț, 30 de zimți, 144 de zimți, 300 de zimți.

11. Să se compare cu 1 valoarea expresiei $\sqrt{a}$, dacă $a = \cos 110° \sin\frac{5\pi}{3}\cos 10°$.

12. Să se determine, utilizând proprietățile funcțiilor trigonometrice, semnul valorii expresiei:

a) $\frac{\text{ctg}10° + \text{ctg}(-70°)}{\cos 10° + \cos 160°}$; b) $\frac{\cos 1 - \cos\frac{\pi}{3}}{\text{ctg}\frac{5\pi}{6} - \text{ctg}2}$.

13. Să se studieze paritatea funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$; b) $f(x) = \sin 3x - \text{tg}x$.

14. Se știe că $\text{tg}\alpha + \text{ctg}\alpha = m$. Să se afle:

a) $\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha$; b) $\text{tg}^3\alpha + \text{ctg}^3\alpha$.

15. ***Investigați!*** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

A/F

a) $\sin(287° - \alpha)\cos\alpha + \cos(287° - \alpha)\sin\alpha < 0$. b) $\cos(149° + \alpha)\cos\alpha + \sin(149° + \alpha)\sin\alpha > 0$.

16. (BAC 2024) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\dfrac{18\cos^2 x + 12\sin^2 x + 11\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{\pi x - x^2}} = 0.$

17. Să se calculeze, fără a aplica calculatorul de buzunar, $\sin 17° + \cos 253° + \text{ctg}315°.$

18. ***Lucrați în perechi!*** Să se rezolve în $\mathbb{R}$, prin 6 metode, ecuația $\sin x + \cos x = 1.$

19. Să se afle soluțiile ecuației $\log_{\frac{2}{3}} \sin x - 2\log_{\frac{2}{3}} \cos x = 1,$ ce aparțin intervalului $[-350°, 2°].$

20. Raza cercului înscris într-un triunghi isoscel este de 4 ori mai mică decât raza cercului circumscris acestui triunghi. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului.

C_1

21. Unghiul alăturat bazei unui triunghi isoscel are măsura α.

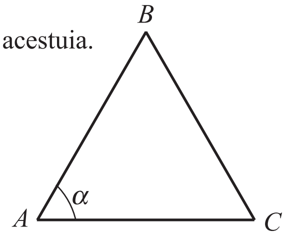
a) Să se determine raportul m dintre aria triunghiului și suma pătratelor lungimilor laturilor acestuia.

b) Să se demonstreze identitatea $m = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\text{tg}\alpha + 3\text{ctg}\alpha}.$

c) Să se afle α, astfel încât $m = \dfrac{1}{8}.$

d) Să se determine valorile lui α pentru care m ia cea mai mare valoare.

e) Să se afle mulțimea de valori ale raportului m.



22*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

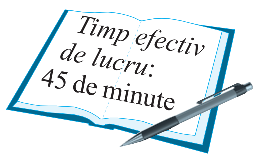
a) $|\sin x - 3\cos x| = 3\sin x + \cos x - 3;$ b) $\log_3(2\sin x \sin 2x) + \log_{\frac{1}{3}}(5\cos x + 4\sin 2x) = 0.$

23*. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\sqrt{5}\sin 2x - \sqrt{1 + 8\sin x \cos x} = 0;$ b) $\sqrt{10}\cos x - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0.$

24. ***Lucrați în grup!*** **Proiect.** *Aplicații ale elementelor de trigonometrie în construcții*

Test sumativ



Profilul real

1. *Indicați litera care corespunde variantei corecte.*

Unghiul $\alpha = 272°$ este un unghi din cadranul

A I.   **B** II.   **C** III.   **D** IV.

2. Determinați valoarea de adevăr a propoziției:

„Dacă $\sin x + \cos x = a$, atunci $\sin^3 x + \cos^3 x = 1{,}5a^2 - 0{,}5a^3$”.

Argumentați.

A/F

3. Fie $\sin\alpha = 0{,}6$, $90° < \alpha < 180°$. Calculați $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\text{tg}2a$, $\text{ctg}2a$.

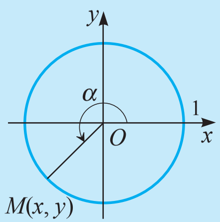
4. Determinați soluțiile ecuației $2\text{ctg}2x - \text{ctg}x = \sin 2x + 3\sin x$ care satisfac condiția $\cos 2x \geq 0.$

5. Fie funcția $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{-\text{tg}2x}$. Determinați valorile lui x, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, pentru care funcția f este definită.

6. Lungimile laturilor unui paralelogram sunt de 5 cm și de 3 cm, iar înălțimea construită pe latura mai mare este de 2 cm. Calculați măsura unghiului ascuțit format de diagonalele paralelogramului.

Funcțiile trigonometrice și proprietățile lor

Funcții trigonometrice



sin, cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

tg: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$;

ctg: $\mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$;

$\cos\alpha = x$; $\sin\alpha = y$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$;

$\sec\alpha = \frac{1}{x}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y}$.

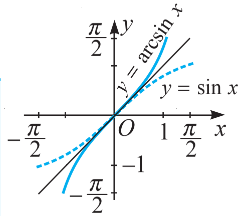
Funcții trigonometrice inverse

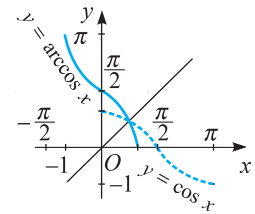
arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin a = t \Leftrightarrow \sin t = a$;

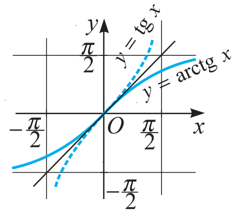
arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arccos a = t \Leftrightarrow \cos t = a$;

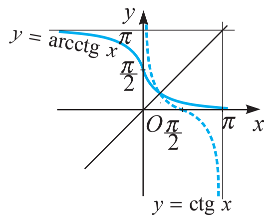
arctg: $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{arctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = a$;

arcctg: $\mathbb{R} \to (0, \pi)$, $\operatorname{arcctg} a = t \Leftrightarrow \operatorname{ctg} t = a$.









$\arcsin(-a) = -\arcsin a$;

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;

$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$;

$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, $a \in [-1, 1]$;

$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$, $a \in \mathbb{R}$.

Proprietăți

$f(x) = \sin x$

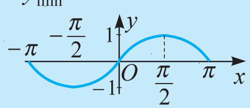
1° $\sin x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2° impară;

3° perioada: 2π;

4° crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$,
descrescătoare pe $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$;

5° $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
$y_{max} = 1$;
$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
$y_{min} = -1$.



$f(x) = \cos x$

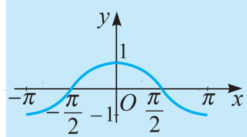
1° $\cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2° pară;

3° perioada: 2π;

4° crescătoare pe $[-\pi + 2\pi k, 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$,
descrescătoare pe $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$;

5° $x_{max} = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
$y_{max} = 1$;
$x_{min} = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
$y_{min} = -1$.



$f(x) = \operatorname{tg} x$

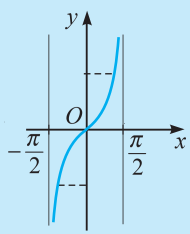
1° $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;

2° impară;

3° perioada: π;

4° crescătoare pe $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

5° nu are extreme.



$f(x) = \operatorname{ctg} x$

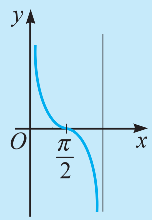
1° $\operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$;

2° impară;

3° perioada: π;

4° descrescătoare pe $(\pi k, \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$;

5° nu are extreme.



Arborele trigonometric

Identitățile trigonometrice fundamentale

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Formule de reducere

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha;\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha;\ \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

etc.

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ $\quad$ ($-$)

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ $\quad$ ($+$)

$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\alpha = \beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ $\qquad$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right] = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\alpha = \beta$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$

($+$) $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \mathrm{tg}[\alpha + (-\beta)]$

$\alpha = \beta$

$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\beta - 1}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}$

$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \mathrm{ctg}[\alpha + (-\beta)]$

Formulele substituției universale

$\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

$\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq (2n+1)\pi,\ \alpha \neq \dfrac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi n,\ \alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}.$

MODULUL 9 Patrulatere. Poligoane. Recapitulare şi completări

Geometria este cea mai bună şi mai simplă dintre toate logicile, cea mai potrivită să dea inflexibilitate judecăţii şi raţiunii.
Denis Diderot

Obiective

- identificarea şi aplicarea patrulaterelor, poligoanelor în contexte diverse;
- utilizarea proprietăţilor studiate ale patrulaterelor şi poligoanelor în situaţii reale şi/sau modelate;
- identificarea şi aplicarea secţiunii de aur în diverse domenii.

§1 Paralelogramul şi proprietăţile lui. Trapezul

1.1. Paralelogramul

Ne amintim

Observaţie

Aici şi în continuare vom examina patrulatere (poligoane) convexe, adică patrulatere (poligoane) situate în acelaşi semiplan închis determinat de dreapta suport a oricărei laturi a patrulaterului.

Definiţie

Patrulaterul cu laturile opuse paralele se numeşte **paralelogram**.

Teorema 1

Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă laturile opuse sunt congruente.

Teorema 2

Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă două laturi opuse sunt paralele şi congruente.

Teorema 3

Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă unghiurile opuse sunt congruente.

Teorema 4

Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele lui au acelaşi mijloc.

Exerciţiu • Demonstraţi teoremele 1–4.

Teorema 5

(teorema paralelelor echidistante)
Fie dreptele neparalele a şi d. Dacă pe dreapta a sunt construite segmente congruente A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ şi prin extremităţile lor sunt construite drepte paralele cu dreapta d, atunci aceste drepte taie pe orice altă dreaptă b ($b \nparallel d$) segmente congruente B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$ (fig. 9.1).

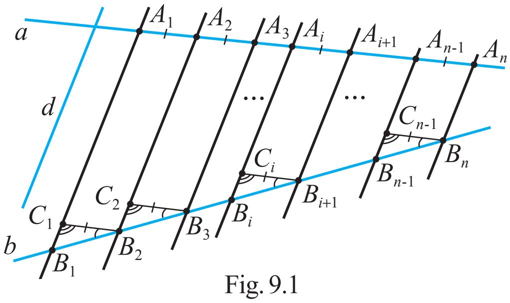


Fig. 9.1

Demonstrație:

Construim prin punctele B_{i+1}, $i=1, ..., n-1$, semidrepte paralele cu dreapta a şi notăm punctele de intersecție cu dreptele A_iB_i prin C_i. Se constată că patrulaterele $A_iA_{i+1}B_{i+1}C_i$ sunt paralelograme, de unde obținem relațiile $[C_iB_{i+1}] \equiv [A_iA_{i+1}]$, ca laturi opuse ale paralelogramului. Aplicând criteriul de congruență ULU, se poate demonstra că $\Delta B_1C_1B_2 \equiv \Delta B_2C_2B_3 \equiv ... \equiv \Delta B_iC_iB_{i+1} \equiv ... \equiv \Delta B_{n-1}C_{n-1}B_n$, de unde rezultă că $[B_1B_2] \equiv [B_2B_3] \equiv ... \equiv [B_iB_{i+1}] \equiv ... \equiv [B_{n-1}B_n]$. ▶

Paralelograme particulare

Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept. Din teorema 3 rezultă că toate unghiurile dreptunghiului sunt drepte.

Teorema 6

Un paralelogram este dreptunghi dacă şi numai dacă diagonalele lui sunt congruente.

Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente. Prin urmare, toate laturile rombului sunt congruente.

Teorema 7

Un paralelogram este romb dacă şi numai dacă diagonalele lui sunt perpendiculare sau sunt conținute de bisectoarele unghiurilor lui.

Exercițiu

• Demonstrați teoremele 6, 7.

Pătratul este rombul cu un unghi drept sau dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente.

1.2. Secțiunea de aur

În pictură şi arhitectură, un dreptunghi de lungime L şi lățime l se numeşte ***dreptunghi de aur*** dacă $\frac{L}{l}=\frac{L+l}{L}$.

Această egalitate poate fi scrisă astfel: $1+\frac{l}{L}=\frac{L}{l}$.

Notând $\frac{L}{l}=x,\ x>0$, obținem: $x=\frac{1}{x}+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Acest număr irațional se notează $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi se mai numeşte ***număr de aur***.

Deci, $\varphi=1{,}61803...$

Se spune că punctul $C\in[AB]$ împarte segmentul AB în raportul de „aur” sau ***secțiunea de aur*** dacă $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$ (fig. 9.2).

Fig. 9.2

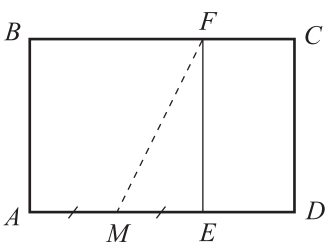


Fig. 9.3

Dacă notăm $AC=L,\ CB=l$ egalitatea de mai sus se scrie $\frac{L+l}{L}=\frac{L}{l}$, adică aceeaşi egalitate ca în cazul dreptunghiului de aur.

Fie $ABCD$ este dreptunghi de aur şi $AD=L,\ AB=l,\ L>l$ (fig. 9.3).

Fie $AEFB$ este pătratul cu latura $AE=AB=l$, iar M este mijlocul segmentului AE. Atunci din triunghiul dreptunghic FEM obținem:

$$FM=\sqrt{ME^2+FE^2}=\sqrt{\frac{l^2}{4}+l^2}=l\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Deoarece $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $AD=AM+MD$, obţinem

$$\frac{AM+MD}{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\frac{\frac{l}{2}+MD}{l}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{MD}{l}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow MD=l\frac{\sqrt{5}}{2}=MF.$$

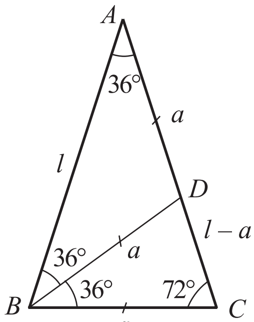


Fig. 9.4

Astfel, dreptunghiul de aur *ABCD* se descompune într-un pătrat *AEFB* şi un nou dreptunghi *EFCD*, care, surprinzător, este, de asemenea, dreptunghi de aur. Demonstraţi acest lucru!

Din raţionamentele de mai sus rezultă şi procedeul de construire a unui dreptunghi de aur, pornind de la pătratul dat *AEFB*: marcăm cu *M* mijlocul laturii *AE* şi cu ajutorul compasului centrat în *M* găsim punctul *D* de intersecţie al semidreptei [*AE* cu cercul de centru *M* şi rază *MF*. Având trei vârfuri, *A*, *B* şi *D*, se determină uşor şi cel de-al patrulea vârf *C* al dreptunghiului de aur *ABCD*.

Triunghiul isoscel cu unghiurile 36°, 72°, 72° se numeşte ***triunghi de aur***, deoarece raportul laturii laterale către bază este raportul de aur (fig. 9.4).

Exerciţiu

Utilizând desenul (fig. 9.4) şi aplicând asemănarea triunghiurilor sau teorema bisectoarei unghiului interior al triunghiului, deduceţi acest rezultat.

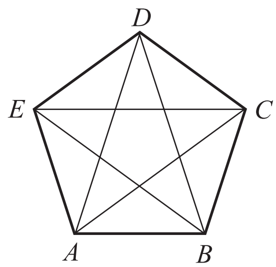
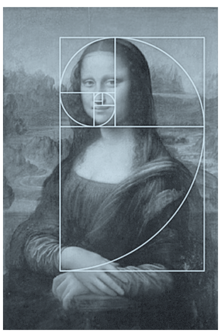


Fig. 9.5

Observăm că ΔADB este isoscel, cu unghiurile de 36°, 72°, 72°, şi utilizând rezultatul obţinut la exerciţiul de mai sus, se deduce că diagonala pentagonului regulat şi latura lui sunt în secţiunea de aur: $\dfrac{AD}{BA}=\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (fig. 9.5).

Fiind definită de Euclid cu mai mult de două mii de ani în urmă, ***secţiunea de aur*** apare într-o varietate de locuri surprinzătoare: cochiliile moluştelor, aranjamentul seminţelor de floarea soarelui, forma galaxiilor, cristalele unor substanţe, pictură, arhitectură, muzică.



„Secţiunea de aur” se poate identifica şi în creaţia celebră a lui Leonardo da Vinci, *Gioconda* (sau *Mona Lisa*). Autorul a folosit „secţiunea de aur” în mod intenţionat, creând unul dintre cele mai renumite tablouri din lume.

Secţiunea de aur a fost cunoscută din timpuri străvechi de către egipteni şi greci, dar a fost divulgată abia în secolul al III-lea î.e.n. de către Euclid.

Secţiunea de aur (numită uneori şi ***raportul de aur, proporţia de aur, numărul de aur***) (în limba latină *sectio aurea*), notată cu litera greacă „Φ” (phi majuscul) sau cu „φ” (phi minuscul), care se citesc „fi”, este primul număr iraţional descoperit şi definit în istorie. Acesta este aproximativ egal cu 1,618033.

Euclid l-a calificat pe „Φ” ca pe o simplă împărţire a unui segment în ceea ce el a numit „medie” şi „extremă raţie”.

Raportul de aur/numărul de aur poate fi definit în diferite moduri. Cel mai important concept matematic asociat cu numărul de aur este ***şirul lui Fibonacci*** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... Împărţind orice număr (începând cu al patrulea) la predecesorul său, se obţine aproximativ numărul de aur. Veţi studia şirul lui Fibonacci în clasa a XI-a.

Şirul lui Fibonacci şi secţiunea de aur au aplicaţii în diverse domenii.

Leonardo da Vinci a folosit secţiunea de aur (fiind numită *proporţia divina*) şi în capodopera *Cina cea de taină*.

Raportul de aur ar putea fi prezent şi în muzică. Se presupune că Bach şi Beethoven au ţinut cont de el în compoziţiile lor.

1.3. Trapezul

Trapezul este patrulaterul cu două laturi opuse paralele şi celelalte două ***laturi neparalele***. Laturile paralele se numesc ***baze*** (***baza mare*** şi ***baza mică***).

Trapezul cu laturile neparalele congruente se numeşte ***trapez isoscel***.

Segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez se numeşte ***linie mijlocie*** a trapezului. Linia mijlocie este paralelă cu bazele şi lungimea ei este egală cu semisuma lungimilor lor.

Problemă rezolvată

Baza mică a unui trapez isoscel este congruentă cu latura neparalelă, iar diagonala trapezului este perpendiculară pe latura lui neparalelă. Să se afle măsurile unghiurilor interioare ale trapezului.

Rezolvare:

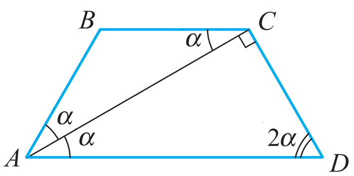


Fig. 9.6

Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $[AB]\equiv[BC]\equiv[CD]$ şi $AC\perp CD$ (fig. 9.6). Pentru că $BC \parallel AD$, iar AC este secantă, rezultă că $m(\angle BCA)=m(\angle CAD)=\alpha$. Deoarece $[AB]\equiv[BC]$, rezultă că ΔABC este isoscel cu $m(\angle BAC)=\alpha$. Aşa cum unghiurile alăturate bazei trapezului isoscel sunt congruente, obţinem: $m(\angle CDA)=m(\angle BAD)=2\alpha$. În triunghiul dreptunghic ACD avem $3\alpha=90°$, adică $\alpha=30°$.

Atunci, $m(\angle CDA)=m(\angle BAD)=2\cdot 30°=60°$, $m(\angle ABC)=m(\angle BCD)=\alpha+90°=120°$.

Răspuns: 120°, 120°, 60°, 60°.

1.4. Patrulatere înscrise şi circumscrise

Amintim că unghiul cu vârful situat pe un cerc şi ale cărui laturi intersectează cercul se numeşte ***unghi înscris în cerc*** (fig. 9.7).

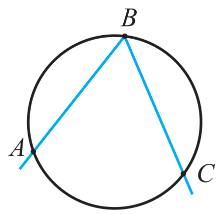


Fig. 9.7

Teorema 8

Măsura unghiului înscris într-un cerc este egală cu jumătatea măsurii arcului cuprins între laturile lui:

$m(\angle ABC)=\frac{1}{2}m(\smile AC)$ (fig. 9.7).

Definiţii

- Patrulaterul se numeşte **înscris în cerc** dacă vârfurile lui sunt situate pe cerc.
- Patrulaterul se numeşte **inscriptibil** dacă el poate fi înscris într-un cerc.
- Patrulaterul se numeşte **circumscris unui cerc** dacă laturile lui sunt tangente la cerc.
- Patrulaterul se numeşte **circumscriptibil** dacă el poate fi circumscris unui cerc.

Teorema 9

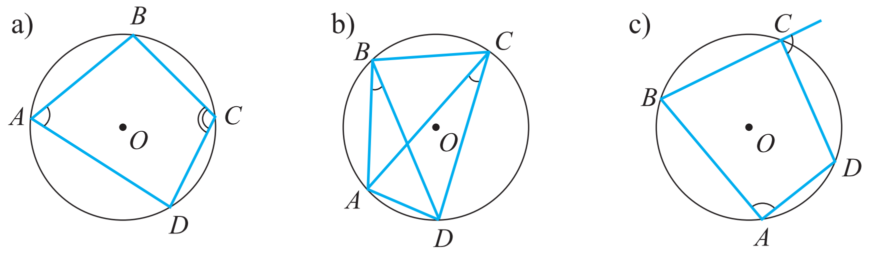
Pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, este necesar şi suficient ca suma măsurilor unghiurilor opuse să fie egală cu 180° (fig. 9.8 a)).

Teorema 10

Pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, este necesar şi suficient ca unghiul format de o diagonală şi o latură să fie congruent cu unghiul format de latura opusă şi cealaltă diagonală (fig. 9.8 b)).

Teorema 11

Pentru ca un patrulater să fie inscriptibil, este necesar şi suficient ca un unghi interior să fie congruent cu unghiul exterior de la vârful opus acestuia (fig. 9.8 c)).



Teorema 12

Un patrulater poate fi circumscris unui cerc dacă şi numai dacă sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale:
$AB + CD = AD + BC$ (fig. 9.9).

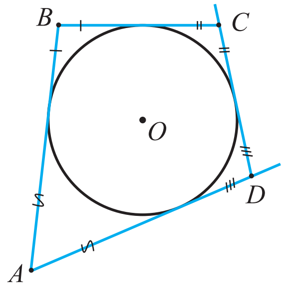


Fig. 9.9

Exerciţiu • Demonstraţi teoremele 8–12.

Probleme propuse

Profilurile umanistic, arte, sport

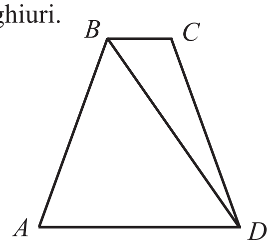
A

1. Diagonalele unui patrulater au lungimi de 16 cm şi 28 cm. Să se afle perimetrul patrulaterului cu vârfurile în mijlocurile laturilor patrulaterului dat.

2. Bisectoarea unghiului C al paralelogramului $ABCD$ intersectează latura AD în punctul E. Să se determine lungimea segmentului AE, dacă $AB = 18$ cm şi $AD = 30$ cm.

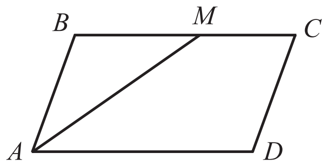
3. Unul dintre unghiurile unui paralelogram are măsura de 50°. Să se afle măsurile celorlalte unghiuri.

4. Diagonala unui paralelogram formează cu laturile paralelogramului unghiuri de 30° şi 40°. Să se determine măsurile unghiurilor paralelogramului.



5. (BAC 2018) În desenul alăturat este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$, în care $BC \parallel AD$, diagonala BD este bisectoare a unghiului ABC şi $m(\angle ABD) = 55°$. Scrieţi în casetă măsura în grade a unghiului BAD.

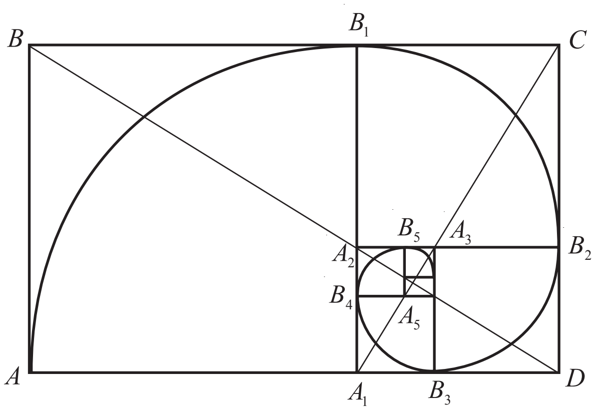
$m(\angle BAD) = \boxed{}$.



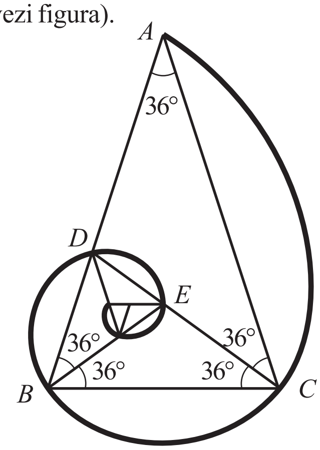
6. (BAC 2017) În desenul alăturat este reprezentat paralelogramul $ABCD$, în care $m(\angle BAD) = 70°$, iar AM, $M \in (BC)$, este bisectoare a unghiului BAD. Scrieţi în casetă măsura în grade a unghiului BMA.

$m(\angle BMA) = \boxed{}$.

7. Fie dreptunghiul de aur $ABCD$, care este descompus în pătratul ABB_1A_1 şi un nou dreptunghi de aur A_1B_1CD.
Descompuneţi acest dreptunghi de aur în pătratul $A_2B_1CB_2$ şi un nou dreptunghi de aur $A_1A_2B_2D$. Continuaţi acest proces de descompunere a fiecărui nou dreptunghi de aur obţinut la etapa anterioară cât mai mult posibil (vezi figura). Uniţi punctele A şi B_1, B_1 şi B_2, B_2 şi B_3 ş.a.m.d. prin arcele de cerc $\smile AB_1$, $\smile B_1B_2$, $\smile B_2B_3$, $\smile B_3B_4$, ... şi obţineţi o porţiune de spirală, numită spirală logaritmică (vezi figura).



8. Să se obţină o porţiune de spirală logaritmică pornind de la triunghiul de aur ABC, care se descompune într-un triunghi isoscel ACD şi un nou triunghi de aur BCD. Continuaţi procesul de descompunere a noului triunghi de aur obţinut la etapa anterioară cât mai mult posibil (vezi figura).

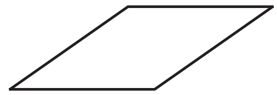


B

9. Diferența măsurilor unghiurilor opuse ale unui trapez isoscel este egală cu 30°. Să se determine măsurile unghiurilor trapezului.

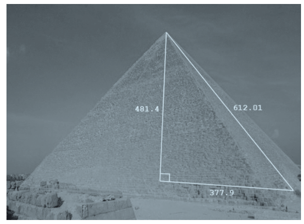
10. (BAC 2021) Diagonalele unui romb sunt de 12 cm şi 16 cm. Determinați lungimea înălțimii rombului.

11. (BAC 2011) O placă de faianță are forma unui romb cu unghiul obtuz de măsură egală cu 150° şi înălțimea de 24 cm. Vor fi oare sificiente 100 astfel de plăci pentru a acoperi toată suprafața podelei unei bucătării cu dimensiunile de 3 m × 4 m?



12. ***Investigați!*** a) Ombilicul împarte înălțimea corpului uman după secțiunea de aur.
b) Înălțimea unui om mijlociu stând în picioare şi având un braț ridicat este împărțită de stern după secțiunea de aur.

13. Într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului de la bază este congruentă cu baza. Arătați că acest triunghi este triunghi de aur.



14. Considerând că baza piramidei lui Keops este un pătrat cu latura de aproximativ 230,35 m, iar înălțimea ei este egală cu aproximativ 146,73 m, să se verifice dacă înălțimea feței laterale şi latura bazei piramidei sunt în proporție de aur.

15. Punctele M şi N sunt situate în acelaşi semiplan limitat de dreapta d. Distanța de la punctul M la dreapta d este de 12 cm, iar distanța de la punctul N la dreapta d este de 28 cm. Să se determine distanța de la mijlocul segmentului MN la dreapta d.

C

16. ***Lucrați în perechi!*** Piciorul înălțimii construite din vârful unghiului obtuz al unui trapez isoscel împarte baza mare în segmente de 8 cm şi 32 cm. Să se afle lungimile bazelor trapezului.

17. Lungimile bazelor unui trapez se raportă ca 3 : 2, iar lungimea liniei mijlocii a trapezului este de 70 cm. Să se afle lungimile bazelor trapezului.

Profilul real

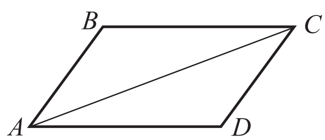
A₁

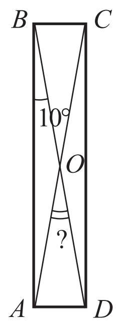
1. Bisectoarea unghiului A al paralelogramului $ABCD$ intersectează latura BC în punctul E. Să se arate că triunghiul ABE este isoscel.

2. Să se demonstreze că lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

3. (BAC 2014) În desenul alăturat, $ABCD$ este un paralelogram în care AC este bisectoare a unghiului BAD şi $AB = 4$ cm. Scrieți în casetă perimetrul paralelogramului $ABCD$.

$P_{ABCD} = \boxed{}$ cm.





4. (BAC 2013) În desenul alăturat, $ABCD$ este dreptunghi, $m(\angle ABD) = 10°$. Folosind datele din desen, scrieți în casetă măsura în grade a unghiului AOD.

$m(\angle AOD) = \boxed{}$.

5. Să se afle diagonala şi latura laterală a unui trapez isoscel cu bazele de 20 cm şi 12 cm, dacă se ştie că centrul cercului circumscris trapezului este situat pe baza mare.

6. Să se afle raza cercului circumscris trapezului isoscel cu bazele de 21 cm şi 9 cm, iar înălțimea de 8 cm.

7. Într-un trapez isoscel a cărui latură laterală are lungimea de 17 cm este înscris un cerc cu diametrul de 15 cm. Să se afle bazele trapezului.

B₁

8. Într-un romb cu un unghi de 60° este înscris un cerc cu raza de 2 dm. Să se afle laturile rombului.

9. ***Lucrați în perechi!*** Într-un cerc cu raza R este înscris un pătrat. Dintr-un vârf al acestui pătrat sunt duse două coarde ce subîntind arce de măsura 120°. Să se afle lungimea segmentului diagonalei pătratului cuprins între aceste coarde.

10. Să se arate că punctele de intersecție a bisectoarelor celor patru unghiuri interioare ale unui paralelogram sunt vârfurile unui dreptunghi.

C₁

11. Latura BC a patrulaterului $ABCD$ este diametrul cercului circumscris acestui patrulater. Se ştie că $BC = 8$ cm, $BD = 4\sqrt{2}$ cm şi $m(\angle DCA) : m(\angle ACB) = 2:1$. Să se afle lungimea laturii AB.

12. Centrul cercului înscris într-un trapez dreptunghic este situat la distanțele $3\sqrt{10}$ m şi $9\sqrt{10}$ m de extremitățile unei laturi laterale. Să se afle lungimile laturilor trapezului.

13. Bazele unui trapez au lungimile de 6 cm şi 24 cm. Să se afle razele cercurilor înscris şi circumscris trapezului.

14. ***Investigați!*** Lungimile bazelor unui trapez isoscel sunt a şi b $(a > b)$. Să se arate că piciorul înălțimii trapezului construite din vârful unghiului obtuz împarte baza mare în două segmente cu lungimile $\frac{1}{2}(a+b)$ şi $\frac{1}{2}(a-b)$.

15. Lungimile diagonalelor unui patrulater sunt d_1 şi d_2. Să se afle perimetrul patrulaterului cu vârfurile în mijlocurile laturilor patrulaterului dat.

16. Piciorul înălțimii construite din vârful unghiului obtuz al unui trapez isoscel împarte baza trapezului în două segmente. Să se afle raportul lungimilor acestor segmente, dacă lungimile bazelor sunt de 40 cm şi 56 cm.

§2 Poligoane. Poligoane regulate

2.1. Noțiunea de poligon

Definiție

Se numeşte **linie frântă** $A_1A_2A_3...A_n$ reuniunea segmentelor $[A_1A_2]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$, unde punctele A_i, A_{i+1}, A_{i+2} nu sunt coliniare pentru toți $i \in \{1, 2, 3, ..., n-2\}$ (fig. 9.10).

Ne amintim

Punctele A_1, A_2, A_3, ..., A_n se numesc ***vârfuri*** sau ***extremități*** ale liniei frânte, iar segmentele $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_{n-1}A_n]$ se numesc ***laturi*** ale liniei frânte. Laturile liniei frânte se numesc ***laturi adiacente***, dacă ele au un vârf comun, şi – ***neadiacente***, în caz contrar.

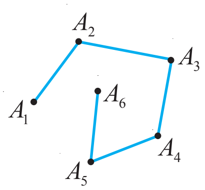


Fig. 9.10

Linia frântă se numeşte ***linie frântă simplă*** dacă oricare două laturi neadiacente ale ei nu au niciun punct comun (fig. 9.10).

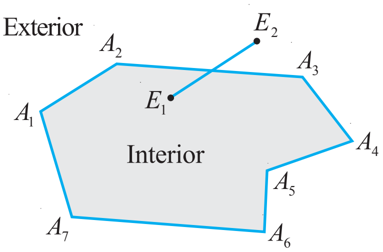
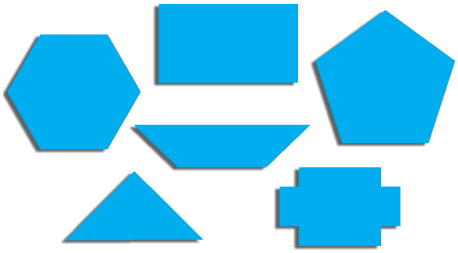


Fig. 9.11

Dacă vârfurile A_1, A_{n-1} şi A_n ale liniei frânte $A_1A_2A_3...A_n$ sunt necoliniare, atunci reuniunea acestei linii frânte cu segmentul $[A_1A_n]$ se numeşte ***linie frântă închisă*** şi se notează, de asemenea, $A_1A_2A_3...A_n$. De exemplu, în figura 9.11 este reprezentată linia frântă închisă $A_1A_2...A_6A_7$.

O linie frântă închisă simplă determină în plan trei mulţimi disjuncte: linia frântă, ***interiorul*** liniei frânte, ***exteriorul*** liniei frânte. Orice segment (E_1E_2) determinat de un punct din interiorul liniei frânte şi un punct din exteriorul ei intersectează linia frântă (fig. 9.11).



O linie frântă închisă simplă se numeşte ***poligon***. Vârfurile şi laturile liniei frânte se numesc ***vârfuri*** şi, respectiv, ***laturi*** ale poligonului.

Un poligon se numeşte ***poligon convex*** dacă el este situat în acelaşi semiplan închis determinat de dreapta suport a oricărei laturi a poligonului (fig. 9.12 a), b)). În caz contrar, poligonul se numeşte ***neconvex*** (fig. 9.12 c), d)).

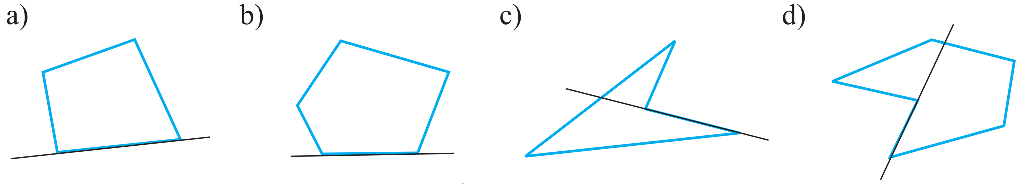


Fig. 9.12

Reuniunea poligonului şi a interiorului său se numeşte ***suprafaţă poligonală***.

Se numeşte ***unghi interior*** al poligonului convex unghiul format de semidreptele suport ale două laturi adiacente. Unghiul adiacent suplimentar unui unghi interior al poligonului se numeşte ***unghi exterior*** al poligonului convex. Segmentele determinate de vârfurile care nu sunt extremităţi ale aceleiaşi laturi se numesc ***diagonale*** ale poligonului.

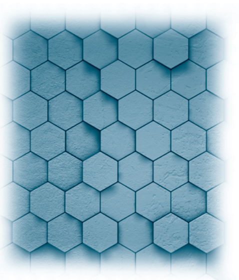
Numărul de laturi ale poligonului este egal cu numărul de unghiuri (vârfuri), de aceea poligoanele se numesc după numărul de unghiuri sau numărul de laturi. De exemplu: ***triunghi***, ***patrulater***, ***pentagon***, ***hexagon*** etc.

2.2. Poligoane regulate

Ne amintim

Definiţie

Un poligon convex se numeşte **poligon regulat** dacă el are toate laturile congruente şi toate unghiurile congruente.



Cele mai simple poligoane regulate sunt triunghiul echilateral şi pătratul.

Din fiecare vârf al poligonului convex cu n laturi pot fi construite $n-3$ diagonale care împart poligonul în $n-2$ triunghiuri (fig. 9.13). Aşa cum suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu 180°, rezultă că suma S_n a măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu n laturi este egală cu $180°(n-2)$, adică $S_n = 180°(n-2)$.

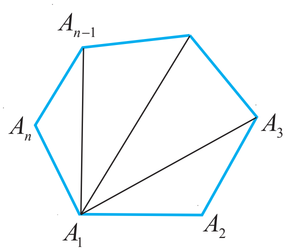


Fig. 9.13

Prin urmare, *măsura* β_n *a unghiului interior al unui poligon regulat cu n laturi* se calculează folosind formula: $\boxed{\beta_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}}$.

Definiţii

- Poligonul convex se numeşte **înscris în cerc** dacă vârfurile lui sunt situate pe cerc.
- Poligonul convex se numeşte **inscriptibil** dacă el poate fi înscris într-un cerc.
- Poligonul convex se numeşte **circumscris** unui cerc dacă laturile lui sunt tangente la cerc.
- Poligonul convex se numeşte **circumscriptibil** dacă el poate fi circumscris unui cerc.

Teorema 34

Dacă $A_1A_2A_3...A_n$ este poligon regulat, atunci el este:
1) inscriptibil (fig. 9.14 a)),
2) circumscriptibil (fig. 9.14 b)).

Demonstrație:

1) Considerăm cercul circumscris triunghiului $A_1A_2A_3$. Fie punctul O centrul acestui cerc. Vom arăta că vârful A_4 este situat pe acest cerc. Într-adevăr, deoarece triunghiurile isoscele OA_1A_2 şi OA_2A_3 sunt congruente (criteriul LLL), rezultă că

$$\mathrm{m}(\angle 1) = \mathrm{m}(\angle 2) = \mathrm{m}(\angle 3) = \mathrm{m}(\angle 4) = \mathrm{m}(\angle 5) = \frac{\beta_n}{2}.$$

Prin urmare, $\Delta OA_3A_4 \equiv \Delta OA_2A_3$ (criteriul LUL), adică $OA_4 = OA_3 = OA_2 = OA_1$, ceea ce demonstrează că A_4 este situat pe acelaşi cerc cu punctele A_1, A_2, A_3. În mod analog se demonstrează că cercul $\mathscr{C}(O, OA_1)$ trece şi prin celelalte vârfuri ale poligonului $A_1A_2A_3...A_n$.

2) În partea întâi (1) a demonstrației am arătat că laturile poligonului regulat $A_1A_2A_3...A_n$ sunt coarde congruente ale cercului $\mathscr{C}(O, OA_1)$. Prin urmare, ele se află la aceeaşi distanță de centrul O al cercului, adică sunt tangente cercului de centru O şi raza OB, unde $OB \perp A_1A_2$ (fig. 9.14 b)).

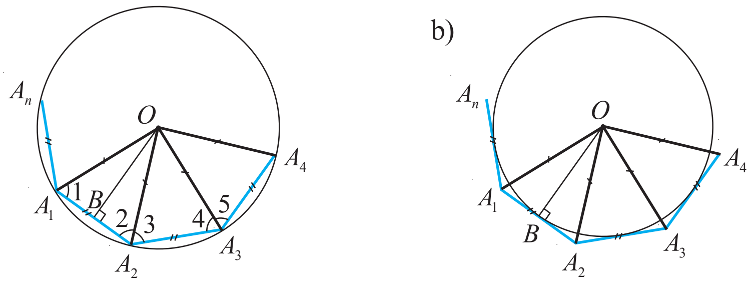


Fig. 9.14

Deci, poligonul $A_1A_2A_3...A_n$ este circumscris cercului $\mathscr{C}(O, OB)$. ▶

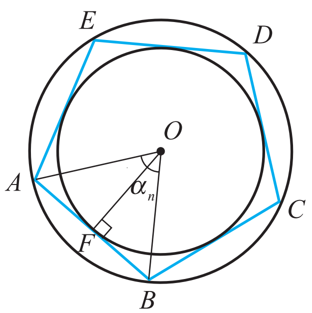


Fig. 9.15

Corolar. Centrul cercului înscris în poligonul regulat coincide cu centrul cercului circumscris acestui poligon (fig. 9.15).

Centrul comun al acestor cercuri se numeşte ***centru*** (***centru de rotație, centru de simetrie***) ***al poligonului regulat***.

Raza cercului circumscris se numeşte ***rază a poligonului regulat***, iar raza cercului înscris se numeşte ***apotemă a poligonului regulat***. Unghiul AOB cu vârful în centrul poligonului, unde A şi B sunt extremitățile unei laturi a acestuia, se numeşte ***unghi la centru al poligonului regulat*** (fig. 9.15). Măsura acestui unghi este $\alpha_n = \frac{360°}{n}$, unde n este numărul de laturi ale poligonului regulat.

Probleme rezolvate

1. Să se exprime lungimea a_n a laturii unui poligon regulat cu n laturi prin raza R a cercului circumscris.

Rezolvare:

În ΔAOB avem $m(\angle AOD) = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180^\circ}{n}$ (fig. 9.16).

$a_n = AB = 2AD = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$. În particular,

$a_3 = 2R\sin 60^\circ = R\sqrt{3}, \quad a_4 = 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2}, \quad a_6 = 2R\sin 30^\circ = R.$

Răspuns: $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

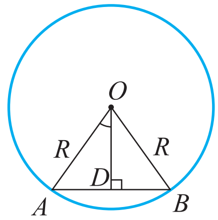


Fig. 9.16

2. Să se exprime lungimea a_n a laturii unui poligon regulat prin raza r a cercului înscris în acest poligon.

Rezolvare:

În ΔOCE avem $m(\angle EOC) = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180^\circ}{n}$ (fig. 9.17).

$a_n = CF = 2CE = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$. În particular,

$a_3 = 2r\,\mathrm{tg}60^\circ = 2r\sqrt{3}, \quad a_4 = 2r\,\mathrm{tg}45^\circ = 2r, \quad a_6 = 2r\,\mathrm{tg}30^\circ = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$

Răspuns: $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

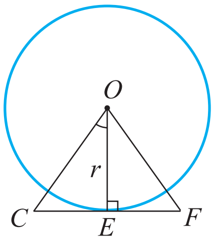


Fig. 9.17

Poligoanele regulate (şi nu numai) se utilizează la confecționarea elementelor pentru pavaje.

În cotidian, ***a pava*** înseamnă a executa un pavaj, a acoperi o stradă, o curte etc. cu pavaj. Altfel spus, solul se acoperă cu elemente de mici dimensiuni, ale căror forme sunt mai mult sau mai puțin regulate. Aceste elemente se mai numesc şi ***dale***. Pavajul este rezultatul pavării.

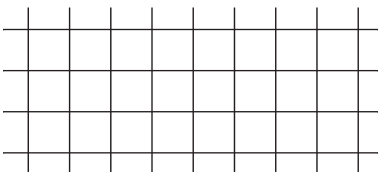
În matematică, o ***pavare*** este acoperirea unei suprafețe plane, folosind una sau mai multe forme geometrice plane, numite ***dale***, fără suprapuneri şi fără goluri.

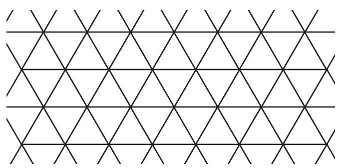
Pavajele pot fi periodice sau neperiodice, regulate sau semiregulate.

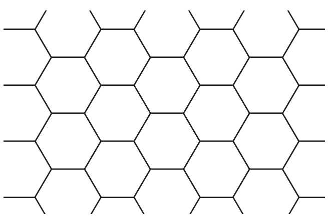
Pavajele periodice au un model care se repetă, cele neperiodice nu au un astfel de model.

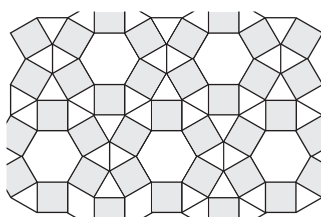
Pavajele regulate constau din dale poligonale regulate, toate de aceeaşi formă, iar pavajele semiregulate constau din dale regulate de mai multe forme.

În figura de mai jos sunt prezentate pavaje regulate cu: a) pătrate; b) triunghiuri echilaterale; c) hexagoane regulate; d) pavajul semiregulat cu hexagoane regulate, pătrate şi triunghiuri echilaterale.

a) 

b) 

c) 

d) 

Probleme propuse

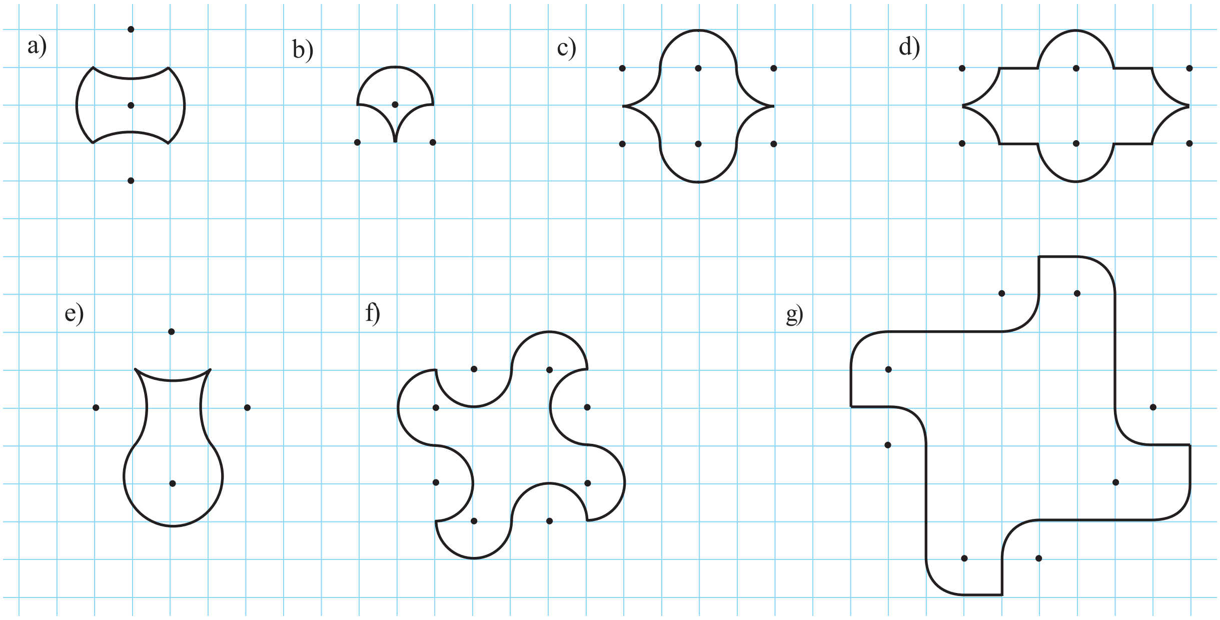
Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Câte laturi are un poligon regulat, dacă măsura fiecărui unghi interior al acestuia este de: a) 150°; b) 160°?
2. Câte laturi are un poligon regulat, dacă măsura fiecărui unghi exterior al acestuia este de: a) 36°; b) 24°?

B

3. Să se exprime raza cercului înscris într-un triunghi echilateral prin raza cercului circumscris acestui triunghi.
4. Pentru fiecare dintre dalele prezentate în figura de mai jos se propune să se realizeze pavaje pe foaie.



5. Să se aducă exemple (utilizând internetul) de pavaje realizate în diverse ţări. Să se determine ce tipuri de figuri geometrice au fost utilizate.

C

6. ***Lucraţi în perechi!*** Lungimea laturii unui triunghi echilateral înscris într-un cerc este a. Să se afle lungimea laturii pătratului înscris în cercul respectiv.

Profilul real

A_1

1. Lungimea laturii unui poligon regulat cu n laturi este a_n. Să se exprime raza R şi apotema r ale acestui poligon prin a_n şi n.
2. Într-un cerc cu raza de 1 m este înscris un poligon regulat cu n laturi. Să se determine perimetrul $\mathscr{P}_n$ al poligonului pentru $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$.

B_1

3. Un pătrat şi un triunghi echilateral sunt înscrise într-un cerc cu raza de 1 m, astfel încât o latură a pătratului este paralelă cu o latură a triunghiului. Să se afle aria părţii comune a pătratului şi triunghiului.

C_1

4. ***Lucraţi în perechi!*** Într-un cerc cu raza de 4 m este înscris un triunghi echilateral, iar pe latura acestuia este construit un pătrat. Să se calculeze raza cercului circumscris pătratului.
5. Să se circumscrie unui cerc un triunghi echilateral, un pătrat, un octogon regulat. Argumentaţi procedeele.

§ 3 Ariile figurilor plane

Definiție

Fiecărei figuri plane i se asociază un număr real nenegativ, numit **aria** figurii respective. Aria posedă următoarele proprietăți:
1° figurile congruente au arii egale;
2° dacă o figură este reuniunea a două figuri disjuncte, atunci aria figurii date este egală cu suma ariilor celor două figuri disjuncte;
3° pătratul cu latura de 1 u.l. are aria 1 u.p.

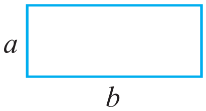
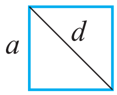
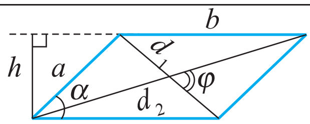
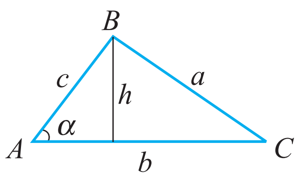
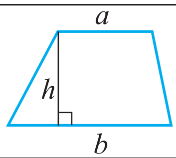
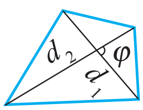
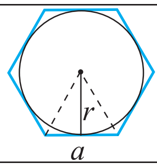
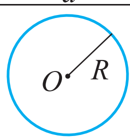
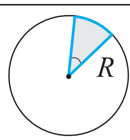


Fig. 9.18

În baza acestei definiții se poate demonstra că aria oricărui dreptunghi (fig. 9.18) este egală cu produsul lungimilor a două laturi ce au un vârf comun: $\mathcal{A} = a \cdot b$ (măsurate cu aceeaşi unitate de măsură).

Formulele pentru calculul ariilor unor figuri geometrice sunt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. crt.	Figura	Reprezentarea geometrică	Formula
1	Pătrat		$\mathcal{A} = a^2 = \frac{1}{2}d^2$
2	Paralelogram		$\mathcal{A} = bh = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$
3	Triunghi		$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = pr = \frac{abc}{4R} =$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, r – raza cercului înscris în ΔABC, R – raza cercului circumscris triunghiului ABC.
4	Trapez		$\mathcal{A} = \frac{a+b}{2}h$
5	Patrulater convex		$\mathcal{A} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$
6	Poligoane regulate		$\mathcal{A} = \frac{ar}{2}n = pr$, unde r – raza cercului înscris în poligonul regulat, $p = \frac{an}{2}$, p – semiperimetrul poligonului, n – numărul de laturi ale poligonului.
7	Disc		$\mathcal{A} = \pi R^2$
8	Sector de disc		$\mathcal{A} = \frac{1}{2}R^2\alpha$ (α în radiani) $\mathcal{A} = \pi R^2 \frac{\alpha}{360°}$ (α în grade)

Probleme rezolvate

1. Punctul de tangenţă a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în segmente de lungimi m şi n. Să se afle aria triunghiului (fig. 9.19).

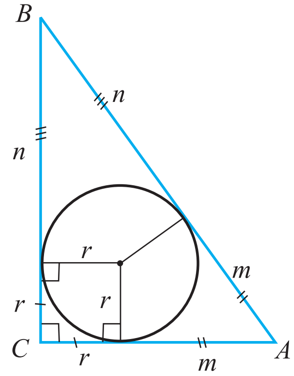


Fig. 9.19

Rezolvare:

Conform teoremei lui Pitagora,

$(r+m)^2+(r+n)^2=(m+n)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2+2r(m+n)+m^2+n^2=m^2+n^2+2mn \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2+r(m+n)=mn.$

Atunci, $\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}(r+m)(r+n)=$

$=\frac{1}{2}(r^2+r(m+n)+mn)=\frac{1}{2}(mn+mn)=mn$ (u.p.).

2. Diagonalele trapezului $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ îl împart în patru triunghiuri cu un vârf comun O. Ştiind că ariile triunghiurilor AOD şi BOC sunt $\mathcal{A}_1$ şi, respectiv, $\mathcal{A}_2$, să se afle aria trapezului (fig. 9.20).

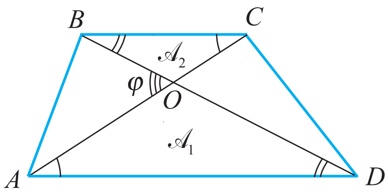


Fig. 9.20

Rezolvare:

Aşa cum $\Delta AOD \sim \Delta COB$, rezultă că

$$\frac{BC}{AD}=\frac{CO}{AO}=\frac{OB}{OD}=\sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}} \text{ (asemănare de coeficient } \sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}}\text{).}$$

Fie $m(\angle AOB)=\varphi$.

Atunci, $CO\cdot OD=AO\cdot OB \Rightarrow \mathcal{A}_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\varphi=\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\varphi=\mathcal{A}_{COD}.$

Deoarece $OB=\sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}}\cdot OD$, rezultă că $\mathcal{A}_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin\varphi=\frac{1}{2}AO\cdot\sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}}\cdot OD\sin\varphi=$

$=\sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}}\cdot\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin(180^\circ-\varphi)=\sqrt{\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}}\cdot\mathcal{A}_1=\sqrt{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}.$

Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+2\sqrt{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}=(\sqrt{\mathcal{A}_1}+\sqrt{\mathcal{A}_2})^2.$

Probleme propuse

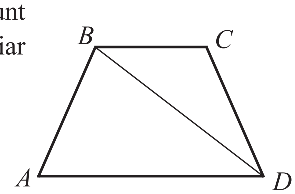
Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic se raportă ca 3:4, iar lungimea ipotenuzei este de 50 cm. Să se determine aria triunghiului.
2. Punctul de tangenţă a cercului înscris într-un triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în segmente de 5 cm şi 12 cm. Să se afle aria triunghiului.

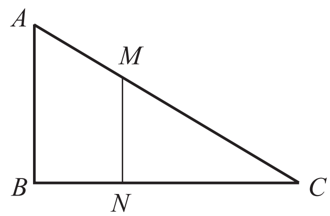
B

3. Să se determine aria unui triunghi echilateral cu lungimea laturii de $4\sqrt{3}$ cm.
4. Diagonalele unui romb sunt de 8 cm şi 15 cm. Să se afle aria rombului.
5. Perimetrul unui paralelogram este de 72 cm. Lungimile laturilor lui se raportă ca 5 : 7, iar măsura unghiului ascuţit este de 30°. Să se afle aria paralelogramului.
6. (BAC 2019) În trapezul isoscel $ABCD$ bazele AD şi BC sunt de 16 cm şi 8 cm, respectiv, iar diagonala este de 15 cm. Determinaţi aria trapezului.



7. (BAC 2015) Latura unui romb are lungimea egală cu 20 cm, iar lungimile diagonalelor lui se raportă ca 3 : 4. Determinați aria rombului.

8. (BAC 2022) Fie ABC un triunghi dreptunghic, în care $m(\angle ABC) = 90°$, $AB = 9$ cm, $AC = 15$ cm. Pe laturile AC şi BC se consideră, respectiv, punctele M şi N, astfel încât $MN \parallel AB$ şi $BN : NC = 1 : 2$.
Determinați aria trapezului $ABNM$.



C

9. *Lucrați în perechi!* Diagonalele unui trapez isoscel sunt perpendiculare, iar lungimea liniei mijlocii este de 12 cm. Să se afle aria trapezului.

10. Din punctul A al unui cerc sunt construite coardele AB şi AC, astfel încât $AB = AC = 2\sqrt{3}$ cm, iar $m(\angle BAC) = 60°$. Să se afle aria discului mărginit de acest cerc.

11. Să se calculeze aria fiecărei dale din problema **B 4**, p. 205, un pătrățel având aria de 1 u.p.

Lucrați în grup!

12. ❍ **Lucrare practică.** *Calcularea perimetrelor şi a ariilor în curtea şcolii*

13. ❍ **Proiect STEAM.** *Modele de pavaje*

Profilul real

A_1

1. Să se determine aria unui romb, dacă lungimea laturii lui este a, iar suma lungimilor diagonalelor lui este d.

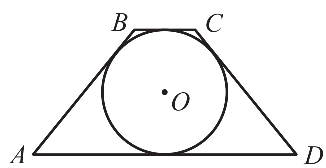
2. Diagonala unui trapez isoscel este bisectoare a unghiului obtuz. Perimetrul trapezului este de 22 cm, iar lungimea bazei mari este de 6 cm. Să se determine aria trapezului.

3. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $AB = 5$ m, $AC = 3$ m, $BC = 4$ m. Să se afle ariile triunghiurilor ACD şi ADB, dacă $[AD]$ este bisectoare.

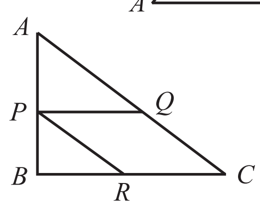
B_1

4. *Lucrați în perechi!* Într-un trapez isoscel se poate înscrie un cerc. Linia mijlocie, de 10 m, împarte trapezul în două figuri, ale căror arii se raportă ca 2:3. Să se determine aria trapezului.

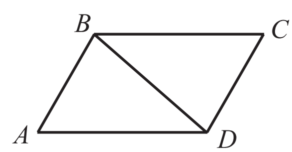
5. (BAC 2011) Un strat de flori are forma unui trapez isoscel, în care florile sunt plantate doar în discul mărginit pe cercul înscris în acest trapez (vezi desenul). Lungimea bazei mici a trapezului este egală cu 1 m. Calculați aria suprafeței stratului de flori, dacă se ştie că lungimea bazei mici a trapezului este egală cu raza cercului.



6. (BAC 2022) Fie ABC un triunghi dreptunghic, în care $m(\angle ABC) = 90°$, iar $BC = 36$ cm. Pe laturile AB, AC şi BC se consideră, respectiv, punctele P, Q şi R, astfel încât $PQCR$ este un romb cu latura de 20 cm. Determinați aria triunghiului APQ.



7. (BAC 2021) Fie paralelogramul $ABCD$, în care $m(\angle A) = 60°$, $AB = 4$ cm, $BD = 2\sqrt{7}$ cm. Determinați aria paralelogramului $ABCD$.

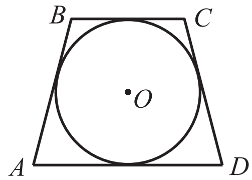


8. Piciorul înălțimii paralelogramului $ABCD$, construită din vârful B, împarte latura AD în jumătate. Să se afle aria paralelogramului, dacă perimetrul lui este de 24 cm, iar perimetrul triunghiului ABD este de 18 cm.

9. Diagonalele patrulaterului convex $ABCD$ sunt perpendiculare şi au lungimile a şi b. Să se afle aria patrulaterului $EFGH$, unde E, F, G şi H sunt mijlocurile laturilor AB, BC, CD şi, respectiv, DA.

C₁

10. (BAC 2024, pretestare) Fie $ABCD$ un trapez isoscel circumscriptibil cu bazele $BC = 6$ cm şi $AD = 10$ cm. Determinaţi lungimea laturii AB.



11. Punctul M este mijlocul laturii BC a paralelogramului $ABCD$. Dreapta AM intersectează diagonala BD în punctul E. Să se determine ariile triunghiurilor ABE şi AED, dacă aria triunghiului BEM este egală cu 1 u.p.
12. O diagonală a unui trapez dreptunghic are lungimea d şi îl împarte în două triunghiuri dreptunghice isoscele. Să se afle aria trapezului.
13. Centrul cercului înscris într-un trapez dreptunghic este situat la distanţele de 1 dm şi 2 dm de extremităţile unei laturi neparalele. Să se determine aria trapezului.

Lucraţi în grup!

14. ❍ **Lucrare practică.** *Calcularea perimetrelor şi a ariilor în curtea şcolii*
15. ❍ **Proiect STEAM.** *Modele de pavaje*

Probleme recapitulative

Profilurile umanistic, arte, sport

A

1. Să se afle raportul dintre raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic isoscel şi înălţimea corespunzătoare ipotenuzei.
2. ***Lucraţi în perechi!*** Două vârfuri ale unui pătrat sunt situate pe un cerc cu raza de 17 cm, iar celelalte două sunt situate pe o tangentă la acest cerc. Să se afle lungimea diagonalei pătratului.
3. Înălţimea dusă din vârful unghiului obtuz al unui romb împarte latura lui în jumătate. Să se afle măsurile unghiurilor rombului.

B

4. Coarda comună a două cercuri de raze egale are lungimea de 12 cm şi este o diagonală a rombului înscris în intersecţia acestor cercuri. Cealaltă diagonală a rombului are lungimea de 6 cm. Să se afle razele cercurilor.
5. Într-un romb cu un unghi a cărui măsură este de 30° e înscris un cerc, iar în cerc e înscris un pătrat. Să se afle raportul dintre aria rombului şi aria pătratului.
6. Lungimile laturilor respective ale unui paralelogram şi ale unui dreptunghi sunt egale. Aria paralelogramului este de două ori mai mică decât aria dreptunghiului. Să se afle măsura unghiului obtuz al paralelogramului.
7. Bazele unui trapez isoscel sunt de 5 cm şi 12 cm, iar latura neparalelă este de 12,5 cm. Să se afle înălţimea trapezului.
8. Laturile neparalele AB şi CD ale trapezului $ABCD$ se prelungesc până la intersecţia în punctul E. Se ştie că $AB = 2$ cm, $BE = 4$ cm, $EC = 6$ cm. Să se afle CD.
9. Suma măsurilor unghiurilor alăturate bazei mari a unui trapez este egală cu 90°. Baza mare este de 20 cm, iar cea mică – de 4 cm. Să se afle distanţa dintre mijlocurile bazelor.
10. (BAC 2017) Într-un trapez isoscel baza mare este de 22 cm, iar baza mică este congruentă cu laturile neparalele şi are lungimea de 10 cm. Determinaţi lungimea diagonalei trapezului.
11. (BAC 2016) Fie triunghiul dreptunghic ABC, în care catetele AB şi AC sunt de 3 cm şi, respectiv, de 6 cm. Pe laturile AB, BC şi AC se iau punctele M, N şi, respectiv, P, astfel încât $AMNP$ să fie pătrat. Determinaţi lungimea diagonalei pătratului $AMNP$.

12. (BAC 2023) Unghiul obtuz al unui romb este de 120°. Determinați lungimea diagonalei mari a rombului, dacă perimetrul rombului este egal cu 40 cm.

13. (BAC 2024) Aria triunghiului isoscel ABC cu baza AC este egală cu 60 cm². Punctele M şi N sunt mijlocurile laturilor AB şi BC respectiv. Determinați perimetrul triunghiului ABC, dacă $MN = 5$ cm.

C

14. Proiecția diagonalei unui trapez isoscel pe baza mare este de 7 cm, iar înălțimea lui este de 4 cm. Să se afle aria trapezului.

15. Distanța de la centrul cercului până la o coardă este de 5 cm, iar raza cercului este de 13 cm. Să se afle lungimea coardei.

16. ***Lucrați în grup!*** ○ **Proiect STREAM** *Covorul moldovenesc*

Profilul real

A_1

1. Raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic este egală cu r, iar raza cercului circumscris triunghiului – cu R. Să se afle aria triunghiului.

2. Triunghiul dreptunghic ABC este împărțit de înălțimea CD, dusă din vârful C al unghiului drept, în două triunghiuri: BCD şi ACD. Razele cercurilor înscrise în aceste triunghiuri sunt de 4 cm şi, respectiv, 3 cm. Să se afle raza cercului înscris în triunghiul ABC.

3. Fie triunghiul dreptunghic ABC. Un cerc cu centrul pe cateta AC, tangent la ipotenuza AB, intersectează cateta BC în punctul D, astfel încât $BD : DC = 2 : 3$. Se ştie că $AC : BC = 12 : 5$. Să se afle raportul dintre raza cercului şi lungimea catetei BC.

B_1

4. Medianele AA_1 şi BB_1 ale triunghiului isoscel ABC ($CA = CB$) se intersectează în punctul M. Raportul dintre raza cercului înscris în triunghiul AMB şi raza cercului înscris în patrulaterul MB_1CA_1 este egal cu $\frac{3}{4}$. Să se afle raportul $CB : AB$.

5. (BAC 2016) Fie trapezul isoscel $ABCD$, în care $AD \parallel BC$, $AD = 6$ cm, $CD = 2$ cm şi $BC = 5$ cm. Dreptele suport ale laturilor AB şi CD se intersectează în punctul M. Determinați lungimea înălțimii triunghiului AMD, corespunzătoare laturii AD.

6. (BAC 2015) Un romb are latura de 10 cm şi înălțimea de 8 cm. Determinați lungimea diagonalei mici a rombului.

7. (BAC 2014) Într-un triunghi dreptunghic, măsura unui unghi ascuțit este egală cu 30°, iar lungimea catetei mai mari este eglă cu $5\sqrt{3}$ cm. Determinați aria discului mărginit de cercul circumscris triunghiului.

8. (BAC 2018) Fie ABC un triunghi ascuțitunghic isoscel, în care $AB = BC$ şi înălțimea AK este de 6 cm. Determinați perimetrul triunghiului ABC, dacă aria lui este egală cu 30 cm².

9. (BAC 2017) Fie triunghiul ABC, în care $m(\angle B) = 90°$ şi $AB = 6$ cm. Lungimea medianei BM este egală cu 5 cm. Determinați aria triunghiului ABC.

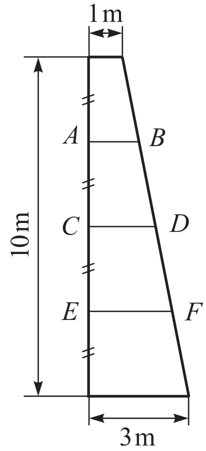
10. Lungimile bazelor unui trapez sunt egale cu a şi b ($a > b$). Să se afle lungimea segmentului ce uneşte mijlocurile diagonalelor trapezului.

11. Lungimile bazelor unui trapez sunt egale cu a şi b. O dreaptă paralelă cu bazele intersectează laturile neparalele, astfel încât trapezul este împărțit în două trapeze de arii egale. Să se afle lungimea segmentului acestei drepte, cuprins între laturile neparalele.

12. Să se afle măsurile unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, dacă raportul dintre raza cercului înscris în triunghi şi raza cercului circumscris este egal cu $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

13. Dintr-o foaie pătrată cu latura a se decupează colţuri, astfel încât să se obţină o piesă octogonală regulată. Să se afle lungimea laturii octogonului.

14. Un pilon metalic are forma şi dimensiunile principale ca în figura alăturată. Să se determine lungimea grinzilor orizontale AB, CD, EF.



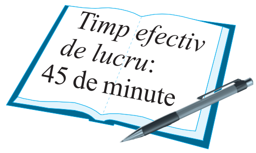
C₁

15*. Se consideră mulţimea triunghiurilor dreptunghice de aceeaşi arie $\mathscr{A}$. Să se determine triunghiurile din această mulţime ale căror cercuri circumscrise au arie minimă.

16*. Din toate triunghiurile cu aceeaşi latură şi acelaşi unghi α opus acestei laturi, să se determine cel care are perimetrul maxim.

17. ***Lucraţi în grup!*** ○ **Proiect STREAM.** *Covorul moldovenesc*

Test sumativ



Profilurile umanistic, arte, sport

1. Două discuri cu aceeaşi rază de 5 cm se intersectează. Aria reuniunii acestor discuri este de 44π cm^2.
a) Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei:
„Aria discului se calculează conform formulei $\mathscr{A} = 2\pi R$, unde R este raza discului”. **A/F**
b) Determinaţi aria intersecţiei discurilor.

2. Lungimile laturilor unui dreptunghi se raportă ca 3 : 2, iar aria lui este egală cu 96 cm^2. Aflaţi lungimea laturii mai mari a dreptunghiului.

3. Aflaţi lungimile laturilor neparalele şi ale diagonalelor trapezului înscris într-un cerc cu raza de 37,5 cm, dacă baza mică este de 51 cm, iar baza mare este diametrul cercului.

4. Unui cerc cu raza de 6 cm i se circumscrie un romb cu măsura unghiului ascuţit de 30°. Determinaţi aria rombului.

Profilul real

1. $ABCD$ este un paralelogram cu $AD = 3$ cm, $AB = 4$ cm, $m(\angle DAB) = 60°$.
Pe laturile AB şi CB în exterior sunt construite triunghiurile echilaterale ABE şi CBF.
a) Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei:
„Una dintre formulele de calcul a ariei paralelogramului este $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$”. **A/F**
b) Determinaţi aria triunghiului DEF.

2. Demonstraţi că suma distanţelor de la orice punct situat pe o latură a unui triunghi echilateral până la celelalte două laturi este o mărime constantă.

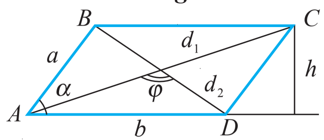
3. Bazele unui trapez sunt de 4 cm şi 16 cm. Aflaţi raza cercului înscris în trapez şi raza cercului circumscris acestuia.

4. Într-un disc cu raza R sunt construite două coarde paralele, astfel încât centrul cercului se află între coarde. Una dintre ele subîntinde un arc de 90°, iar cealaltă – un arc de 60°. Determinaţi aria părţii discului cuprinsă între coarde.

Patrulatere. Poligoane

Patrulatere

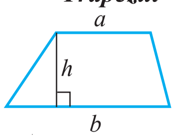
Paralelogramul



$\mathscr{A} = bh = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

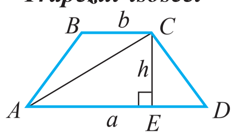
$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

Trapezul

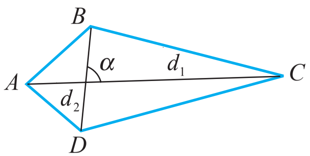


$\mathscr{A} = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Trapezul isoscel

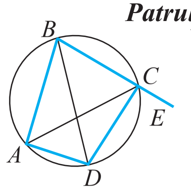


$AE = \frac{a+b}{2}$, $ED = \frac{a-b}{2}$



$\mathscr{A} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$

Patrulatere înscrise



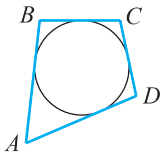
$m(\angle ABC) + m(\angle CDA) = 180° =$

$= m(\angle BAD) + m(\angle BCD)$

$\angle ABD \equiv \angle ACD$

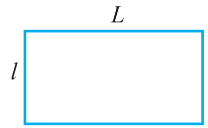
$\angle DCE \equiv \angle DAB$

Patrulatere circumscrise



$BC + AD = CD + AB$

Dreptunghiul de aur

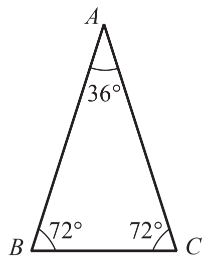


$\frac{L}{l} = \frac{L+l}{L}$

Secțiunea de aur

$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ sau $\frac{L}{l} = \frac{L+l}{L}$

Triunghiul de aur

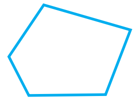


Numărul de aur

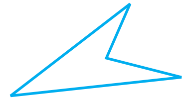
$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi \approx 1{,}618033$

Poligoane

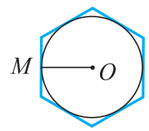
Poligon convex



Poligon neconvex

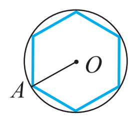


Poligon inscriptibil



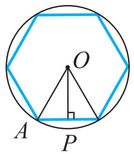
$OM = R$

Poligon circumscriptibil



$OA = R$

Poligonul regulat

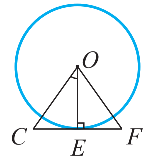


$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$,

R – raza cercului circumscris poligonului regulat

$OA = R$

$[OP]$ – apotema poligonului

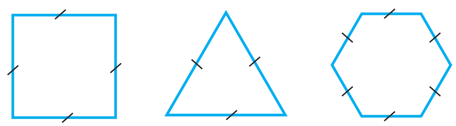


$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$,

r – raza cercului înscris în poligonul regulat

$CF = a_n$ – latura poligonului

Poligoane regulate



Răspunsuri și indicații

Modulul 1. Numere reale. Recapitulare şi completări

Profilurile umanistic, arte, sport. **A.** **1.** a) 0,75; b) 0,2(6); c) 0,6; d) 0,125; e) 0,08; f) 0,008; g) 0,1(6); h) 0,(1). **2.** a) $\frac{13}{99}$; b) $\frac{23}{9}$; c) $\frac{11}{9}$; d) $\frac{23}{99}$; e) $\frac{23}{18}$; f) $\frac{271}{990}$. **3.** a) Irațional; b), c), d) rațional. **4.** 4. **5.** >. **6.** a) F; b), c) A. **7.** 49. **8.** Da. **9.** 108. **10.** 625 kg. **B.** **11.** a) $(-6, +\infty)$; b) $(-\infty, \frac{5}{9})$. **12.** a) 8°C; b) $\frac{109}{11} \approx 10°$ C. **13.** a) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} > \sqrt{6+5\sqrt{7}}$; b) $\sqrt{19+8\sqrt{3}} > \sqrt{14+6\sqrt{5}}$. **14.** $4\sqrt{3}$. **15.** a) Da; b) posibil; c) nu. **16.** $\sqrt{2,4} \approx 1,55$ (A). **17.** $\frac{21}{25}$. **18.** 16. **19.** a) 480 lei; b) 320 lei. **20.** 5618 u.m. **21.** $9-1,8\sqrt{10}$. **23.** b) 74 u.m. **24.** 40 de locuri. **25.** 12. **26.** 288 lei. **C.** **27*.** 0,6271105. **28.** $a=15$, $b=33$, $c=27$.

Test sumativ. Profilurile umanistic, arte, sport. **1.** **C.** **2.** **C.** **3.** $5\sqrt{3} < 4\sqrt{5}$. **4.** F. **6.** 18 m.

Modulul 2. Elemente de logică matematică şi de teoria mulțimilor

§ 1. ***Profilurile umanistic, arte, sport.*** **A.** **1.** a) $A=\{4t \mid t \in \mathbb{N}, 0 \le t \le 12\}$; b) $\text{card}A = 13$. **2.** a) $X=\{a, e, i, m, n, r, t\}$; c) $\text{card}X = 7$. **3.** De exemplu, $A=\{0, 2, 3, 4, 5\}$. Sunt 6 astfel de mulțimi. **4.** a) $A \ne B$, $A \cup B = (-\infty, 1]$, $A \cap B = \{-3\}$; b) $A \ne B$, $A \cup B = (1, \infty)$, $A \cap B = \varnothing$. **5.** b) $\{1, 2, 3\}$; d) $\{4, 5\}$. **6.** Sunt 15 submulțimi. **7.** a) Da; b) nu. **8.** a) $\mathbb{N}$; b) A; c) $\varnothing$; d) $\{6, 7, 8, ...\}$. **9.** De exemplu, $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq A$; $\text{card}\mathcal{B}(A) = 32$. **B.** **10.** a) De exemplu, –3, –2, –1; b) de exemplu, 0, ±1. **11.** a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. **C.** **12.** a) $A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$. Da. b) $\{(a, x), (a, y), ..., (c, z)\}$. **13.** $x=4$, $A=B=\{3, 11, 13\}$.

§ 1. ***Profilul real.*** **A_1.** **1.** Da. **2.** a) $(-1, 3)$; b) $(-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$; c) $\mathbb{R}$; d) $(-6, -1] \cup [3, 6)$. **3.** $\text{card}A = 4$, $\text{card}\mathcal{B}(A) = 16$. **$B_1$.** **4.** a) Mulțimea numerelor iraționale; b) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **5.** a) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; b) $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. **$C_1$.** **7*.** a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; b) $\mathbb{R}_-$. **8*.** a) F; b) F.

§ 2. ***Profilul real.*** **A_1.** **1.** a) F; b) nu este propoziție; c) A. **2.** d) F. **3.** a) $20 \vdots 10$, deci $20 \vdots 5$. **4.** a) „*ABC* este un triunghi" – partea explicativă, „*ABC* este un triunghi dreptunghic" – ipoteza, „pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor" – concluzia; b) „unghiul α este unghi interior al triunghiului *ABC*" – partea explicativă, „triunghiul *ABC* este echilateral" – ipoteza, „mărimea unghiului α este de 60°" – concluzia. **B_1.** **5.** a) A; b) F. **7.** „Dacă diagonalele patrulaterului *ABCD* sunt perpendiculare, atunci patrulaterul este romb" – F. **9.** „Dacă suma $a+b$ este un număr rațional, atunci numerele *a*, *b* sunt raționale" – F. **C_1.** **11*.** a), b) F.

Exerciții și probleme recapitulative

Profilurile umanistic, arte, sport. **A.** **1.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$, $A \setminus B = \{2, 4\}$, $B \setminus A = \{5, 9\}$, $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 9), (2, 1), (2, 3), ..., (4, 5), (4, 9)\}$. **2.** a), b), c), g) A; d), e), f), h) F. **B.** **3.** $A \cup B = (-3, +\infty)$; $A \cap B = \{-1, 5\}$. **4.** a) $S_1 \cup S_2 = \{\pm 1, 6\}$; b) $S_1 \cap S_2 = \{-1, 6\}$; c) $S_1 \setminus S_2 = \varnothing$; d) $S_2 \setminus S_1 = \{1\}$. **C.** **5.** 32 de submulțimi: $\varnothing$, $\{-2\}$, $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{-2, -1\}$, ..., $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Profilul real. **A_1.** **1.** 4 elevi. **3.** a) „numărul *a* se divide cu 14" – condiția suficientă, „numărul *a* se divide cu 7" – condiția necesară; „Dacă numărul întreg *a* se divide cu 7, atunci el se divide cu 14" – F; b) „triunghiul examinat este dreptunghic" – condiția suficientă, „triunghiul examinat are două unghiuri ascuțite" – condiția necesară; „Dacă un triunghi are două unghiuri ascuțite, atunci el este dreptunghic" – F. **B_1.** **4.** a) $(-7; 6]$; b) $[-6; 1)$; c) $(-7; -6)$; d) $[1, 6]$. **5.** a) A; b) F. **6.** A. **C_1.** **7.** a), b) A.

Test sumativ. Profilurile umanistic, arte, sport. **1.** F. **2.** a) M_3; b) M_1; c) M_5. **3.** a) $S_1 \cup S_2 = \{1, \pm 3\}$; b) $S_1 \cap S_2 = \{1\}$; c) $S_2 \setminus S_1 = \{3\}$; d) $S_1 \setminus S_2 = \{-3\}$. **4.** 2^{16}.

Profilul real. **A_1.** **1.** a) $\text{card}\mathcal{B}(A) = 2^3$; $\text{card}\mathcal{B}(B) = 2^2$; b) $\text{card}C = 6$. **2.** F. **4.** a) „patrulaterul este romb" – condiția suficientă, „în romb se poate înscrie un cerc" – condiția necesară; b) „Dacă într-un patrulater se poate înscrie un cerc, atunci patrulaterul este romb" – F.

Modulul 3. Radicali. Puteri. Logaritmi

§ 1. ***Profilurile umanistic, arte, sport.*** **A.** **1.** a) 0,05; b) 288; c) $\frac{90}{161}$; d) $2-\sqrt{3}$; e) $\sqrt{3}-2$; f) $3-\sqrt{3}$. **B.** **2.** a) $2\sqrt[3]{2}$; b) $5\sqrt[3]{2}$; c) $4a^2b\sqrt{2b}$; d) $-5ab\sqrt{b}$; e) $|x+3|$; f) xy^2; g) $-13yx\sqrt{x}$; h) $-2a^2b^3\sqrt{2a}$. **3.** a) $\sqrt{12}$; b) $-\sqrt{27}$; c) $\sqrt{3b^2}$; d) $-\sqrt{-2x}$; e) $\sqrt{7c^2a}$, dacă $c \le 0$; $-\sqrt{7c^2a}$, dacă $c > 0$; f) $\sqrt[3]{2x^3y}$; g) $\sqrt{2a^3}$; h) $\sqrt{3a^2}$; i) $\sqrt{3y^2}$, dacă $y > 0$, și $-\sqrt{3y^2}$, dacă $y < 0$; j) $\sqrt{2x}$; k) $\sqrt[3]{2x^4y}$; l) $-\sqrt{-x^3}$. **4.** a) 34; b) $8\sqrt{3}$; c) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; d) $8(9+4\sqrt{5})$; f) $\sqrt{3}-1$. **C.** **5.** a) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}{13}$; b) $\frac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$; c) $-\sqrt{13}-\sqrt{18}$; d) $-\frac{1}{4}(4+3\sqrt{2}-2\sqrt{7}-\sqrt{14})$. **6.** a) $3\sqrt[3]{5} < 5\sqrt[3]{3}$; b) $3\sqrt[3]{4} < 4\sqrt[3]{2}$.

§ 1. *Profilul real.* A₁. **1.** 2. **2.** 1; 2. **3.** a) $\sqrt{3}-4$; b) $\frac{13}{12}$; c) -1. **B₁.** **4.** 5. **5.** a) 3; b) 5. **7.** 5 fețe. **C₁.** **8.** a) 7.

§ 2. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** a) $\frac{7}{3}$; b) $\frac{10^5}{3}$; c) $\frac{125}{2}$; d) 0; e) $\left(\frac{5}{2}\right)^4$; f) 9. **2.** $2a$. **3.** –4. **B.** **4.** a) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$; b) $\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$; c) $a^{\frac{1}{4}}-2$; d) $\frac{b+a}{b-a}$. **5.** a) Mai mic decât 1; b), c) mai mare decât 1. **6.** 12%. **C.** **7.** $\frac{10^{20}}{16\sqrt{2}}$ cubulețe. **8.** $15^{\frac{2}{7}}$ cm.

§ 2. *Profilul real.* A₁. **1.** a) 5; b) $\frac{3}{2}$; c) 7200; d) $\frac{1}{4}\cdot 5^{15}$. **2.** $n+1$. **3.** 2. **4.** 0. **B₁.** **5.** a) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a+b}$; b) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; c) $\frac{x+3y}{x-y}$; d) -1; e) 7^{-5}; f) $3^{\sqrt{3}}\cdot 5^{30\sqrt{3}}$. **6.** a), b) Mai mare decât 1; c), d), e) mai mic decât 1. **C₁.** **8.** $\mathbb{R}_+$. **9.** $\frac{m^3}{m-\sqrt[3]{2}}$, dacă $\begin{cases} m>1 \\ m\neq\sqrt[3]{2}; \end{cases}$ $-(m^2+m\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$, dacă $m\leq 1,\ m\neq 0$.

§ 3. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** a) 9; b) 2; c) 1; d) 2; e) 144; f) 0. **2.** –2. **3.** 15. **4.** 2. **B.** **5.** $\frac{1}{2}$. **6.** 16. **8.** 2. **9.** $3a+ab$. **C.** **10.** $1<\log_2 3<\log_2 5$.

§ 3. *Profilul real.* A₁. **1.** „=”. **2.** „<”. **3.** „<”. **4.** a) $\log_2|a|$; b) $4\log_a|b|$; c) $\log_a b$; d) 3; e) $3-2\log_a b$, dacă $3-\log_a b\geq 0$; -3, dacă $3-\log_a b<0$; f) $|a+1|$. **B₁.** **5.** $x=5^{\frac{1}{4}}$. **6.** 8. **7.** 1. **8.** a) $3(1-a-b)$; b) $\frac{1+ab}{a(8-5b)}$. *Indicație*. Descompuneți numerele în factori primi. **C₁.** **11.** 0.

Exerciții şi probleme recapitulative

***Profilurile umanistic, arte, sport.* A.** **1.** a) 4; b) 2; c) 1,5; d) 7200; e) –1. **2.** a) A; b), c), d) – F. **3.** a) –2; b) $2^{\frac{5}{4}}$. **4.** 5. **B.** **5.** a) $-2x$; b) 1. **6.** a) $\sqrt{24}>\sqrt[3]{27}$; b) $(\sqrt{5})^{16}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$. **7.** a) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25})$; c*) $-\frac{1}{6}(1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10})$. **C.** **8.** 2 m.

***Profilul real.* A₁.** **1.** <. **2.** >. **B₁.** **4.** a) F; b) A. **5.** a) $\frac{7}{4}$; b) 6; c) $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}$; d) $\log_6(a^3-2)^2$. **6.** a), e) Primul mai mic; b), d) primul mai mare; c) =. **C₁.** **7.** $a\in\mathbb{R}_-^*$. **8.** a) $\frac{3(1-a)}{a}$; b) $3(1-a-b)$. **9.** $n=3$.

Test sumativ.* *Profilurile umanistic, arte, sport. **1.** B. **2.** $3\sqrt{7}<7\sqrt{3}$. **3.** a) F; b) A. **4.** $7\sqrt{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$. **5.** B.

Profilul real. **1.** A. **2.** $(\sqrt[3]{4})^{\frac{1}{3}}>(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{4}}$. **3.** $-(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})$. **4.** B. **5.** -10^{-1}. **6.** $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$, a^2+a+1.

Modulul 4. Figuri geometrice în plan. Triunghiuri. Cercul. Recapitulare şi completări

§ 1. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **4.** a), b), c) A; d) F.

§ 1. *Profilul real.* A₁. **1.** a) $1)\Rightarrow 2)$ (F), $1)\Rightarrow 3)$ (A), $1)\Rightarrow 4)$ (A); b) $2)\Rightarrow 1)$ (F), $3)\Rightarrow 1)$ (A), $4)\Rightarrow 1)$ (F).
B₁. **2.** a) $a\cap b=\{A\}$, $a\cap P=a$, $b\cup P=P$; b) P, $\{A\}$.

§ 2. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** 40 cm. **2.** 12 cm. **3.** 50° sau 130°. **B.** **4.** 18 cm. **5.** 50. **6.** 7. **7.** 65. **8.** 130°. **9.** 40°. **C.** **10.** 16 cm.

§ 2. *Profilul real.* A₁. **1.** *Indicație*. Mijlocul ipotenuzei este centrul cercului circumscris unui triunghi. **2.** *Indicație*. Se consideră două triunghiuri isoscele asemenea cu vârfurile în centrele cercurilor. **3.** *Indicație*. $\angle BCA\equiv\angle ADE$. **4.** 60°. **5.** 60°. **B₁.** **6.** *Indicație*. $m(\angle CBD)=\pi-m(\angle BDA)-m(\angle BCA)$. Unghiurile *BDA* şi *BCA* sunt înscrise în cerc şi subîntind arce care nu depind de dreapta *CD*. **7.** *Indicație*. Fie *T* punctul de tangență. Atunci, $CC_1=C_1T$ şi $BB_1=B_1T$, de unde $AC_1+C_1B_1+B_1A=AC_1+C_1T_1+TB_1+B_1A=AC_1+C_1C+BB_1+B_1A=AC+AB=2AB$. **8.** *Indicație*. Tangenta comună în *A* trece prin mijlocul segmentului *BC*. **9.** *Indicație*. Arătați că $m(\angle ABC)=m(\angle AA_2C)$, unde A_2 este diametral opus punctului *A*. **10.** *Indicație*. $CE^2=CA\cdot CB=CD^2$. **C₁.** **11.** a) *Indicație*. $m(\angle AA_1B)=m(\angle AB_1B)$; b) *Indicație*. Din a) rezultă că $m(\angle A_1B_1C)=m(\angle CBA)$. $\angle CBA$ este congruent cu unghiul format de *AC* şi tangenta la cerc în vârful *C*. Deci, tangenta este paralelă cu A_1B_1. Atunci, $OC\perp A_1B_1$. **12.** $2\sqrt{R\cdot r}$. **13.** *Indicație*. Construiți dreapta *CB*, astfel încât $m(\angle ABC)=\varphi$, apoi dreapta $BD\perp CB$. Intersecția mediatoarei segmentului *AB* cu *BD* este punctul *O*. Mulțimea cerută este unul dintre arcele cercului $\mathscr{C}(O, OB)$, precum şi arcul simetric acestuia. **14.** 6 cm şi 12 cm. **15.** 13 cm.

§ 3. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** 12 cm. **2.** 8 cm. **3.** 30 cm. **4.** 100 cm. **B.** **5.** 16 cm, 16 cm, 12 cm. **6.** 18 cm, 18 cm, 20 cm. **7.** 3 cm. **C.** **9.** $EF=FD=3$ cm.

§ 3. *Profilul real.* A₁. **1.** a) *Indicaţie*. Aplicaţi criteriul IU. b) *Indicaţie*. Aplicaţi criteriul ULU. c) *Indicaţie*. Aplicaţi criteriul LUL. **2.** 8 cm. **3.** *Indicaţie*. Aplicaţi criteriul IC. **4.** 6 cm. **5.** *Indicaţie*. Aplicaţi criteriul IU. **6.** *Indicaţie*. Aplicaţi criteriul LUL. **B₁.** **7.** a) *Indicaţie*. Pe $[AM$ şi $[A_1M_1$ luaţi punctele D şi D_1, astfel încât $AM = MD$ şi $A_1M_1 = M_1D_1$. Din $\Delta AMC \equiv \Delta MBD$ şi $\Delta A_1M_1C_1 \equiv \Delta M_1B_1D_1$ rezultă că $\angle ABD \equiv \angle A_1B_1D_1 \overset{(LUL)}{\Rightarrow} \Delta ABD \equiv \Delta A_1B_1D_1$; b) $\Delta ALC \overset{(ULU)}{\equiv} \Delta A_1L_1C_1$. **8.** $\Delta ABM \overset{(LLL)}{\equiv} \Delta A_1B_1M_1 \Rightarrow \angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1 \equiv \Delta ABC \overset{(LUL)}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **9.** *Indicaţie*. Pe $[AM$ şi $[A_1M_1$ luaţi punctele D şi, respectiv, D_1, astfel încât $AM = MD$ şi $A_1M_1 = M_1D_1$. $\Delta ABD \overset{(LLL)}{\equiv} \Delta A_1B_1D_1 \Rightarrow \angle BAM \equiv \angle B_1A_1M_1$, iar $\Delta ADC \overset{(LLL)}{\equiv} \Delta A_1D_1C_1 \Rightarrow \angle MAC \equiv \angle M_1A_1C_1$. Astfel, $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC \overset{(LUL)}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **10.** *Indicaţie*. $\Delta AMC \overset{(LUL)}{\equiv} \Delta A_1M_1C_1 \Rightarrow AC = A_1C_1$; $\Delta AMB \equiv \Delta A_1M_1B_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow AB = A_1B_1$. Deci, $\Delta ABC \overset{(LLL)}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **C₁.** **11.** *Indicaţie*. Pe mediana AM luaţi un punct D, astfel încât $AM = MD$. $\Delta BMD \equiv \Delta AMC \Rightarrow BD = AC$, iar în ΔABD avem $AB + BD > AD$ sau $AB + AC > 2AM$. **12.** *Indicaţie*. Din problema 11 rezultă că $2m_a < b + c$, $2m_b < a + c$, $2m_c < a + b$. Adunând aceste inegalităţi, obţinem $m_a + m_b + m_c < \mathscr{P}$. Adunând inegalităţile $m_a > c - \frac{a}{2}$, $m_b > a - \frac{b}{2}$, $m_c > b - \frac{c}{2}$, obţinem $m_a + m_b + m_c > \frac{1}{2}\mathscr{P}$. **14.** *Indicaţie*. $\Delta ABL \overset{(LUL)}{\equiv} \Delta A_1B_1L_1 \Rightarrow$ $\angle ALC \equiv \angle A_1L_1C_1 \Rightarrow \Delta ALC \overset{(ULU)}{\equiv} \Delta A_1L_1C_1 \Rightarrow AC = A_1C_1 \Rightarrow \Delta ABC \overset{(LUL)}{\equiv} \Delta A_1B_1C_1$. **15.** $\frac{2\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}}{2}$. **16.** 15 cm, 20 cm, 25 cm.

§ 4. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** 2 cm. **2.** 36 cm, 9 cm. **B.** **3.** 30 cm, 40 cm, 50 cm. **4.** 6 cm. **C.** **5.** 30 cm, 36 cm. **6.** 7,2 m.

§ 4. *Profilul real.* A₁. **1.** *Indicaţie*. $2\text{m}(\angle B) = \pi - \text{m}(\angle A) = \pi - \text{m}(\angle A_1) = 2\text{m}(\angle B_1)$. Aplicaţi criteriul ULU. **3.** *Indicaţie*. $\Delta ABM \overset{(LUL)}{\sim} \Delta A_1B_1M_1 \Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1M_1 : AM$. **4.** *Indicaţie*. $\Delta ABL \overset{(ULU)}{\sim} \Delta A_1B_1L_1 \Rightarrow A_1B_1 : AB = A_1L_1 : AL$. **5.** $AE \cdot BE = CE \cdot DE \Leftrightarrow AE : CE = DE : BE \Leftrightarrow \Delta ADE \sim \Delta CBE \Leftrightarrow \angle DAE \equiv \angle BCE \Leftrightarrow BC \parallel AD$. **B₁.** **6.** *Indicaţie*. $\Delta BHA_1 \sim \Delta AHB_1 \Rightarrow AH : BH = B_1H : A_1H \Rightarrow AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H$ etc. **7.** *Indicaţie*. Fie trapezul $ABCD$ $(BC \parallel AD)$, $\{O\} = AC \cap BD$, M – mijlocul laturii BC şi $\{N\} = AD \cap MO$, atunci $AN : ND = BM : MC = 1 \Rightarrow AN = ND$. Deci, M, O, N sunt puncte coliniare. Dacă $\{O_1\} = AB \cap CD$, atunci $BM : MC = AN : ND$, deci punctele O_1, M_1, N sunt coliniare. **8.** *Indicaţie*. În ΔBLM, $\angle BLM$ este obtuz, iar $\angle BML$ – ascuţit. Atunci, $BL < BM$. **9.** $\Delta BMC \sim \Delta AMD$. **C₁.** **10.** 12 cm, 24 cm, 30 cm. **11.** $AC = 48$ cm, $A_1C_1 = 36$ cm, $B_1C_1 = 30$ cm. **12.** 8 cm. **13.** 9 cm.

§ 5. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** 4. **2.** 13 cm. **3.** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm. **B.** **4.** 10 cm. **5.** $8\sqrt{3}$ cm, $5\sqrt{3}$ cm. **6.** 42 cm, 56 cm. **7.** $\sqrt{73}$ cm, $2\sqrt{13}$ cm, 5 cm. **C.** **8.** 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm, 10 cm. **9.** $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ cm, $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm. **10.** 24 cm.

§ 5. *Profilul real.* A₁. **1.** 6. **2.** 30°, 60°, 90°. **3.** 1 cm. **B₁.** **4.** $2\sqrt{5}$ cm. **5.** $BN = 2$ cm. **6.** 3 cm, 4 cm, 5 cm, 1 cm. **7.** 11 : 7. **8.** $9\sqrt{5}$ cm, $8\sqrt{10}$ cm. **C₁.** **9.** 0,4R. **10.** 8 cm.

§ 6, 6.1. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** 3 cm, 7,5 cm. **2.** 18 cm. **B.** **3.** 60°, 30°. **4.** $2\sqrt{13}$ cm şi $3\sqrt{13}$ cm. **5.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm. **C.** **6.** $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ cm. **7.** 8 cm, 15 cm. **8.** 15 cm, 9 cm.

§ 6, 6.1. *Profilul real.* A₁. **2.** 18 cm, 24 cm, 30 cm. **3.** $\frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. **4.** $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. **B₁.** **5.** 5,6 cm, 4,2 cm; $r = 2{,}4$ cm. **6.** 9 cm, 12 cm, 15 cm. **C₁.** **8.** $\sqrt{2}$ m, $\sqrt{3}$ m. **9.** $\frac{n^2+m^2}{n}$, $\frac{n^2+m^2}{m}$.

§ 6, 6.2. *Profilul real.* A₁. **1.** 4 cm. **3.** 4 m sau $\sqrt{10}$ m. **B₁.** **5.** $\frac{9}{4}$ m, $\frac{15}{4}$ m. **6.** 5 cm. **7.** $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2) - c^2}$. **C₁.** **8.** 10 cm, 5 cm, $5\sqrt{3}$ cm. **9.** $\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

***Profilurile umanistic, arte, sport.* A.** **2.** 9 cm, 12 cm, 15 cm. **3.** $\sqrt{10}$ cm. **4.** 50°. **5.** 6. **B.** **6.** 400×300 m. **7.** $\frac{25}{3}$ cm. **9.** $(2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm. **10.** 90°. **C.** **11.** 7 cm. **12.** $\sqrt{114}$ cm

***Profilul real.* A₁.** **1.** 25 cm, 25 cm, 30 cm. **2.** 8 cm şi 10 cm. **B₁.** **3.** 5 cm, 5 cm, 6 cm. **4.** 144,3 mm. **5.** 15°, 15°, 150° sau 75°, 75°, 30°. **6.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{14Rr - R^2 - r^2}{3}}$. **7.** $18\sqrt{3}$ cm². **C₁.** **8.** 5 : 10 : 13. **9.** a) ≈ 9,42 mm; b) ≈ 226,08 mm. **10.** a) ≈ 18,84 dm; b) ≈ 226,08 dm; c) ≈ 452,16 dm. **11.** ≈ 5 min. şi 1,44 s. **12.** ≈ 7,536 m.

Test sumativ.* *Profilurile umanistic, arte, sport. **1.** 0,5 cm. **2.** 4,8 m. **4.** $AB = 12$ cm, $BC = 15$ cm.

Profilul real. **1.** $\frac{d\sqrt{13}}{12}$. **2.** 40 de discuri, 44 de discuri.

Modulul 5. Monoame. Polinoame. Fracţii algebrice

§ 1. ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) 2,05, X, $\sqrt{15}YZ$, Z^{2010}; b) $-Y^8$, $3\sqrt{2}XY$, Z, Y^{2012}. **2.** a) –8; b) 2; c) $-\sqrt{3}$; d) 7,8 – coeficientul; a) XY; b) X^2YZ; c) XZ^2; d) $Y^4 2^{10}$ – partea literală. **3.** a) X^2Y^2Z; b) Y^3Z^3; c) $2\sqrt{3}X^3Y^3Z$; d) XY^2Z^3. **4.** 1) a) 3; b) 1; c) 2; d) 0; 2) a) 5; b) 6; c) 3; d) 2. **5.** a) $5XY$ şi $-XY$; $3X^2$ şi $-0{,}25X^2$; Z^3Y şi YZ^3; XYZ. **6.** a) $3{,}5XY+5Y^4$; b) $2{,}8Z^2+8XY$. **7.** b) $41X^4YZ^2$; c) $3XYZ^4$. **8.** c) $4X^4Y^{12}$; d) $3{,}375Y^9Z^3$. **9.** c) $2XZ^3$; d) $22X^2Y^2Z^2$. **10.** b) $3\frac{3}{4}ZY-Z^2+XY$. **11.** b) $-2XY^2Z^4+0{,}01X^3Y^5Z^2+X^3Y^3Z^3$. **B₁.** **12.** a) $58X^2Y-3X^3$. **13.** a) 7 şi 1; b) 2; d) 2 şi 1. **14.** a) F; b) A. **C₁.** **16.** a) $X^2Y^2Z^2$; b) X^6Y^2.

§ 2. ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) grad $P=3$, grad $Q=4$; b) $P(2)=-3+2\sqrt{2}$; c) $Q(-2;1)=30+\sqrt{5}$. **2.** 1) $S(X)=-X^4-7X^3+6X^2-3X$; $D(X)=-X^4-9X^3-4X^2-3X$; $R(X)=X^4+9X^3+4X^2+3X$. **3.** d) $24X^4-2X^2-2$; f) $25X^8+40X^6+6X^4-8X^2+1$. **4.** d) $3X^2-16\sqrt{3}XY+64Y^2=(\sqrt{3}X-8Y)^2$. **5.** b) $X(X^2-1)(X+Y)$. **6.** b) $(0{,}5X+1)^2$; d) $(X+1)^3$. **7.** b) $(\sqrt{5}X-3\sqrt{5}Y)(\sqrt{5}X+3\sqrt{5}Y)$; c) $(5X-4Y)(25X^2+20XY+16Y^2)$. **8.** c) $(2-X)(1+X)$. **9.** a), b) – A.

B₁. **10.** b) grad $P(X)=3$; grad $Q(X)=3$ pentru $m\in\mathbb{R}^*$ şi orice $k, p, n\in\mathbb{R}$; grad $Q(X)=2$ pentru $m=0, k\in\mathbb{R}^*$ şi orice $p, n\in\mathbb{R}$; grad $Q(X)=1$ pentru $m=0, k=0, p\in\mathbb{R}^*$ şi orice $n\in\mathbb{R}$; grad $Q(X)=0$ pentru $m=0, k=0, p=0$ şi $n\in\mathbb{R}^*$. **11.** $k=\frac{1}{7}$. **12.** b) $Q(X)=-5X^4+X^3-2X^2+8$. **13.** a) $(X-2)(3X^2+2X+4)$; b) $(X-\sqrt[3]{2})^2(X^2+\sqrt[3]{2}X+\sqrt[3]{4})^2$. *Indicaţie*. Efectuaţi substituţia $X^3=Y$. **14.** a) $\left(X+\frac{1}{2}\right)(8X-1)$; b) nu se descompune. *Indicaţie*. Rezolvaţi ecuaţiile de gradul II asociate polinoamelor date. **C₁.** **15.** $a=c=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{2}$, $d=1$. **16.** c) $(6X+1)(21X^2-3X+1)$. **17.** $P(X)=X^2$. **18.** b) $(X^n-2)(X^n+2)(X^{2n}+4)$; c) $X(X^n-1)(X^n+1)$.

§ 3. ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) $a=1$, $b=-2$, $c=3$; b) $a=3$, $b=2$, $c=0$. **2.** a) Dacă $a=1$, atunci grad $P(X)=2$; dacă $a=-1$, atunci grad $P(X)=1$; dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, atunci grad $P(X)=3$. **3.** $P(1)=0$, $P(-2)=-36$, $P(3)=104$, $Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})=5$. **4.** $r=11$. **5.** $P(2)=247$. **6.** $P(X)+Q(X)=2X^3-3X+1$, $P(X)-Q(X)=2X^3+6X^2-7X-1$, $P(X)\cdot Q(X)=-6X^5-5X^4+23X^3-7X^2-5X$. **7.** a) $C(X)=X^5+2X^4+X^3+4X^2+8X+13$, $R(X)=30$; b) $C(X)=2X^4-X^3+7X^2-28X+86$, $R(X)=-257$. **B₁.** **8.** a) $C(X)=2X^3+X^2-3X+6$, $R(X)=-5$; b) $C(X)=3X^2-2X-6$, $R(X)=-5X^2+23X+22$; d) $C(X)=2X^4+9X^3+19X^2+41X+82$, $R(X)=166X-163$. **9.** $B(2, 9)$. **10.** $3X-4$. **11.** 5 şi, respectiv, 2. **12.** a) $a=1$; b) $a\in\{-3, 1\}$. **13.** a) $P(X)=X^2+X+2$; b) $P(X)=2X^2+X+3$. **C₁.** **14.** a) $a+2c-c^3=0$ şi $b+1-c^2=0$; b) $a-1+c^2=0$ şi $b+c=0$; c) $a+1-3c^2+c^4=0$ şi $b+c^3-2c=0$. **15.** a) $5-3X$; b) $-2X$; c) 2. **17*.** $-6X+11$.

§ 4. ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) Da; b) da. **2.** a) –1, 1, 2; b) –4; c) 24, $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. **3.** a) $(X-1)(X^2+X+1)$; b) $(X-2)(X+2)(X^2+4)$; c) $(X-2)(X+2)(X^2+1)$; d) $(X-\sqrt{3}-\sqrt{2})(X-\sqrt{3}+\sqrt{2})(X+\sqrt{3}-\sqrt{2})(X+\sqrt{3}+\sqrt{2})$. **4.** a) 3; b) 2. **B₁.** **5.** a) $(X-1)^3(X+2)^4(X+1)(X+3)^4(X+4)(X-5)$; b) $(X^2+1)^2(X-1)^5(X+1)^4(X+3)^3$; c) $(X-1)^3(X+1)^2(X^2+1)^2(X^2+X+1)(X-3)^3(X+3)^3$. **6.** a) 2; b) 3. **7.** a) $(X^2+1)(X^2-2X+3)$; b) $(X^2+1)(X^2+2X+7)$; c) $(X+1)(X-1)(X^2-2X+5)$; d) $(X+1)(X-1)(X^2+X+1)$. **C₁.** **8.** $c=1$, $b=-1$, $a=-1$ sau $c=0$, $b=0$, $a\in\mathbb{R}$. **10.** *Indicaţie*: a) Se reprezintă $P(X)=Q(X)(X-1)$, unde $Q(1)=0$. **12*.** $a=-8$, $b=16$. **13.** $x=3$ sau $x=3-\sqrt{7}$.

§ 5. ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{-2; 0\}$. **2.** b) $\frac{X^2-2X+3}{X^2-9}$; c) $\frac{X^2+5X-3}{3X(X+2)}$. **3.** b) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{-2; 0\}$. **4.** a) $\frac{7}{3}$; c) $\frac{11}{24}$. **B₁.** **5.** b) $D=\mathbb{R}\setminus\{0; \pm 4\}$, 2; c) $\frac{2X^2+6X+6}{X^2-9}$; e) $\frac{X^3-X^2-6X-16}{X^2-64}$; f) $\frac{X^3-3X-1}{X^2-1}$. **6.** a) $D=\mathbb{R}\setminus\{0; 3\}$, $2X$; c) $D=\mathbb{R}\setminus\{0; 10\}$, $-\frac{X+10}{2X^3}$; d) $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $\frac{X^2-4X+4}{X+2}$; f) $D=\mathbb{R}\setminus\{0; 2\}$, $\frac{X^2}{(X+2)^2(X^2+1)(X-2)}$. **C₁.** **7.** b) $D=\mathbb{R}\setminus\{1; 2\}$, $X(X-1)(3X-1)$; c) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{(8X^2+1)(2X-1)}{2X+1}$. **8.** a) $E(X)=X+5+\frac{12}{X-2}$; b) $X\in\{-10, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 14\}$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

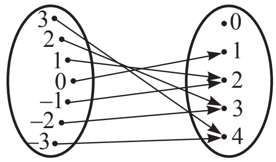
Profilul real. **A₁.** **1.** $14X^3Y^2-21X^3Y-8X^2Y^2-84X^3+12X^2Y+48X^2$. **2.** b) $P(X)+Q(X)=-3X^3-X^2+6X+1$; $P(X)-Q(X)=3X^3-X^2-6X-3$; $P(X)\cdot Q(X)=3X^5-3X^3-2X^2-6X-2$. **3.** a) $27X^3+54X^2+36X+8$; d) $27X^3+1$.

4. a) $\{0;\,5\}$; c) $\{0;\,1;\,3\}$. **B₁. 5.** b) $\left(Z-\frac{1}{2}\right)^2$; d) $(3X-1)^2$. **6.** a) $-(Y+20)(9Y+20)$; b) $4X(X-9)$; d) $(Z-\sqrt{5})(Z+\sqrt{5})\times$ $\times(Z^2+\sqrt{5}Z+5)(Z^2-\sqrt{5}Z+5)$. **7.** b) $(Y-2)(2Y^2+1)$; d) $(X+1)(X^2+\sqrt{3})$. **8.** b) $C(X)=3X^2+5X-7$; $R(X)=-1$. **9.** b) -101. **10.** a) Nu; b) nu. **11.** a) $\mathbb{R}\setminus\{-2;\,-1;\,0;\,2\}$; b) $\dfrac{X(1-X)}{(X+1)^2(4-X^2)}$; c) $-\dfrac{1}{14}\sqrt{2}(11-8\sqrt{2})$. **C₁. 12.** a) $-2{,}25$; b) nu există. **13.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0;\,3\}$, $\dfrac{X^3(X-3)^3}{8(X-1)^3}$. **14.** $Q(X)=15X^2-X-3$.

Test sumativ. Profilul real. **1.** a) $-X^4+9X^2+X-1$; b) $\operatorname{grad}P(X)=4$; c) $C(X)=-X^3-X^2+8X+9$, $R(X)=8$; d) $\{0;\,\pm3\}$; e) $C(X)=-X^2+8$, $R(X)=X+7$. **2.** a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$; c) $\alpha=2$, $E(2)=0$. **3.** $(XY+2X+5)(X^2Y^2-2X^2Y+10XY+4X^2-10X+25)$.

Modulul 6. Funcţii reale. Proprietăţi fundamentale

§ 1. *Profilul real.* A₁. 1. a) $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{-2;\,2\}$. **4.**



2. a) $[-2,\,+\infty)$; b) $(-\infty;\,0{,}25]$; c) $\mathbb{R}^*$. **3.** a), b) Nu; c) da.

B₁. 5. a) $(-\infty,\,-1]\cup(1,\,+\infty)$; b) $\mathbb{R}\setminus\{-2,\,2\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; d) $\mathbb{R}\setminus[0,\,1)$. **6.** a) $\mathbb{Z}$; b) $\mathbb{R}^*$; c) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

7. a) $(f+g)(x)=|x|+x-1$, $(f\cdot g)(x)=|x|(x-1)$, $(f\circ g)(x)=|x-1|$;
b) $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x+1}+x^3+1$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x+1}(x^3+1)$, $(f\circ g)(x)=\sqrt[3]{x^3+2}$;
c) $(f+g)(x)=x^3-1+\sqrt[3]{x-1}$, $(f\cdot g)(x)=(x^3-1)\cdot\sqrt[3]{x-1}$, $(f\circ g)(x)=x-2$.

C₁. 8. a) $(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n})(x)=x^{2^n}$; b) $(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n})(x)=x-n$. **9.** a) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=x^{17}$, $g(x)=x^{10}+1$; b) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=x^2-1$. **10*.** Da. De exemplu, $A=B=C=\mathbb{R}$, $M=\{0\}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$. **11.** $P=0$.

§ 2. *Profilul real.* A₁. 1. a) $(-\infty,\,+\infty)\nearrow$; b) $(-\infty,\,0)$, $(0,\,+\infty)\nearrow$, impară; c) $(-\infty,\,0]\searrow$, $[0,\,+\infty)\nearrow$, pară.
2. a) $y_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$; b) $y_{\max}=f(0)=0$. **3.** 1 a) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$; 1 b) $\varnothing$; 1 c) $\{0\}$; 2 a) $\{-1;\,0\}$; 2 b) $\{0\}$. **4.** a) $[-2,\,0)\cup(0,\,+\infty)$; b) $(1,\,2]$; c) $\{2\}$. **5.** $f(x)=|x|$. **B₁. 7.** a) $(-\infty,\,0]\nearrow$; $[0,\,+\infty)\searrow$; b) creşte pe fiecare interval $[n,\,n+1)$, $n\in\mathbb{Z}$; c) $[-1,\,2],\,[5,\,+\infty)\nearrow$; $(-\infty,\,-1],\,[2,\,5)\searrow$. **10.** a) $y_{\max}=f(0)=1$; b) $y_{\min}=f(0)=f(1)=0$, $y_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. **11.** f_2, perioada 1; f_3, perioada 2; f_4, perioada $\frac{1}{5}$. **12.** a) Impară; b) pară; c) nici pară, nici impară.

C₁. 14*. a) $f=h_1+h_2$, $h_1(x)=2x^2+3$, $h_2(x)=-x$; b) $f(x)=h_1+h_2$, $h_1(x)=-2$, $h_2(x)=x$. **15.** a) $f^{-1}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)$; b) $f^{-1}\colon\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{x-1}$. **16.** Monoton descrescătoare. **17.** 7. **18.** $f+g$, $f+f$, f^3, $g\circ f$ – crescătoare, $-f$ – descrescătoare, $f-g$, f^2 pot fi nemonotone.

Exerciţii şi probleme recapitulative

Profilul real. **A₁. 1.** a) $D(f)=\mathbb{R}$, $E(f)=\mathbb{R}$; b) $D(f)=\mathbb{R}^*$, $E(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; c) $D(f)=\mathbb{R}$, $E(f)=\left[-\frac{9}{4},\,+\infty\right)$.

2. a) Crescătoare pe $\mathbb{R}$; b) descrescătoare pe $(-\infty,\,0)$, $(0,\,+\infty)$; c) descrescătoare pe $\left(-\infty,\,\frac{3}{2}\right]$, crescătoare pe $\left[\frac{3}{2},\,+\infty\right)$.

3. b). **B₁. 4.** a) Pe $\left(-3,\,-\frac{7}{4}\right)$ – valori negative, pe $(-\infty,\,-3)\cup\left(-\frac{7}{4},\,+\infty\right)$ – valori pozitive; b) pe $(2,\,4)$ – valori negative, pe $(-\infty,\,2)\cup(4,\,+\infty)$ – valori pozitive; c) pe $\left(-\frac{26}{5},\,-4\right)$ – valori negative, pe $\left(-\infty,\,-\frac{26}{5}\right)\cup(-4,\,+\infty)$ – valori pozitive. **5.** a) $y_{\max}=f(1)=1$; b) $y_{\min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$; c) $y_{\min}=f(-3)=-9$. **6.** $(f+g)(x)=5$, $(f-g)(x)=2x-1$, $(f\cdot g)(x)=-x^2+x+6$, $(f\circ g)(x)=5-x$, $(g\circ f)(x)=1-x$. **7.** a), c) Impară; b) nici pară, nici impară. **8.** $x=1$ (oră). **9.** 63 zile. **10.** $f(x)=1600-25x$ – descrescătoare, $g(x)=25x$ – crescătoare. **C₁. 11.** a) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$, $g(x)=x^7+2$; b) $\Phi=f\circ g$, $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^4+3x^2+1$. **12.** f nu este inversabilă: sunt triunghiuri diferite cu aceeaşi arie.

Test sumativ. Profilul real. **1.** C. **2.** $[1,\,+\infty)\nearrow$, $(-\infty,\,1]\searrow$. **3.** $y_{\max}=f(-1)=1$, $y_{\min}=f(0)=f(-2)=0$. **4.** $\{3;\,4\}$. **5.** a). **6.** a) $h=f_2\circ f_1$; b) f_1; c) f_4 – mărginită inferior.

Modulul 7. Funcţii elementare. Ecuaţii. Inecuaţii. Sisteme şi totalităţi

§ 1. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** a) 2; b) –1; c) –5; d) 0. **2.** a) Ascuţit; b) obtuz; c) obtuz; d) nul. **3.** a) 1) $\frac{1}{2}$; 3) $f(x)>0,\ x\in(-\infty;\ \frac{1}{2})$; $f(x)\le 0,\ x\in[\frac{1}{2};\ +\infty)$; 4) obtuz; 5) nu. **5.** a) $S=\{4\}$; b) $S=\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$. **6.** a) $S=\{(2,\ 1)\}$; b) $S=\{(0,\ 1)\}$. **7.** a) $S=(-\infty,\ -10{,}5)$; b) $S=(-\infty,\ -10)$. **8.** d) $S=(-\infty,\ -4)$; e) $S=\varnothing$. **B.** **9.** a) Prut – 953 km; Nistru – 1352 km. **10.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $-5;\ \frac{1}{2}$; c) $-4;\ -\sqrt{3};\ 2$. **11.** a) $f(t)=3600t+2400$; b) 15 ore. **12.** 1) 17 şi 27; 3) 200 t, 320 t. **13.** 12 motociclete, 36 autoturisme. **14.** 23 bancnote a câte 20 de lei; 46 bancnote a câte 50 de lei. **15.** Peste 3 ani. **18.** 57 de ani. **19.** Nu există. **20.** <. **21.** $(-\infty,\ 3)$. **C.** **22.** a) 10 muncitori; b) 3 hl; 2,1 hl.

§ 1. *Profilul real.* A₁. **1.** a) $f,\ f_2,\ f_4$; b) $f_1,\ f_6$. **2.** a) $y=1{,}5x-2$. **3.** a) $x=-\frac{2}{7};\ y=\frac{4}{7}$; b) $x\in\left(-\infty,\ -\frac{2}{7}\right]$. **4.** $S=\left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$. **5.** b) $x\in(-1,\ +\infty)$. **B₁.** **6.** 50 km/h, 26 km/h. **7.** $x=-1,\ y=1$. **9.** a) $S=\{(1;\ -2)\}$. **C₁.** **10.** 1,5 kg. **11.** 40 t cu 5% nichel, 100 t cu 40% nichel. **12*.** a) $a\ne\pm1$; b) $a\ne\pm1$; c) nu există astfel de valori ale lui x.

§ 2. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **2.** a) $S=\{-3;\ 7\}$; b) $S=\left\{-\frac{3}{5};\ \frac{1}{5}\right\}$; c) $S=\{-1;\ 5\}$; d) $S=\{-1-\sqrt{10};\ -1+\sqrt{10}\}$. **3.** a) $x_1+x_2=-10,\ x_1\cdot x_2=20$; b) $x_1+x_2=16,\ x_1\cdot x_2=63$; c) $z_1+z_2=-0{,}6,\ z_1\cdot z_2=-1{,}2$; d) $t_1+t_2=\frac{3}{2},\ t_1\cdot t_2=-3$. **B.** **6.** a) $S=(-\infty,\ 2)\cup(3,\ +\infty)$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\left(-\infty,\ -\frac{1+\sqrt{33}}{4}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{33}-1}{4},\ +\infty\right)$; d) $S=(-2,\ -1)$.
7. a) $\left(-\infty,\ \frac{1}{3}\right)\cup(1,\ +\infty),\ \left(\frac{1}{3},\ 1\right)$; b) $\left(-\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(-\infty,\ -\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$; c) $(-\infty,\ -3)\cup(0,\ +\infty),\ (-3,\ 0)$.
8. a) $S=\{(-\sqrt{5};\ -\sqrt{5}),\ (\sqrt{5};\ \sqrt{5})\}$; b) $S=\left\{(0;\ 1),\ \left(\frac{4}{3};\ -\frac{5}{3}\right)\right\}$. **11.** 8 u.l. **12.** $a\in\{-3;\ 4\}$. **13.** *Indicaţie*. Se va aplica teorema lui Pitagora. **14.** 210 cm². **15.** 52 m, 40 m. **16.** $33\frac{2}{3}$ km/h. **18.** $A=\left\{-\frac{1}{2},\ 3\right\}$. **19.** $(-\infty,\ -6)$. **20.** 3.
C. **21.** (12 m, 40 m). **22.** –5. **23.** $p=4,\ q=-\frac{1}{2}$ sau $q=\frac{1}{2}$.

§ 2. *Profilul real.* A₁. **3.** 510 m. **4.** $a=b=5$. **B₁.** **5.** a) $S=\left\{\frac{5\pm\sqrt{17}}{2};\ 2;\ 3\right\}$. **6.** a) $S=[-4,\ 4]$; b) $S=(-\infty,\ -4]\cup[5,\ +\infty)$. **7.** $(x-4)^2+(y-5)^2=\frac{36}{5}$. **8.** a) $h(5)=237{,}3$ m; b) $\approx 14{,}7$ s. **9.** a) $\mathbb{R}\setminus\{2;\ 3\}$; b) $\{0\}\cup(-\infty,\ -1]\cup[1,\ +\infty)$; c) $[-3,\ -1]\cup[0,\ 3]$; d) $(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ -1]\cup[4,\ +\infty)$. **10.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\{1;\ 8\}$. **11.** a) $S=\{(1{,}5;\ -2),\ (10;\ 15)\}$; b) $S=\{(6;\ 8),\ (8;\ 6)\}$. **12.** a) $S=\{(3-3\sqrt{2};\ 3+3\sqrt{2}),\ (3+3\sqrt{2};\ 3-3\sqrt{2}),\ (2;\ 4),\ (4;\ 2)\}$; b) $S=\{(2;\ 3),\ (3;\ 2)\}$. **13.** a) $m\in\{-\sqrt{10},\ \sqrt{10}\}$; b) $m\in(-\sqrt{10},\ \sqrt{10})$; c) $\mathbb{R}\setminus[-\sqrt{10},\ \sqrt{10}]$. **15.** a) $S=\{(-1;\ -3),\ (-3,\ -1)\}$; b) $S=\{(-4;\ -5),\ (5;\ 4)\}$.
16. a) $S=\left\{\left(\frac{7}{3};\ -\frac{2}{3}\right);\ \left(-\frac{7}{3};\ \frac{2}{3}\right)\right\}$; c) $S=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ \sqrt{3}-1\right)\right\}$. **17.** 24 km/h, 18 km/h. **19.** a) $(x-3{,}5)^2+(y-\sqrt{10})^2=12{,}25$; $(x-3{,}5)^2+(y+\sqrt{10})^2=12{,}25$; b) nu se intersectează; c) $(\sqrt{2};\ \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$. **20.** c) *Indicaţie*. Fie $|3x-1|=t,\ t\ge 0$. **21.** a), b) *Indicaţie*. Aplicaţi metoda intervalelor; c) $S=(-\infty,\ 1)$; d) *Indicaţie*. Aplicaţi metoda intervalelor; e) $S=\left\{-\frac{1}{2};\ 1\right\}$; f) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{0;\ \frac{1}{3};\ 1\right\}$. **23.** c) $S=\{(2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2}),\ (2+\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2}),\ (-2-\sqrt{2};\ -2+\sqrt{2}),\ (-2+\sqrt{2};\ -2-\sqrt{2})\}$.
24. a) I uzină – 24 piese; II uzină – 16 piese; b) A – 20 de motoare, B – 30 de motoare. **25.** $m_{CH_3OH}=0{,}64$ g, $m_{C_2H_5OH}=0{,}46$ g. **26.** $S=\{(1;\ 4),\ (-1;\ -4),\ (4;\ 1),\ (-4;\ -1)\}$. **27.** 160 g, 20%. **28.** $S=[-1,\ 1)\cup[2,\ +\infty)$. **C₁.** **30.** $a\in[-2,\ +\infty)$. **31*.** $a\in[-1;\ -0{,}2]$. **32.** $(x-\sqrt{2})^2+(y-0{,}5)^2=2{,}25$.

Test sumativ I. ***Profilurile umanistic, arte, sport.*** **1.** De exemplu, $6x-4y=-6$. **2.** a) $x_1=-1,\ x_2=\frac{2}{3}$. **3.** a) $D(f)=R\setminus\{\pm1\}$; b) $x\in(-1,\ 0]\cup(1,\ +\infty)$. **4.** O lalea – 8 lei, o narcisă – 5 lei.

Profilul real. **1.** $S=\{(1\pm\sqrt{2};\ -1\pm\sqrt{2}]\}$. **2.** $D(f)=R\setminus\{0;\ 5\}$. **3.** I tren – 40 km/h, II tren – 60 km/h.

§3, 3.1-3.3. ***Profilurile umanistic, arte, sport.*** **A.** **3.** $f(x)\in\{0;\ \sqrt{2};\ 2\sqrt{2};\ 2\sqrt{11};\ 8;\ 12\}$. **4.** $f(x)\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;10\}$.
5. $f(x)\in\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{6};1;-\frac{1}{2\sqrt{2}};-\frac{1}{9};-\frac{1}{20}\right\}$. **B.** **6.** a) $y=-\frac{12}{x}$; b) $y=\frac{27}{x}$; c) $y=-\frac{5}{x}$; d) $y=\frac{10}{x}$. **9.** Aparţine.

§3, 3.1-3.3. ***Profilul real.*** **A_1.** **1.** a) $[3,+\infty)$; b) $\mathbb{R}$. **3.** a) Pară; b) impară. **B_1.** **4.** a) $(f+g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=x^4+x^5$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=x^9$; b) $(f+g)\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$.
5. a) $[0,+\infty)\nearrow$, $(-\infty,0]\searrow$; b) $(-\infty,-2]\searrow$, $[-2,+\infty)\nearrow$; c) $(0,+\infty)\nearrow$; d) $(-4,+\infty)\nearrow$. **C_1.** **6.** a) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_-$, $f^{-1}(x)=-\sqrt[4]{x}$; b) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x^2$; c) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=4x^3$. **7*.** a) $(f+g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=\sqrt[3]{x}+x^3$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=\sqrt[3]{x}\cdot x^3$; $(f\circ g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=x$; b) $(f+g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f+g)(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$; $(f\cdot g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\cdot g)(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$; $(f\circ g)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=(\sqrt[3]{x})^2$.

§3, 3.4. ***Profilul real.*** **A_1.** **1.** a) $S=\{0\}$; b) $S=\varnothing$; d) $S=\{0\}$; e) $S=\{2\}$; f) $S=\{3\}$. **2.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\left\{\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})\right\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{2\}$. **4.** F. **B_1.** **5.** a) $S=\{3\}$; b) $S=\{3\}$. **6.** a) $S=\{2,5\}$; b) $S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{3};1\right\}$; d) $S=\{-1;1{,}5;2;3\}$.
7. a) $S=\{2\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{2}(5\sqrt{13}-13)\right\}$; c) $S=\{-3\}$; d) $S=\{1;2;10\}$. **8.** a) $S=\{1;3;4\}$; b) $S=\{-8;8\}$. **9.** a) $S=\{-4;2\}$; b) $S=\{4;9\}$; c) $S=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};1\right\}$. **10.** b) $S=\{-4;4\}$. **11.** a) $S=\{1\}$. **C_1.** **12.** a) $S=\left\{-\frac{47}{24}\right\}$; b) $S=\{12\}$; d) $S=[5,10]$; e) $S=\{0\}$; f) $S=\{-7;2\}$. **13*.** a) $S=\left\{\frac{(2+\sqrt{3})^n+1}{(2+\sqrt{3})^n-1};\frac{(2-\sqrt{3})^n+1}{(2-\sqrt{3})^n-1}\right\}$; b) $S=\left\{-1;\frac{9}{16}\right\}$. **16*.** a) $S=\left\{0;\frac{63a}{65}\,\middle|\,a\in\mathbb{R}\right\}$; b) $S=\{0\}$ pentru $a=0$, $S=\varnothing$ pentru $a\in(-\infty,0)\cup(0,1)$, $S=\left\{\frac{(a-1)^2}{4}\right\}$ pentru $a\in[1,+\infty)$. **17.** $m\in[-1,0]$.

§3, 3.5. ***Profilul real.*** **A_1.** **2.** a) $S=(-1,+\infty)$; b) $S=[-3,1]$; c) $S=\varnothing$; d) $S=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$; e) $S=\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{5}\right]$; f) $S=(-10,+\infty)$. **B_1.** **4.** a) $S=[-5,3)$; b) $S=[4;\ 4{,}5)$; d) $S=\{-1\}\cup[4,+\infty)$; e) $S=(-\infty,0]$; f) $S=\mathbb{R}$.
5. a) $S=(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$; b) $S=[8,+\infty)$; c) $S=[0,1]\cup[3,+\infty)$. **6.** a) $S=\left[\frac{73}{16},+\infty\right)$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\left(-\infty,-\frac{19}{8}\right]\cup[4,+\infty)$.
9. a) $S=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$; b) *Indicaţie*. Efectuaţi substituţia $t=\sqrt{\frac{1-x}{2x+1}}$; c) *Indicaţie*. Fie $t=\sqrt{x^2-3x+5}$, $t\ge 0$.
10. $S=(-1,1]$.

§4, 4.2. ***Profilurile umanistic, arte, sport.*** **A.** **1.** a) A; b) A; c) F; d) F. **4.** a) <; b) >; c) >; d) >; e) >. **5.** a) A; b) A; c) F. **6.** $9a$.
B. **9.** b) 64 de bacterii; c) 2^{50} bacterii. **11.** 151165,44 lei. **C.** **13.** *Indicaţie*. Numărul se va compara: a) cu $\left(\frac{1}{4}\right)^0$; b) cu $(\sqrt{2})^0$; c) 2^0; d) π^0; e) $(\sqrt{3}-1)^0$; f) $\left(\frac{1}{5}\right)^0$.

§4, 4.2. ***Profilul real.*** **A_1.** **2.** a) $a>1$; b), c) $a\in(0,1)$. **3.** a) $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}>(\sqrt{2})^{1{,}3}$; b) $(0{,}3)^{-\sqrt{3}}<(0{,}3)^{-1{,}8}$. **4.** a) $x\in(-\infty,0)$; b) $x\in(0,+\infty)$; c) $x\in(0,+\infty)$. **5.** Pară. **6.** b) $S=\{3\}$; c) $S=\{-3\}$; d) $S=\{-2\}$; f) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$; g) $S=\varnothing$; h) $S=\{1\}$; i) $S=\varnothing$.
B_1. **7.** a) $S=\{-8\}$; b) $S=\{\log_{12}1{,}25\}$; c) $S=\{4\}$. **8.** a) $S=\{-0{,}5;0{,}5\}$; b) $S=\{-2;1\}$; c) $S=\left\{\frac{1-\sqrt{43}}{3};\frac{1+\sqrt{43}}{3}\right\}$.
9. a) $S=\{\log_2 28\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{-2\}$. **10.** a) $S=\{\log_3 16\}$; b) $S=\{0,\log_4 3\}$; c) $S=\varnothing$. **11.** $x=\frac{8}{5}$. **12.** a) $x\in(-\infty,0)$; b) $x\in(0,+\infty)$. **13.** a) $S=\{-2,2\}$; b) $S=\{-2{,}5;3\}$. **14.** a) $S=\{0\}$. **15.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\{1\}$.
16. a) *Indicaţie*. Fie $(2+\sqrt{3})^{2x+1}=t$, atunci $(2-\sqrt{3})^{2x+1}=\frac{1}{t}$; b) *Indicaţie*. Fie $(5+2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}}=t$. Atunci, $(5-2\sqrt{6})^{\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{t}$.
17. a) $S=\{0\}$; b) $S=\{-0{,}5;0{,}5\}$; c) *Indicaţie*. DVA: $x\in\mathbb{N}$, $x\ge 2$. Împărţiţi ecuaţia la $4^{\frac{1}{x}}$. **18.** a) *Indicaţie*. Aplicaţi metoda intervalelor. **19.** a) $S=\{2\}$; b) $S=\{4\}$; c) $S=\varnothing$. *Indicaţie*. Utilizaţi proprietăţile funcţiilor ce reprezintă membrii ecuaţiei respective. **21.** $S=\{-3\}$. **C_1.** **22.** $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **23.** $a\in(-\infty;0]\cup[3;9]$. **24.** a) *Indicaţie*. Fie $t=25^{|x+1|}$, $t>0$. Ecuaţia devine

$t^2-2t+a=0$; b) $S=\varnothing$ pentru $a\in(-\infty, 3]\cup[27, +\infty)$, $S=\left\{\log_4\dfrac{16(a-27)}{3-a}\right\}$ pentru $a\in(3, 27)$; c) *Indicaţie*. Fie $2^x=t$, $t>0$. Ecuaţia devine $at^2-5t+1=0$.

§ 4, 4.3. *Profilul real.* A₁. **1.** a) $S=(5, +\infty)$; b) $S=(-1, +\infty)$; c) $S=(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$; d) $S=\mathbb{R}$; e) $S=\varnothing$; f) $S=[4, +\infty)$. **B₁. 2.** a) $S=(-\infty, 1]$; b) $S=(-\infty, -\log_5 10)$; c) $S=(-\infty, \log_{0,7}10]$. **3.** a) $S=[-1, 15]$; b) $S=(3, +\infty)$; c) $S=\left(-\infty, \dfrac{7}{13}\right)$. **4.** b) $S=(-\infty, -1)$; c) $S=(2, +\infty)$; d) $S=[0, +\infty)$; e) *Indicaţie*. Fie $2^x=t$, $t>0$; g) *Indicaţie*. Fie $8^x=t$, $t>0$. **5.** $S=\left[-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. **6.** $S=[-3; +\infty)$. **C₁. 7.** a) $S=(-1, 0)\cup(0, 1)\cup(1, 2)$; b) *Indicaţie*. Fie $3^x=t$, $t>0$. Aplicaţi metoda intervalelor; c) *Indicaţie*. Împărţiţi inecuaţia la $9^{|x|}$. **8.** a) *Indicaţie*. Fie $3^x=t$, $t>0$. **10*.** a) $S=\varnothing$ pentru $a=0$. *Indicaţie*. Rezolvaţi inecuaţia $2\cdot4^{x+1}+a\cdot2^{x+1}-a^2<0$ ca inecuaţie de gradul II faţă de 2^{x+1}, apoi analizaţi cazurile $a>0$ şi $a<0$.

§ 5, 5.1. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** a) A; b) F; c) F; d) A. **4.** a) >; b) >; c) <; d) <; e) <. **B. 5.** a) $x\in\mathbb{R}$; b) $x\in(2, 3)$; c) $x\in(-1, 1)$. **7.** *Indicaţie*. PH se calculează conform formulei $\mathrm{PH}=-\lg[H^+]$. *Răspuns*: PH = 7. **9.** $2\log_9 x$.

§ 5, 5.1. *Profilul real.* A₁. **2.** a) $0<\log_3 2<1$; b) $\log_3 0{,}2<0$; c) $0<\log_{\frac{1}{3}}0{,}5<1$; d) $\log_{\sqrt2}0{,}2<0$. **3.** a), b), c) Primul număr mai mare. **B₁. 6.** $\log_{\sqrt3}6>\log_3 5$. **7.** $x=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$. **8.** a) $f^{-1}\colon \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_2 x+3$; b) $f^{-1}\colon \mathbb{R}\to(2, +\infty)$, $f^{-1}(x)=3^x+2$. **9.** a) $x\in(0; 0{,}2)$; b) $x\in(13, +\infty)$. **C₁. 10.** b) $(1, 2]\searrow$, $[2, +\infty)\nearrow$, nici pară, nici impară, $E(f)=\mathbb{R}_+$, $y_{\min}=f(2)=0$. **11.** a) $(-2, +\infty)\setminus\{\pm1\}$; b) $(0, 10^{-4})\cup(1, 10)$.

§ 5, 5.2. *Profilul real.* A₁. **1.** a) $S=\{16\}$; b) $S=\{1\}$; c) $S=\{100\}$; d) $S=\left\{3\frac{1}{3}\right\}$; e) $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$. **2.** a) $S=\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; b) $S=\{-2\sqrt2; 2\sqrt2\}$; c) $S=\left\{\dfrac{3-\sqrt{41}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{41}}{2}\right\}$. **3.** a) $S=\{-1; 2\}$; b) $S=\{1-\sqrt6; 1+\sqrt6\}$; c) $S=\{1\}$. **4.** a) $S=\{1+10\cdot\sqrt[4]{500}\}$; b) $S=\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$. **B₁. 5.** a) $S=\{2; 3\}$; b) $S=\left\{-1\dfrac{2}{3}; 79\right\}$; c) $S=\{10^{-4}; 10^3\}$. **6.** b) $S=\left\{\dfrac{\sqrt2}{2}; \dfrac{1}{4}\right\}$; c) $S=\{3^{-3-\sqrt{15}}; 3^{-3+\sqrt{15}}\}$; d) $S=\{-16\}$; e) $S=\{4\}$; f) $S=\left\{\dfrac{\sqrt[3]{9}}{9}; \dfrac{\sqrt3}{3}\right\}$; g) $S=\{\pm4\}$; h) $S=\{-1; 4\}$. **8.** $S=\{-81; -1\}$. **9.** $S=\{3\}$. **C₁. 11*.** a) $S=\varnothing$ pentru $a=1$, $S=\left\{\dfrac{1}{a}; a^2\right\}$ pentru $a\in(0, 1)\cup(1, +\infty)$; c) $S=\varnothing$ pentru $a\in(-\infty, 0]\cup\{1\}$, $S=\left\{\dfrac{2-\sqrt2}{2}; \dfrac{2+\sqrt2}{2}\right\}$ pentru $a=10$. *Indicaţie*. Pentru $a\in(0, 1)\cup(1, 10)\cup(10, +\infty)$ rezolvaţi ecuaţia de gradul II $2x(2-x)=\lg a$.

§ 5, 5.3. *Profilul real.* A₁. **1.** a) $S=(0, 1)$; b) $S=[-3, 3]$; c) $S=[1; 1{,}5)$; d) $S=(-4, -\sqrt7)\cup(\sqrt7, 4)$; e) $S=\left(\dfrac{3-\sqrt5}{2}, 1\right)\cup\left(2, \dfrac{3+\sqrt5}{2}\right)$. **2.** a) $S=\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right]\cup[3, +\infty)$; b) $S=\left(1{,}6; \dfrac{5}{3}\right]$; c) $S=\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. **3.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\left(2, \dfrac{13+\sqrt{193}}{12}\right)$. **4.** $S=(3, 5]$. **B₁. 6.** c) $S=\left(0, \dfrac{1}{3}\right)\cup(3, +\infty)$. **7.** b) $S=\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$; d) *Indicaţie*. În DVA al inecuaţiei iniţiale rezolvaţi inecuaţia $\log_{x+2}\dfrac{6}{10-x^2}<0$. **C₁. 8.** $S=\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)\cup\left(0, \dfrac{1}{4}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. **10.** $S=\{0\}\cup[2, 3)$. **11*.** a) *Indicaţie*. Aplicînd metoda intervalelor, rezolvaţi în DVA inecuaţia $|x+5|\cdot|x-1|\geq x$. **12*.** $a\in(0, 1)$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

***Profilurile umanistic, arte, sport.* A.** **1.** a) 1) $x_0=-\sqrt5(2+\sqrt3)$, 2) $[x_0, +\infty)$; b) 1) $x_0=-7(\sqrt3+2)$, 2) $(-\infty, x_0)$; c) 1) $x_0=\dfrac{51}{106}$, 2) $(x_0, +\infty)$. **2.** a) $f(t)=500+80t$; b) 18 luni. **3.** a) $f(x)=20+35x$; b) 142,5°C. **4.** a) $f(x)=23+0{,}18x$; b) 59 \$. **B. 5.** a) $[1, +\infty)$; b) $(-\infty, 2)\cup(3, +\infty)$. **6.** a) $(-\infty, -3)\cup(2, +\infty)$; b) $(-\infty, 2)$; c) $(-1, +\infty)$; d) $\left(\dfrac{6}{5}, +\infty\right)$.

7. a) $t=0{,}25$ s; b) $t=1{,}5$ s. **8.** $f(t)=90-7{,}62t$, ≈ 11 ore 48 min. **C. 9.** a), c) Al doilea număr mai mare; b), d), e), f) primul număr mai mare.

***Profilul real.* A₁. 1.** a) Al doilea număr mai mare; b), c), d), e) primul număr mai mare. **2.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\{\sqrt{2}\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\left\{\frac{\sqrt[5]{21}}{3}\right\}$; f) $S=\varnothing$. **3.** a) $(-\infty,-1)$; b) $[0,2)\cup(2,+\infty)$; c) $(-1,+\infty)$. **B₁. 4.** *Indicație.* $\frac{1}{R_T}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2+R_3}$, $R_3=5\Omega$. **5.** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$. **6.** $S=[-1;0]\cup\{1\}$. **7.** a) 20 u.l.; b) 24 u.l. **8.** $f(x)=-\frac{3}{800}(x-40)^2+18$.

Test sumativ* II. *Profilurile umanistic, arte, sport. **1.** <. **2.** $0{,}1^{-3}>10^{-2}$. **3.** $x\in(-\infty,-1)\cup(6,+\infty)$. **4.** b) F. **5.** 43 de ani, 9 ani.

Profilul real. **1.** F. **4.** *Indicație.* Fie $\log_4(-x)=t$. **5.** $S=(-\infty,-1]\cup\left[\frac{5}{3},+\infty\right)\cup\{1\}$. **6.** *Indicație.* Fie $6^{|x|}=t$, $t>0$.

Modulul 8. Elemente de trigonometrie

§ 1. *Profilul real.* A₁. 1. a) $\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{9},\frac{11}{18}\pi$; b) $\frac{\pi}{3},-\frac{13}{30}\pi,\frac{3}{2}\pi$. **2.** a) 60°, 90°, –135°; b) 30°, 108°, –360°. **3.** b) $-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $5-2\sqrt{3}$; d) $4+\frac{\sqrt{3}}{6}$. **4.** a) Da; b) da; c) nu; d) nu. **5.** a) Nu; b) da; c) da; d) da. **6.** a) $\sin^2\alpha+\sin\alpha$; b) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)$; c) -1; d) $\mathrm{ctg}\alpha$. **B₁. 7.** a) 1; b) -3; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{2}$. **8.** a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; b) $\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$. **9.** a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$; d) $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **10.** a) 8 cm, 30°, 60°; b) 2 cm, 30°, 60°. **11.** 45°, 135°. **12.** ≈ 108 m. **13.** $\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{12}$ sau $\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}$. **14.** a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $\frac{8\pi}{9}$; c) $\frac{4\pi}{3}$; d) $\frac{20\pi}{9}$. **15.** a) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$; b) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; c) $x\neq k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **16.** Minus. **17.** a) 0; b) $\frac{1}{4}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{4}$. **18.** a) Minus; b) minus; c) minus. **19.** a) Nici pară, nici impară; b) pară; c) impară. **C₁. 20.** a*) $[-3,3]$; b*) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; c*) $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.

§ 2. *Profilul real.* A₁. 2. a) 1; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 0; d) $\cos\frac{17\pi}{70}$. **3.** a) Da; b) nu; c) da; d) da. **B₁. 4.** 0. **6.** 1. **7.** a) $\sin^2\alpha$; d) $-\sin^2\alpha$; e) $\frac{2}{\sin\alpha}$; f) $2(\cos\alpha+\sin\alpha)$. **8.** a) $\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$; b) $\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$; c) $\frac{1}{2}(1+3\cos2\alpha)$. **9.** *Indicație.* Aplicați relația $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=0{,}6^2$. **10.** *Indicație.* Aplicați relația $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^2=(2{,}5)^2$. **11.** b) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$. **12.** $\sin2\alpha=\frac{7}{25}$, $\cos2\alpha=\frac{24}{25}$, $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{7}{24}$, $\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{24}{7}$. **C₁. 15.** c), d) *Indicație.* Folosiți relația $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

§ 3. *Profilul real.* A₁. 1. a) $S=\varnothing$; b) $S=\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}$; c) $S=\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. **2.** a) $S=\left\{\frac{\pi}{6}+\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\left\{\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; c) $S=\varnothing$. **3.** a) $S=\left\{-\frac{\pi}{6}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{1}{2}\mathrm{arctg}25+\frac{\pi n}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{5\pi}{6}+5\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

B₁. 4. a) $S=\left\{\pm\frac{2\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{6}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; e) $S=\left\{-\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{28}+\frac{2\pi k}{7}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. *Indicație.* Împărțiți ambii membri ai ecuației la $\sqrt{2}$; f) *Indicație.* Împărțiți ambii membri ai ecuației la 2, apoi aplicați relația $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** a) $S=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi k}{5}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. a) $S=\left\{-\frac{3\pi}{4}+3\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; c) $S=\{\mathrm{arctg}3+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

7. a) $S=\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; d) $S=\left\{\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{8}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

8. a) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{\pi+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}$; c) *Indicație.* $1=\sin^2x+\cos^2x$; d) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$;

i) *Indicaţie*. Împărţiţi ambii membri ai ecuaţiei la $\sqrt{2}$, apoi aplicaţi relaţia $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **9.** a) $S=\left\{-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{4}\right\}$.
10. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{7}{4}$. **11.** $\arcsin\frac{3}{7}$. **13.** $\arcsin\frac{\sin\alpha\ \sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}$. **14.** $2\arccos\frac{(l+m)\cdot b}{2lm}$. **C₁.** **16*.** a) $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ pentru $a=0$. *Indicaţie*. Pentru $a\neq 0$ examinaţi aparte cazurile $\Delta=1+4a\geq 0$ şi $\Delta=1+4a<0$, ţinând cont că $|\sin x|\leq 1$; d) *Indicaţie*. Rezolvaţi ecuaţia $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3a-1}{2}$, ţinând cont de condiţia $\left|\frac{3a-1}{2}\right|\leq 1$.

§ 4. *Profilul real.* A₁. **1.** a) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$; b) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$;
c) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$;
f) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$; g) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$; h) $S=\mathbb{R}$;
i) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; j) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; k) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$;
l) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$; m) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \pi+\pi n\right)$; n) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{5\pi}{6}+\pi n,\ \pi+\pi n\right)$;
o) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$; p) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\pi n,\ \pi-\operatorname{arcctg}3+\pi n)$; r) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\pi+2\pi n,\ 2\pi n]$;
s) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ -\operatorname{arctg}3+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.
2. a) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{7\pi}{6}+4\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+4\pi n\right]$; b) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3},\ \frac{7\pi}{12}+\frac{2\pi n}{3}\right]$; c) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi n}{5},\ \frac{3\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}\right)$; d) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ \frac{\pi n}{3}\right)$;
e) $S=\mathbb{R}$. **B₁.** **3.** a) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{4}+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left[\pi n,\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$; c) $S=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5},\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}\right)$.
d) *Indicaţie*. Rezolvaţi inecuaţia $\sin 3x<-\frac{\sqrt{3}}{2}$; e*) *Indicaţie*. Introduceţi necunoscuta auxiliară $t=|\cos x|$; f*) *Indicaţie*. $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. **4.** *Indicaţie*. $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. **5.** *Indicaţie*. Scrieţi ecuaţia astfel: $(\sin x-\sin 3x)(\sin x+\sin 3x)+\sin^2 2x=0$, apoi transformaţi în produs expresiile dintre paranteze. **C₁.** **8.** $S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

Exerciţii şi probleme recapitulative

***Profilul real.* A₁.** **1.** a) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; b) $\frac{1}{4}$. **2.** a) –0,28; b) 0,68. **3.** a) –3; b) 0. **4.** $2{,}4\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\approx 4{,}63$ m. **5.** $(20-10\sqrt{3})$ cm. **6.** $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{2\pi}{3}$. **8.** a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$. **B₁.** **10.** 5°; 150°; 720°; 1500°. **11.** Mai mică decât 1. **12.** a) Plus; b) minus. **13.** a) Nici pară, nici impară; b) impară. **14.** *Indicaţie*. Utilizaţi $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2=m^2$. a) $m^2=2m$; b) $m(m^2-2m-1)$. **15.** a) A; b) F. **16.** $S=\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$. **19.** –330°. **20.** 2 cazuri: 1) $\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului alăturat bazei, $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului de la vârf; 2) $\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului alăturat bazei, $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ – măsura unghiului de la vârf. **C₁.** **22*.** a) $S=\left\{\pi-\arcsin\frac{3\sqrt{20}}{20}-\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup$ $\cup\left\{\arcsin\frac{3\sqrt{20}}{20}+\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$. **23*.** a) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Test sumativ. *Profilul real.* A₁. **1.** **D**. **2.** F. **3.** $-0{,}96$; $0{,}28$; $-3\frac{3}{7}$; $-\frac{7}{24}$. **4.** $S=\{2k\pi \mid k\in \mathbb{Z}\}$. **5.** $x\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. **6.** $\arcsin\frac{5\sqrt{41}}{41}$.

Modulul 9. Patrulatere. Poligoane. Recapitulare şi completări

§ 1. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** 44 cm. **2.** 12 cm. **3.** 50°, 130°. **4.** 70°, 110°. **5.** 70°. **6.** 35°. B. **9.** 75°, 105°. **10.** 9,6 cm. **11.** Nu. **15.** 20 cm. C. **16.** 24 cm, 40 cm. **17.** 56 cm, 84 cm.

§ 1. *Profilul real.* A_1. **1.** $\angle DAE \equiv \angle AEB$ ca unghiuri alterne interne. **2.** *Indicație*. Prin vârfurile unghiurilor ascuțite construiți drepte paralele cu catetele şi veți obține un dreptunghi. **3.** 16. **4.** 20°. **5.** $8\sqrt{5}$ cm; $4\sqrt{5}$ cm. **6.** $\frac{85}{8}$ cm. **7.** 9 cm; 25 cm. B_1. **8.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ dm. **9.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **10.** *Indicație*. Folosiți rezolvarea problemei **7 C**, p. 46. C_1. **11.** $2(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ cm. **12.** 18 m, 12 m, 36 m, 30 m. **13.** 6 cm; $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ cm. **14.** *Indicație*. Dacă se construiesc înălțimile din vârfurile unghiurilor obtuze, atunci se obțin două triunghiuri congruente. **15.** d_1+d_2. **16.** 1 : 6.

§ 2. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** a) 12 laturi; b) 18 laturi. **2.** a) 10 laturi; b) 15 laturi. B. **3.** $0{,}5R$. C. **6.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§2. *Profilul real.* A_1. **1.** $R=\dfrac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$, $r=\frac{a_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$. **2.** $3\sqrt{3}$ m, $4\sqrt{2}$ m, 6 m, $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ m, $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m.

B_1. **3.** $\frac{9\sqrt{2}+2\sqrt{6}-6\sqrt{3}}{6}$ m². C_1. **4.** $2\sqrt{6}$ m.

§ 3. *Profilurile umanistic, arte, sport.* A. **1.** 600 cm². **2.** 60 cm². B. **3.** $12\sqrt{3}$ cm². **4.** 60 cm². **5.** 157,5 cm². **6.** 108 cm². **7.** 38 cm². **8.** 30 cm². C. **9.** 144 cm². **10.** 4π cm².

§ 3. *Profilul real.* A_1. **1.** $\frac{d^2-4a^2}{4}$. **2.** $5\sqrt{35}$ cm². **3.** $\frac{9}{4}$ m², $\frac{15}{4}$ m². B_1. **4.** $20\sqrt{21}$ m². **5.** 5 m². **6.** 150 cm². **7.** $12\sqrt{3}$ cm². **8.** $18\sqrt{3}$ cm². **9.** $\frac{ab}{4}$. C_1. **10.** 8 cm. **11.** $\mathcal{A}_{ABE}=2$ u.p., $\mathcal{A}_{\Delta AED}=4$ u.p. **12.** $\frac{3d^2}{4}$. **13.** 3,6 dm².

Exerciții şi probleme recapitulative

Profilurile umanistic, arte, sport. A. **1.** $\sqrt{2}-1$. **2.** $\frac{136\sqrt{2}}{5}$ cm. **3.** 60°, 120°. B. **4.** 7,5 cm. **5.** 4 : 1. **6.** 150°. **7.** 12 cm. **8.** 3 cm. **9.** 8 cm. **10.** $8\sqrt{5}$ cm. **11.** $2\sqrt{2}$ cm. **12.** $10\sqrt{3}$ cm. **13.** 36 cm. C. **14.** 28 cm². **15.** 24 cm.

Profilul real. A_1. **1.** $r(2R+r)$. **2.** 5 cm. **3.** 3 : 4. B_1. **4.** 73 : 70. **5.** $3\sqrt{15}$ cm. **6.** $4\sqrt{5}$ cm. **7.** 25π cm². **8.** $(20+2\sqrt{10})$ cm. **9.** 24 cm². **10.** $\frac{a-b}{2}$. **11.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **12.** 30°, 60°. C_1. **15.** Triunghiurile dreptunghice isoscele cu catetele $\sqrt{2\mathcal{A}}$. **16.** Triunghiurile isoscele cu unghiul de la vârf α.

Test sumativ. *Profilurile umanistic, arte, sport.* **1.** a) A; b) 6π cm². **3.** 30 cm, $15\sqrt{21}$ cm. **4.** 288 cm².

Profilul real. **1.** $\frac{37\sqrt{3}}{4}$ cm². **2.** *Indicație*. Demonstrați că această mărime este egală cu înălțumea triunghiului. **3.** 4 cm, $\frac{5\sqrt{41}}{4}$ cm. **4.** $\frac{R^2}{12}(7\pi+6+3\sqrt{3})$ (u.p.).

CUPRINS

10

Matematică

Manual pentru clasa a X-a