



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri

Andrei Braicov

Olga Șpunteco

# Matematică

Manual pentru clasa a IX-a

9



EDITURA  
PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri

Andrei Braicov

Olga Șpunteco

# Matematică

Manual pentru clasa a IX-a



Acest manual este proprietate publică, editat din bugetul de stat, sursa Ministerului Educației și Cercetării, și transmis cu titlu gratuit.

Manualul școlar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educației și cercetării nr. 367 din 25 martie 2024 ca urmare a evaluării calității metodic-științifice.

(Denumirea instituției de învățământ)

#### EVIDENȚA UTILIZĂRII MANUALULUI:

Anul de folosire	Numele și prenumele elevului	Anul de studii	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

- Dirigintele verifică dacă numele și prenumele elevului sunt scrise corect.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
- Aspectul manualului (la primire și la returnare) se va aprecia cu unul dintre următoarele calificative: *nou, bun, satisfăcător, nesatisfăcător*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferențiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chișinău  
Andrei Braicov, doctor, conferențiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chișinău  
Olga Șpunteco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chișinău

Toate drepturile asupra acestei ediții aparțin Editurii Prut Internațional. Reproducerea integrală sau parțială a textului sau a ilustrațiilor din acest manual este posibilă numai cu acordul scris al editurii.

Redactor: Vitalie Puțuntică  
Corector: Nina Artin  
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu  
Machetare computerizată: Valentina Stratu

© I. Achiri, A. Braicov, O. Șpunteco, 2024  
© Editura Prut Internațional, 2024

Editura Prut Internațional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1 A, Chișinău, MD-2051  
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18  
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

**Achiri, Ion**

Matematică: Manual pentru clasa a 9-a / Ion Achiri, Andrei Braicov, Olga Șpunteco; Ministerul Educației și Cercetării al Republicii Moldova. – [Chișinău]: Prut Internațional, 2024 (Blitz Poligraf). – 176 p.: il.

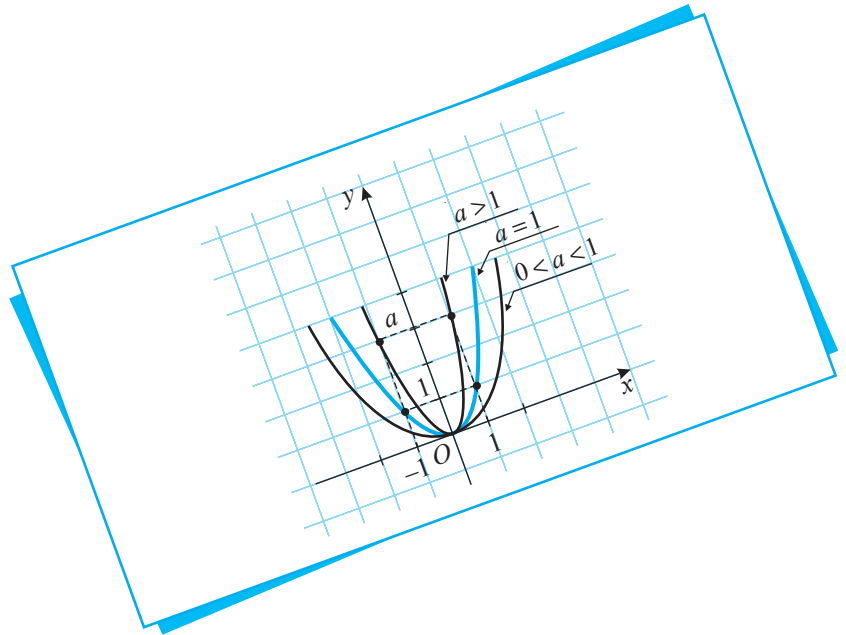
ISBN 978-9975-54-782-6

51(075.3)

A 16

Imprimat la Tipografia Blitz Poligraf

# A L G E B R Ă



$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$$

# Mulțimea numerelor reale. Recapitulare și completări

Învățătura e lumina ce-ți face viața mai senină.

Proverb

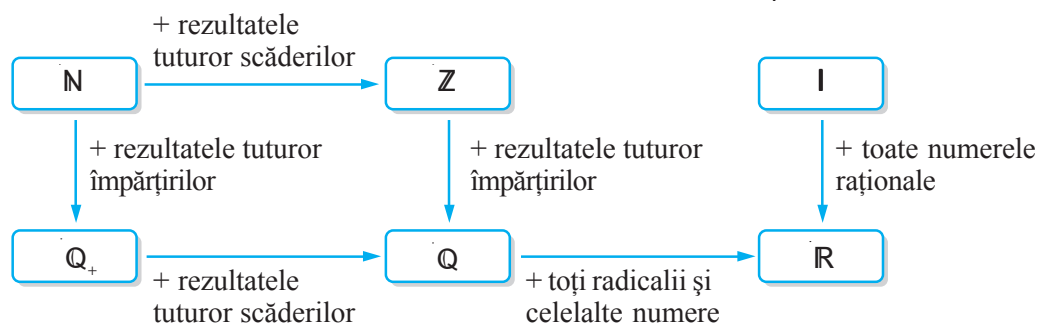
## § 1. Mulțimea numerelor reale

### 1.1. Noțiunea de număr real



**Lucrați în perechi!**

**1** Examinați schema, apoi substituiți fiecare casetă cu un element sau cu o submulțime a mulțimii  $A = \{-5; -21; -\sqrt{3}; 0; 2; 3\frac{1}{4}; \sqrt{7}; 5,8; 9\}$ .



**Model:**  $\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   
 $\{2; 9\} \subset \mathbb{N}$

\_\_\_\_\_  $\in \mathbb{Z}$     \_\_\_\_\_  $\subset \mathbb{Z}$     \_\_\_\_\_  $\in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$     \_\_\_\_\_  $\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$   
\_\_\_\_\_  $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$     \_\_\_\_\_  $\subset \mathbb{Q}$     \_\_\_\_\_  $\in \mathbb{Q}_+$     \_\_\_\_\_  $\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

**2** Substituiți fiecare casetă cu un element sau cu o submulțime a mulțimii numerelor din tabelul „Schimb valutar”.

\_\_\_\_\_  $\in \mathbb{R}$     \_\_\_\_\_  $\in \mathbb{Q}$     \_\_\_\_\_  $\subset \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$   
\_\_\_\_\_  $\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$     \_\_\_\_\_  $\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$     \_\_\_\_\_  $\subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

SCHIMB VALUTAR EXCHANGE		
cumpărare		vânzare
16,82		16,88
19,44		19,56
2,52		2,55
4,12		4,20
0,58		0,64
21,50		21,83



**Ne amintim**

**Notatii:**  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$  – mulțimea numerelor naturale.  
 $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$  – mulțimea numerelor naturale nenule.  
 $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$  – mulțimea numerelor întregi.  
 $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$  – mulțimea numerelor raționale.  
 $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ – număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale}\}$  – mulțimea numerelor iraționale.  
 $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ – număr rațional sau irațional}\}$  – mulțimea numerelor reale.  
 Sunt adevărate relațiile:  $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ .  
 $\mathbb{R}^*$  – mulțimea numerelor reale nenule;  
 $\mathbb{R}_+$  – mulțimea numerelor reale pozitive;  
 $\mathbb{R}_-$  – mulțimea numerelor reale negative.

- Scrieți sub formă de număr zecimal fracția  $\frac{33}{18}$ .

*Rezolvare:*

Efectuăm împărțirea și obținem:  $\frac{33}{18} = 1,8(3)$ .

$1,8(3)$  este un număr zecimal periodic mixt.

## Definiții

- ◆ Numerele zecimale periodice a căror perioadă urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice simple**.
- ◆ Numerele zecimale periodice a căror perioadă nu urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice mixte**.

## Aplicăm

- Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal: a)  $0,(26)$ ; b)  $25,2(43)$ .

*Rezolvare:*

a) Fie  $x = 0,(26)$ .

$$\text{Atunci } 100x = 26,(26) = 26 + x \Leftrightarrow 100x - x = 26 \Leftrightarrow x = \frac{26}{99}.$$

$$\text{Răspuns: } 0,(26) = \frac{26}{99}.$$

În general,  $0,\overline{(a_1a_2\dots a_n)} = \frac{\overline{a_1a_2\dots a_n}}{\underbrace{99\dots 9}_{n \text{ cifre}}}$ , unde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt cifre.

b) **Metoda I.** Fie  $x = 25,2(43)$ .

$$\text{Atunci } 10x = 252,(43) = 252 + 0,(43) = 252 + \frac{43}{99} = \frac{24991}{99} \Leftrightarrow x = \frac{24991}{990} = 25\frac{241}{990}.$$

$$\text{Metoda II. } 25,2(43) = 25 + \frac{243 - 2}{990} = 25\frac{241}{990}.$$

$$\text{Răspuns: } 25,2(43) = 25\frac{241}{990}.$$

În general,  $0,\overline{a_1a_2\dots a_n}(b_1b_2\dots b_m) = \frac{\overline{a_1a_2\dots a_nb_1b_2\dots b_m} - \overline{a_1a_2\dots a_n}}{\underbrace{99\dots 900\dots 0}_{m \text{ cifre } \quad n \text{ cifre}}}$ .



## Rețineți!

Un număr real poate fi scris sub forma:

- a) unui număr zecimal cu un număr finit de zecimale;
- b) unui număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale;
- c) unui număr zecimal periodic cu perioada diferită de 9.

## 1.2. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

- Reprezentați numărul  $\sqrt{2}$  pe axa numerelor:
  - a) folosind aproximările zecimale;
  - b) geometric (cu ajutorul riglei și al compasului).

*Rezolvare:*

Deoarece  $\sqrt{2} \approx 1,414$ , rezultă că  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ . Obținem următoarea reprezentare aproximativă a numărului  $\sqrt{2}$  pe axa numerelor (fig. 1):

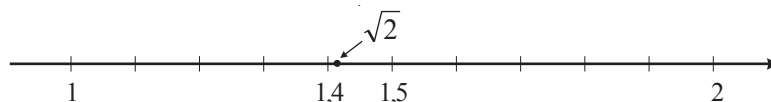


Fig. 1

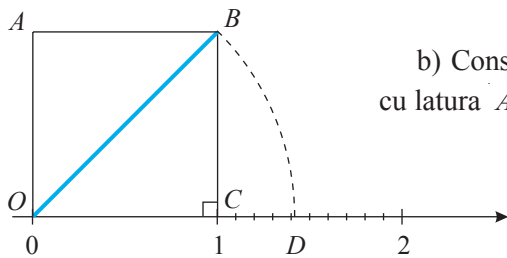
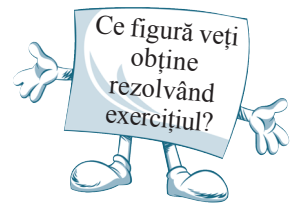


Fig. 2

b) Construim pe axa numerelor pătratul  $OABC$  cu latura  $AB=1$  (fig. 2).



Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului  $OCB$  ( $m(\angle C)=90^\circ$ ), obținem  $OB = \sqrt{2}$ . Construim, cu ajutorul compasului, pe axa numerelor segmentul  $OD$ , astfel încât  $OD = OB = \sqrt{2}$ . Atunci punctul  $D$  are coordonata  $\sqrt{2}$ .



**Exercițiu**

Determinați, aplicând în continuare teorema lui Pitagora în figura 2, punctele care au coordonatele  $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$  ș.a.m.d.

De regulă, numerele iraționale se reprezintă pe axa numerelor folosind aproximările zecimale ale acestora.



**Rețineți!**

- ⇒ Fiecărui număr real  $a$  îi corespunde un punct  $A$  al axei numerelor și, reciproc, fiecărui punct  $A$  al axei numerelor îi corespunde un număr real  $a$ . De aceea vorbim despre punctele axei numerelor ca despre numere reale, și invers.
- ⇒ Numărul  $a$  se numește **coordonata** punctului  $A$  și se notează  $A(a)$ .

Folosind reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, pot fi rezolvate diverse probleme. Una dintre ele este compararea numerelor reale. (O altă modalitate de comparare a numerelor reale va fi examinată în secvența 2.2.)

De exemplu, dacă numerele reale  $a$  și  $b$  sunt coordonatele punctelor  $A$  și  $B$  ale axei numerelor și  $\overrightarrow{AB}$  are sensul axei, atunci  $a < b$  (fig. 3).

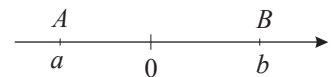


Fig. 3



**Rețineți!**

- ⇒ Dintre două numere reale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este numărul situat în dreapta celui alt.

**Aplicăm**

- Comparați numerele:
  - a)  $\sqrt{2}$  și  $\sqrt{3}$ ;                      b)  $\sqrt{2}$  și  $-\sqrt{2}$ .

*Rezolvare:*

a) Deoarece  $\sqrt{2} \approx 1,4$  și  $\sqrt{3} \approx 1,7$ , iar  $1,4 < 1,7$ , obținem  $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ .

*Răspuns:*  $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ .

b) Deoarece  $\sqrt{2} > 0$ , iar  $-\sqrt{2} < 0$ , obținem  $\sqrt{2} > -\sqrt{2}$ .

*Răspuns:*  $-\sqrt{2} < \sqrt{2}$ .

**Observație**

Numerele  $\sqrt{2}$  și  $-\sqrt{2}$  sunt numere reale opuse, adică punctele  $D(\sqrt{2})$  și  $D'(-\sqrt{2})$  ale axei numerelor sunt simetrice față de originea ei, și invers, coordonatele punctelor  $D(\sqrt{2})$  și  $D'(-\sqrt{2})$ , simetrice față de originea  $O$ , sunt numere reale opuse (fig. 4).

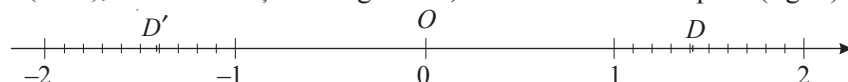


Fig. 4

**Rețineți!**

**Numere reale opuse** sunt numerele reale situate pe axa numerelor pe diferite părți față de origine și la distanțe egale de aceasta.  
 Numere reale opuse sunt numerele reale de forma  $a$  și  $-a$ .

**1.3. Modulul numărului real****Lucrați în perechi!**

- Explicitați modulul:

a)  $|3 - \sqrt{2}|$ ;      b)  $|1 - \sqrt{3}|$ ;      c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$ ;      d)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \frac{1}{3}\right\}$ .

*Rezolvare:*

a)  $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$ , deoarece  $3 > \sqrt{2}$ ;

b)  $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ , deoarece  $1 < \sqrt{3}$ ;

c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-3; 3]\}$ ;

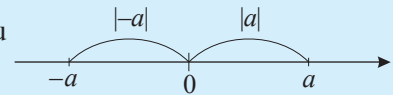
d)  $\left\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > \frac{1}{3}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)\right\}$ .

**Rețineți!**

**Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr real  $a$  este:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases} \text{ sau } |a| = \max\{-a; a\}, \text{ sau}$$

distanța de la  $a$  la 0 pe axă.

**Proprietăți ale modulului unui număr real**

1°  $|a| \geq 0$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ , și  $|a| = 0$  dacă și numai dacă  $a = 0$ .

2°  $|a| \geq a$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .

3°  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ , oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ .

4°  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ .

5°  $|a|^2 = |a^2| = |-a|^2 = a^2$ , oricare ar fi  $a \in \mathbb{R}$ .

**Aplicăm**

- Explicitați modulul utilizând proprietățile lui și aduceți la forma cea mai simplă:

a)  $|3 - \sqrt{2}| \cdot |3 + \sqrt{2}|$ ;

b)  $|1 - \sqrt{7}| \cdot (1 + \sqrt{7})$ ;

c)  $|x + y| : (x + y)^2$ .

*Rezolvare:*



a)  $|3 - \sqrt{2}| \cdot |3 + \sqrt{2}| = |(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})| = |9 - 2| = 7$ ;


b)  $|1 - \sqrt{7}| \cdot (1 + \sqrt{7}) = -(1 - \sqrt{7}) \cdot (1 + \sqrt{7}) = -(1 - 7) = 6$ ;

c)  $|x + y| : (x + y)^2 = |x + y| \cdot \frac{1}{|x + y|^2} = \frac{1}{|x + y|}$ .

## Exerciții și probleme






### Fixăm cunoștințele

- Fie mulțimile:
  - $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ;
  - $\mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$ ;
  - $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ;
  - $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ;
  - $\mathbb{R}^* \setminus \mathbb{Q}$ ;
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$ ;
  - $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ .
  - Aflați elementele mulțimii  $\{-1,4; \sqrt{5}; 7,(2); -21\frac{1}{4}; 0,18; 2010; \sqrt{21}\}$  care aparțin fiecăreia dintre mulțimile 1)–7).
  - Aflați cardinalele mulțimilor 1)–7), obținute după rezolvarea sarcinii a).
- Fie numerele  $12; \sqrt{16}; 3,(7); -38\frac{1}{2}; 2011; -\sqrt{13}; 0; 6\sqrt{5}; \pi$ . Determinați care dintre aceste numere sunt raționale și care – iraționale.
-  **Lucrați în perechi!**
  - Scrieți ca număr zecimal fracția:
    - $\frac{7}{8}$ ;
    - $\frac{51}{15}$ ;
    - $\frac{131}{27}$ ;
    - $\frac{210}{198}$ .
  - Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut la 1).
-  **Lucrați în perechi!** Bunicul le spune nepoților: „Am pentru voi 130 de nuci. Împărțiți-le în două părți, astfel încât partea mai mică, fiind mărită de 4 ori, să fie egală cu partea mai mare micșorată de 3 ori”. Cum să procedeze nepoții?

-  **Investigați!** Fie numerele:
  - $0,(3)$ ;
  - $2,1(6)$ ;
  - $5,(738)$ ;
  - $17,0(18)$ ;
  - $83,(685)$ ;
  - $70,13(18)$ .
 Determinați care dintre numerele zecimale periodice date sunt numere zecimale periodice simple și care sunt numere zecimale periodice mixte.
- Reprezentați pe axa numerelor punctele:
 
$$A(-7), B\left(\frac{1}{2}\right), C(-1,25), D\left(3\frac{1}{4}\right), E(7).$$
- Completați fiecare casetă cu un număr din mulțimea  $\left\{\frac{1}{4}; 0,75; 0,(3); 5,5\right\}$ , astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:
 
$$\frac{3}{4} = \square; \frac{1}{3} = \square; 0,25 = \square; 5\frac{1}{2} = \square.$$




### Formăm abilitățile și aplicăm

-  **Lucrați în grup!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația și determinați ce tip de numere, raționale sau iraționale, sunt soluțiile ei:
  - $3\sqrt{2}x + 7 = 0$ ;
  - $16x - 3(x+1) = 5x$ ;
  - $2,5(x-4) - 6x = 3 - x$ ;
  - $x^2 - 3x - 10 = 0$ ;
  - $2x^2 + 7x - 8 = 0$ ;
  - $-x^2 + 10x + 2 = 0$ .
-  **Lucrați în grup!** Explicitați modulul:
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 7\}$ ;
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 0\}$ ;
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\}$ ;
  - $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{5}\}$ .
- Reprezentați pe axa numerelor mulțimile obținute la exercițiul 12 în urma explicitării modulelor.
-  **Investigați!** Se dau două vase care au capacitatea de 5 l și, respectiv, 7 l. Cum putem obține 4 l de apă folosind doar aceste două vase?
 
-  **Lucrați în perechi!** Stafidele obținute în urma uscării strugurilor reprezintă 32% din cantitatea inițială a acestora. Din ce cantitate de struguri s-au obținut 8 kg de stafide?
- (\*EG, 2018). Din 3 l de lapte se obțin 600 g de brânză. Determinați câte kilograme de brânză se obțin din 5 l de lapte.

\*EG, 2018 – examenul de absolvire a gimnaziului din anul 2018.

## Dezvoltăm abilitățile și creăm

17.  **Investigați!** Cercetați dacă este rațional numărul:  
 a)  $\sqrt{8}$ ;                      b)  $7,2(15)$ ;                      c)  $1-\sqrt{5}$ ;  
 d)  $\sqrt{225}$ ;                      e)  $\sqrt{13}$ ;                      f)  $\sqrt{125}$ .
18. Construiți pe axa numerelor, cu ajutorul riglei și al compasului, punctul a cărui coordonată este numărul irațional:  
 a)  $\sqrt{13}$ ;                      b)  $\sqrt{17}$ ;                      c)  $-\sqrt{17}$ ;                      d)  $-\sqrt{11}$ .
19. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  
 a)  $|3x-7|=8$ ;                      b)  $|2x^2+17x+658|=-2\sqrt{19}$ ;  
 c)  $|x|\cdot|x-3|=4$ ;                      d)  $|2x(x-0,5)|=3$ .
20. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  
 a)  $|3x-1|=|1-x|$ ;                      b)  $|2+x|=|5x-3|$ ;  
 c)  $2|x|=|x-3|+2$ ;                      d)  $|2x-1|=|x+5|-2$ .

## § 2. Operații cu numere reale

### 2.1. Proprietăți ale operațiilor cu numere reale



#### Ne amintim

#### Proprietăți ale adunării și înmulțirii numerelor reale

##### 1° Asociativitatea:

$a+(b+c)=(a+b)+c$  pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

##### 2° Comutativitatea:

$a+b=b+a$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$a \cdot b = b \cdot a$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .

##### 3° 0 este element neutru pentru adunare:

$a+0=0+a=0$  pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ .

##### 1 este element neutru pentru înmulțire:

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$  pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ .

##### 4° Pentru orice număr real $a$ există opusul său, numărul $-a$ , astfel încât $a+(-a)=0$ .

Pentru orice număr real nenul  $a$  există inversul său, numărul  $\frac{1}{a}$ , astfel încât  $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ .

##### 5° —

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$  pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ .

##### 6° Distributivitatea înmulțirii față de adunare (scădere):

$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$  pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

#### Observații

- $a-b=a+(-b)$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- $a:b=a \cdot \frac{1}{b}$  pentru orice  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ .



#### Rețineți!

#### Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor în mulțimea $\mathbb{R}$

- Într-o expresie fără paranteze, cu operații de diferite ordine, se efectuează (în ordinea în care sunt scrise) întâi extragerea rădăcinii pătrate și ridicarea la putere, apoi înmulțirea și împărțirea și, la sfârșit, adunarea și scăderea.
- Într-o expresie cu paranteze se efectuează întâi operațiile din paranteze, respectându-se regulile precedente.

## 2.2. Compararea numerelor reale

- Comparați numerele:

a)  $\frac{2}{3}$  și  $\frac{3}{4}$ ;      b)  $\sqrt{2}$  și 1,3;      c)  $4 - \sqrt{5}$  și  $-3$ .

Rezolvare:

a) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$	→	deoarece $\frac{2}{3} = 0,6$ , $\frac{3}{4} = 0,75$ și $0,6 < 0,75$ ;
b) $\sqrt{2} > 1,3$	→	deoarece $\sqrt{2} \approx 1,4$ , iar $1,4 > 1,3$ ;
c) $4 - \sqrt{5} > -3$	→	deoarece $\sqrt{5} \approx 2,2$ ; deci $4 - \sqrt{5} > 0$ , iar $-3 < 0$ .

**Atenție!**

Oricare două numere reale pot fi comparate, adică oricare ar fi  $a, b \in \mathbb{R}$ , avem  $a < b$  sau  $a = b$ .

Dacă  $a = b$  sau  $a < b$  (sau  $a > b$ ), scriem  $a \leq b$  (sau  $a \geq b$ ).

**Aplicăm**

- Scrieți în ordine crescătoare numerele  $\sqrt{7}$ , 5,  $2\sqrt{2}$ ,  $-3$ .

Rezolvare:

Avem  $\sqrt{7} \approx 2,6$ ,  $2\sqrt{2} \approx 2,8$ .

Deci,  $2\sqrt{2} > \sqrt{7}$ .

Deoarece  $-3 < \sqrt{7} < 2\sqrt{2} < 5$ , obținem ordonarea cerută:  $-3, \sqrt{7}, 2\sqrt{2}, 5$ .



**Rețineți!**

Legătura dintre relația de ordine „ $\leq$ ” și operațiile de adunare și înmulțire în mulțimea  $\mathbb{R}$  se exprimă prin următoarele **proprietăți**:

1° Dacă  $a \leq b$  și  $c \in \mathbb{R}$ , atunci  $a + c \leq b + c$  pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

2° Dacă  $a \leq b$  și  $c \leq d$ , atunci  $a + c \leq b + d$  pentru orice  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

3° Dacă  $a \leq b$  și  $c > 0$ , atunci  $ac \leq bc$  pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

4° Dacă  $a \leq b$  și  $c < 0$ , atunci  $ac \geq bc$  pentru orice  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

5° Dacă  $a \leq b, c \leq d$  și  $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$ , atunci  $ac \leq bd$  și  $\frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$ .

**Observație**

Proprietăți similare pot fi obținute înlocuind semnul „ $\leq$ ” cu oricare dintre semnele „ $<$ ”, „ $\geq$ ”, „ $>$ ”.



**Rețineți!**

Numerele reale pot fi comparate folosind aproximările zecimale sau reprezentările acestora pe axa numerelor.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1.  **Lucrați în perechi!** Aduceți expresia la forma cea mai simplă:

a)  $3\sqrt{2}(2+\sqrt{2})-5(3,5-\sqrt{6})+11:(7-1,5)$ ;  
 b)  $\frac{2}{5} \cdot 0,25 + 78 : 4 - 8\sqrt{5} : \sqrt{5} - 3 \cdot 7\sqrt{2}$ .

2. Rotunjiți, utilizând calculatorul de buzunar, până la miimi:


a)  $\sqrt{7}$ ;    b)  $\sqrt{3}$ ;    c)  $2\sqrt{2}$ ;    d)  $3\sqrt{5}$ .

3. Comparați numerele:

a)  $\frac{5}{7}$  și  $\frac{3}{4}$ ;    b)  $\sqrt{7}$  și 2,65;  
 c)  $3-\sqrt{2}$  și 1,7;    d)  $1+\sqrt{3}$  și  $2+\sqrt{2}$ .

4. Scrieți în ordine crescătoare:

$3\sqrt{2}$ ;  $-3$ ;  $(56)$ ;  $2\sqrt{3}$ ;  $1+\sqrt{2}$ ;  $2$ ;  $(15)$ ;  $-2\frac{1}{5}$ ;  $2-\sqrt{5}$ .

5.  **Investigați!** Legumele crude (100 g) conțin 27 mg de acid ascorbic (vitamina C). Aceleași legume, dar fierte, conțin 18 mg de acid ascorbic. Calculați, în procente, pierderea vitaminei C în timpul fierberii.



6. Pentru a prepara o prăjitură de ciocolată (6 porții) se folosesc următoarele ingrediente: 250 g de unt, 200 g de zahăr, 300 g de ciocolată, 6 ouă și 3 linguri de făină. Care sunt cantitățile necesare pentru fiecare ingredient în cazul în care se prepară 4 porții?

7. a) Copiați și completați tabelul:

$a$	$b$	$c$	$a \cdot b$	$b \cdot a$	$a \cdot (b \cdot c)$	$(a \cdot b) \cdot c$	$a \cdot 1$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c} \cdot c$
5	-4	2							
$\frac{1}{3}$	6	-7							
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$5\sqrt{3}$							
0,3	$\frac{\pi}{3}$	$-\pi$							

- b) Numiți proprietățile înmulțirii utilizate la completarea tabelului.

8. a) Copiați și completați tabelul:

$x$	$y$	$z$	$x+y$	$y+x$	$x \cdot (y-z)$	$xy - xz$	$x^{-2} \cdot y^{-2} \cdot z^{-2}$	$(xyz)^{-2}$
$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$						
10	-0,25	$\frac{1}{4}$						
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$						
2,5	-9	$\sqrt{3}$						

- b) Numiți proprietățile operațiilor cu numere reale utilizate la completarea tabelului.



9. Pe eticheta unei sticlute cu mixtură este scris:  $40 \pm 3$  ml. Ce puteți spune despre cantitatea de mixtură din sticlută?
10. Scrieți ca sumă, diferență, produs și cât de două numere reale, diferite de 0 și 1, numărul:  
 a)  $3\sqrt{7}$ ;      b)  $8 + \sqrt{5}$ ;      c)  $-2\sqrt{3}$ ;      d)  $-7,5$ ;      e) 18;      f)  $\sqrt{6} - \sqrt{11}$ .

**Formăm abilitățile și aplicăm**

11. De câte ori la cel mai mare număr de o cifră trebuie adăugat cel mai mare număr de două cifre pentru a obține cel mai mare număr de trei cifre?
12. Suma, produsul și câtul căror numere reale sunt egale între ele?
13. Completați șirul: 12; 18; 27; 40,5; ■; ■.
14. Costul biletului pentru o călătorie cu vaporul este de 8,25 € pentru adulți și de 2,75 € pentru copii. Utilizând datele din imagine, calculați câți lei s-au plătit pentru călătorie, dacă în cursul valutar  $1 \text{ €} = 19,4$  lei.



15. Efectuați:  
 a)  $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$ ;      b)  $(2\sqrt{7} + 1)^2$ ;      c)  $(3 - \sqrt{7})^2$ ;      d)  $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})^2$ .
16. Efectuați:  
 a)  $(2 - \sqrt{3})^3$ ;      b)  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^3$ ;      c)  $(3\sqrt{5} + 1)^3$ ;      d)  $(2 + \sqrt{3})^3$ .
17. Calculați, utilizând calculatorul de buzunar, prin rotunjire până la sutimi:  
 a)  $3\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$ ;      b)  $7\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$ ;      c)  $-3\sqrt{2} - 5$ ;      d)  $3(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ .

18. **Investigați!** Stabiliți legitatea și aflați numărul omis:

$\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$	2	$11 - 4\sqrt{6}$
$1 + \sqrt{5}$	3	?

19. Prețul unui televizor s-a majorat cu 20%, apoi, peste o lună, cu încă 20%. Cu câte procente s-a majorat prețul inițial al televizorului?
20. **Lucrați în perechi!** Când a copiat exercițiul  $20 : 5 \cdot 2 + 6^2$ , un elev a uitat să pună paranteze. Restabiliți parantezele, dacă se știe că răspunsul trebuie să fie numărul:  
 a) 38;      b) 196;      c) 152.



**Dezvoltăm abilitățile și creăm**

21. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:  
 a)  $\sqrt{(2 - 3\sqrt{3})^2} + 2|3 - \sqrt{13}| - 7,5(4 - \sqrt{8})^2 + 6,4 : (5 - 1,8)$ ;  
 b)  $|7 - 2\sqrt{3}| + |1 - 3\sqrt{3}|^2 - 6(\sqrt{3} + 8) - \sqrt{(2 - 7\sqrt{3})^2}$ .
22. Efectuați:  
 a)  $(a - b + c)^2$ ;      b)  $(a - b - c)^2$ ;      c)  $(a + b + c)^2$ .
23. Calculați:  
 a)  $7, (15) + 2, (18) - 5, (23) + 11, (20)$ ;      b)  $-5, 2(7) + 6, 1(3) - 3, 5(3) + 2, (2)$ .
24. Scrieți numărul 34 000 ca diferența pătratelor a două numere naturale.

## § 3. Puteri și radicali

### 3.1. Rădăcina pătrată a unui număr real și proprietățile ei.

#### Recapitulare și completări



**Ne amintim**

- Calculați: a)  $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ ; b)  $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$ .

Rezolvare:

$$\text{a) } \sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \longrightarrow \text{deoarece } \frac{5}{2} \geq 0 \text{ și } \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4};$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{16-6\sqrt{7}} &= \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + 3^2} = \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2} = \\ &= |\sqrt{7}-3| = 3-\sqrt{7} \longrightarrow \text{deoarece } (3-\sqrt{7}) \geq 0 \text{ și } (3-\sqrt{7})^2 = 16-6\sqrt{7}. \end{aligned}$$

#### Definiție

**Rădăcina pătrată a unui număr real nenegativ  $a$**  (sau **radical de ordinul doi din  $a$** ) se numește numărul real nenegativ  $b$  al cărui pătrat este  $a$ .

Rădăcina pătrată a numărului real nenegativ  $a$  se notează  $\sqrt{a}$ .



**Rețineți!**

**Proprietăți ale rădăcinii pătrate**

1° Dacă  $a$  este un număr real, atunci  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

2° Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale nenegative, atunci  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ .

3° Dacă  $a$  este un număr real nenegativ, iar  $b$  – un număr real pozitiv, atunci  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ .

4° Dacă  $a$  este un număr real, iar  $b$  – un număr real nenegativ, atunci  $\sqrt{a^2b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ .

#### Aplicăm

- Calculați  $\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}$ .

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}} &= \sqrt{\frac{3,6}{3}} \cdot \sqrt{\frac{48}{10}} \longrightarrow \text{aplicăm proprietatea } 3^\circ \\ &= \sqrt{\frac{3,6 \cdot 48}{10 \cdot 3}} = \sqrt{0,36} \cdot \sqrt{16} \longrightarrow \text{aplicăm proprietatea } 2^\circ \\ &= 0,6 \cdot 4 = 2,4. \end{aligned}$$

- Completați casetele. Aduceți la forma cea mai simplă expresia  $\frac{3b^2}{5a} \cdot \sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}$ , dacă  $a < 0, b > 0$ .

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \frac{3b^2}{5a} \cdot \sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}} &= \frac{3b^2}{5a} \cdot \frac{\sqrt{50a^2}}{\sqrt{81b^2}} \longrightarrow \text{aplicăm proprietatea } \square \\ &= \frac{3b^2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{a^2}}{5a \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{b^2}} \longrightarrow \text{aplicăm proprietatea } \square \\ &= \frac{3b^2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot |a|}{5a \cdot 9 \cdot |b|} \longrightarrow \text{aplicăm proprietatea } \square \\ &= \frac{b^2 \cdot (-a) \cdot \sqrt{2}}{a \cdot 3b} = -\frac{b\sqrt{2}}{3} \longrightarrow \text{deoarece } a < 0, b > 0. \end{aligned}$$



**Investigăm**

- Raționalizați numitorul raportului: a)  $\frac{14}{3\sqrt{7}}$ ; b)  $\frac{3}{4-\sqrt{10}}$ .  
Rezolvare:

$\begin{aligned} \text{a) } \frac{14}{3\sqrt{7}} &= \frac{14 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \\ &= \frac{14\sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{2\sqrt{7}}{3}; \end{aligned}$	→ amplificăm raportul cu $\sqrt{7}$
$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3}{4-\sqrt{10}} &= \frac{3(4+\sqrt{10})}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})} = \\ &= \frac{3(4+\sqrt{10})}{16-10} = \frac{3(4+\sqrt{10})}{6} = \frac{4+\sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$	→ amplificăm raportul cu expresia conjugată numitorului: $4+\sqrt{10}$

**Definiție**

Expresiile  $a+\sqrt{b}$  și  $a-\sqrt{b}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$ , se numesc **expresii conjugate**.



**Rețineți!**

**Raționalizare a numitorului unui raport** se numește transformarea care elimină radicalii de la numitorul acestuia.

**Generalizăm**

- Fie  $E$  o expresie. Raționalizarea numitorului unui raport poate fi efectuată amplificând raportul de tipul:

1.  $\frac{E}{a\sqrt{b}}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ , cu  $\sqrt{b}$ ;
2.  $\frac{E}{a \pm \sqrt{b}}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}_+$ , cu expresia conjugată numitorului raportului dat.

**3.2. Puteri cu exponent întreg. Proprietăți**

- Calculați: a)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ ; b)  $(1,2)^0$ ; c)  $5^{-3}$ .

Rezolvare:

$\text{a) } \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81};$	→ $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$
$\text{b) } (1,2)^0 = 1;$	→ $a^0 = 1, a \in \mathbb{R}^*$
$\text{c) } 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$	→ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}^*$

**Definiția puterilor cu exponent întreg**

Pentru  $a \in \mathbb{R}^*$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ .

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}^*$ .  $a^0 = 1$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ .

Pentru  $a = 0$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0^n = 0$ .

**Observație**

Expresia  $0^0$  nu are sens.

**Rețineți!****Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg**Pentru  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

$$1^\circ a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad 2^\circ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad 3^\circ (ab)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$4^\circ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad 5^\circ (a^m)^n = a^{m \cdot n}.$$

**Aplicăm**

• Calculați  $\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4}$ .

Rezolvare:

$$\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4} = 3^{-3+2-4} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$$

• Aduceți la forma cea mai simplă  $\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3$ .

Rezolvare:

$$\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3 = \frac{2^{-2} \cdot a^{-4}}{5^{-2} \cdot b^{-10}} \cdot \frac{2^3 \cdot a^6}{5^3 \cdot b^9} = \frac{2^{-2+3} \cdot a^{-4+6}}{5^{-2+3} \cdot b^{-10+9}} = \frac{2a^2}{5b^{-1}} = \frac{2a^2b}{5}.$$

**Exerciții și probleme****Fixăm cunoștințele**

1. Calculați:

a)  $\sqrt{10 \cdot 40}$ ;      b)  $\sqrt{\frac{2}{32}}$ ;      c)  $\sqrt{0,16 \cdot 25 \cdot 1,69}$ ;  
d)  $\sqrt{3 \frac{1}{16}}$ ;      e)  $\sqrt{3^4}$ ;      f)  $\sqrt{\frac{2^6}{5^4}}$ .

2. **Investigați!** Aflați valorile numărului real  $a$  pentru care este adevărată egalitatea:

a)  $\sqrt{(a-2)^2} = a-2$ ;      b)  $\sqrt{\frac{a^2}{4}} = -\frac{a}{2}$ ;  
c)  $\sqrt{\frac{3}{a^2+2a+1}} = \frac{\sqrt{3}}{a+1}$ .

3. **Lucrați în perechi!** Introduceți factorul sub radical:

a)  $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ ;      b)  $a\sqrt{3}$ ,  $a < 0$ ;      c)  $(b-1)\sqrt{b}$ ,  $b \geq 1$ .

4. **Lucrați în perechi!** Scoateți factorul de sub radical:

a)  $\sqrt{48}$ ;      b)  $\sqrt{98}$ ;  
c)  $\sqrt{5a^4}$ ;      d)  $\sqrt{7(2-a)^2}$ ,  $a < 2$ .

5. Scrieți ca putere cu baza 10: 1000; 100; 10; 1;  $\frac{1}{10}$ ;  $\frac{1}{100}$ ; 0,0001.

6. Calculați:      a)  $\frac{3^{-4}}{3^{-7}}$ ;      b)  $5^{-11} \cdot 5^9$ ;  
c)  $\left(\frac{3}{11}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{-3}$ ;      d)  $6^2 \cdot 24^{-2}$ .

7. Efectuați:      a)  $2a^{-3} \cdot 5a^5$ ;      b)  $\frac{7x^{-3}}{28x^{-4}}$ ;  
c)  $\left(\frac{1}{2}b^{-3}\right)^{-2}$ ;      d)  $\left(\frac{1}{10}y^2\right)^{-3}$ .

**Formăm abilitățile și aplicăm**

8. Calculați:

a)  $10\sqrt{1,44} + \sqrt{48} - \sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{0,16}$ ;      b)  $\frac{1}{\sqrt{7-2}} - \frac{1}{\sqrt{7+2}}$ .

9. **Lucrați în grup!** Raționalizați numitorul raportului:

a)  $\frac{7}{3\sqrt{21}}$ ;      b)  $\frac{6}{5\sqrt{10}}$ ;      c)  $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ ;      d)  $\frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$ ;      e)  $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ .

10. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a)  $\sqrt{3}(\sqrt{12} - 2\sqrt{27})$ ;  
 b)  $\sqrt{48} - 2\sqrt{3}(2 - 5\sqrt{12})$ ;  
 c)  $(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$ ;  
 d)  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$ .

11. Simplificați raportul:

- a)  $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$ ;                      b)  $\frac{3 + \sqrt{a}}{3\sqrt{a} + a}$ ;  
 c)  $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 1}$ ;                         d)  $\frac{2\sqrt{7} - 7}{\sqrt{7}}$ .

14. Masa Soarelui este de aproximativ  $0,2 \cdot 10^{31}$  kg. De câte ori este mai mare masa Soarelui decât cea a Pământului, dacă se știe că masa Pământului este de aproximativ  $0,5974 \cdot 10^{25}$  kg?

15. Distanța medie de la Pământ la Soare este de  $0,1496 \cdot 10^9$  km. În cât timp o rază de lumină parcurge această distanță, dacă viteza luminii este de aproximativ  $0,3 \cdot 10^9$  m/s?

16. Calculați aria pătratului a cărui latură este egală cu:

- a)  $2\sqrt{5}$  cm;    b) 12 dm;    c)  $(1 + \sqrt{3})$  mm;    d)  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$  mm.

17. Calculați aria dreptunghiului cu dimensiunile:

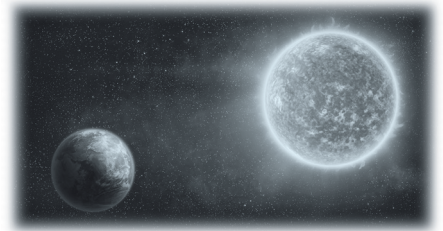
- a)  $(5 - \sqrt{2})$  cm și  $(5 + \sqrt{2})$  cm;                      b)  $(\sqrt{7} + 1)$  cm și  $(\sqrt{7} - 1)$  cm.

12. Calculați:

- a)  $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 32^{-2}}$ ;                      b)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-25} \cdot 25^{-6} \cdot 125^{-4}$ ;  
 c)  $\frac{20^{-4} \cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$ ;                                 d)  $\frac{(-3)^{-4} \cdot 27^{10}}{81^9 \cdot 9^{-6}}$ ;  
 e)  $(10^{-2} - 1)(10^{-2} + 1)$ ;                      f)  $\frac{(2^3)^5 \cdot (2^{-6})^2}{4^2}$ .

13.  **Lucrați în perechi!** Calculați:

- a)  $(2,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (8,4 \cdot 10^4)$ ;  
 b)  $(4,5 \cdot 10^{-2}) : (1,5 \cdot 10^{-3})$ ;  
 c)  $(3,6 \cdot 10^5) \cdot [(2,4)^{-1} \cdot 10^{-2}]$ ;  
 d)  $(6,4 \cdot 10^{-4}) : (1,6 \cdot 10^{-3})$ .



■ ■ ■ **Dezvoltăm abilitățile și creăm**

18. Calculați:

- a)  $\sqrt{2,5 \cdot 10^5}$ ;                      b)  $\sqrt{4,9 \cdot 10^{-3}}$ ;  
 c)  $\sqrt{1,6 \cdot 10^7}$ ;                      d)  $\sqrt{8,1 \cdot 10^{-5}}$ .

19. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a)  $\left(\sqrt{10 - \sqrt{19}} + \sqrt{10 + \sqrt{19}}\right)^2$ ;  
 b)  $\left(\sqrt{2\sqrt{5} + 4} - \sqrt{2\sqrt{5} - 4}\right)^2$ .

20.  **Investigați!**

- a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{6}} = 3$ ;  
 b)  $\sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ ;  
 c)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$ ;  
 d)  $2\sqrt{7} - 1 = \sqrt{29 - 4\sqrt{7}}$ .



21. Simplificați raportul ( $n \in \mathbb{N}$ ):

- a)  $\frac{2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{6^n}$ ;                                 b)  $\frac{14^n}{2^{n-2} \cdot 7^{n+2}}$ ;  
 c)  $\frac{12^n}{3^{n-1} \cdot 2^{2n+1}}$ ;                                 d)  $\frac{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-1}}{100^n}$ .

22. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

- a)  $\sqrt{8 - \sqrt{15}}$ ;  
 b)  $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$ ;  
 c)  $\sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{4 + \sqrt{7}}$ .

*Indicație.* Aplicați formulele radicalilor compuși:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

$$a, b, (a^2 - b) \in \mathbb{R}_+.$$

23.  **Lucrați individual! Investigație.** Puterile în diverse domenii.

## Exerciții și probleme recapitulative

### Fixăm cunoștințele

1. Efectuați:

- a)  $6,5 \cdot (1,2 - 4, (3)) - 9,9 : 3 + 7,4 \cdot 5 - 450$ ;  
 b)  $(7 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{3}) - 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 10(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ .

2.  **Lucrați în perechi!**


1) Scrieți ca număr zecimal fracția:

- a)  $\frac{16}{23}$ ;      b)  $\frac{28}{105}$ ;      c)  $\frac{65}{302}$ ;      d)  $\frac{178}{6004}$

2) Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut.

3. Comparați:

- a)  $\sqrt{7}$  și  $\sqrt{10}$ ;      b)  $\sqrt{63}$  și  $\sqrt{54}$ ;  
 c)  $\sqrt{23}$  și  $\sqrt{103}$ ;      d)  $\sqrt{17}$  și 4,5;  
 e)  $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$  și  $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$ ;      f)  $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$  și  $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$ .

8.  **Lucrați în perechi!** Dintr-un număr de două cifre, înmulțit cu un număr de o cifră, se scade un număr de o cifră și se obține 1. Care sunt aceste numere?

9. Alina avea o bancnotă de 50 de lei, una de 10 lei, două de 1 leu și 3 monede de 50 de bani. După ce a făcut cumpărături, i-au rămas 20% din întreaga sumă. Cât a cheltuit Alina?

4. Explicitați modulul:

- a)  $|7, (5)|$ ;      b)  $|-3\sqrt{7}|$ ;  
 c)  $|2 - 3\sqrt{2}|$ ;      d)  $|8 - \sqrt{66}|$ .

5. Scrieți în ordine crescătoare:

- a) 7,2(3);  $\sqrt{7}$ ;  $-3\sqrt{5}$ ; 7,1;  $\sqrt{19}$ ;  $\sqrt{25}$ .  
 b)  $4\sqrt{3}$ ;  $2\sqrt{10}$ ;  $5\sqrt{2}$ ; 7.

6. Utilizând calculatorul de buzunar, calculați rotunjind până la miimi:


- a)  $\sqrt{6}$ ;      b)  $\sqrt{11}$ ;      c)  $\sqrt{29}$ ;      d)  $\sqrt{37}$ .

7. Aduceți la forma cea mai simplă:

- a)  $a^8 \cdot (a^{-4})^3$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ;      b)  $(c^{-3} \cdot c^8)^{-2}$ ,  $c \in \mathbb{R}^*$ ;  
 c)  $\left(\frac{m^3}{m^{-5}}\right)^{-2} \cdot m^{-4}$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ ;      d)  $\left(\frac{3x^3}{x^{-2}}\right)^{-1}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .



### Formăm abilitățile și aplicăm

10.  **Lucrați în perechi!** Scrieți ca sumă, diferență, produs și cât de două numere reale, diferite de 0 și 1, numărul:

- a)  $-2\sqrt{11}$ ;      b)  $2 - \sqrt{3}$ ;  
 c)  $1 + 3\sqrt{7}$ ;      d)  $7\sqrt{13}$ .

11. Efectuați:

- a)  $(3 - 2\sqrt{5})^2$ ;      b)  $(2 + \sqrt{7})^2$ ;  
 c)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3$ ;      d)  $(5 + \sqrt{5})^3$ .

12. Calculați rotunjind până la zecimi soluțiile ecuației:

- a)  $3x^2 - x - 1 = 0$ ;      b)  $-x^2 + 5x - 1 = 0$ ;  
 c)  $4x^2 - x - 2 = 0$ ;      d)  $x^2 - 3x - 8 = 0$ .

13. Explicitați modulul:

- a)  $|1 - 3\sqrt{3}|$ ;      b)  $|-7 + \sqrt{16}|$ ;  
 c)  $|-(3 - \sqrt{5})|^2$ ;      d)  $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$ .

14.  **Lucrați în grup!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $|x^2 - 3x + 1| = 5$ ;      b)  $|2x^2 - x + 2| = 2$ ;  
 c)  $|4x^2 - 7| = 9$ ;      d)  $|x - 2x^2| = 3$ .

15. Comparați numerele:

- a)  $5 - 2\sqrt{3}$  ■  $2 + \sqrt{2}$ ;      b)  $6 + \sqrt{7}$  ■  $4\sqrt{7}$ .

16. Reprezentați pe axa numerelor mulțimea:

- a)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \sqrt{5}\}$ ;  
 b)  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < \sqrt{3}\}$ ;  
 c)  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 3| \geq 1,5\}$ .

17. Scrieți ca fracție numărul zecimal:


- a) 6,(7);      b) 15,(25);      c) 3,2(17);      d) 0,123(7).

18.  **Lucrați în perechi!** Aduceți la forma cea mai simplă:

- a)  $\sqrt{16x^2}$ , dacă  $x < 0$ ;  
 b)  $\sqrt{0,81a^2b^2}$ , dacă  $a > 0$ ,  $b < 0$ ;  
 c)  $\sqrt{24m^3n^2}$ , dacă  $n > 0$ ;  
 d)  $\sqrt{8x^4y^6}$ , dacă  $y < 0$ .

19. Calculați:

- a)  $\frac{6,6 \cdot 10^5}{1,1 \cdot 10^{-7}}$ ;      b)  $\frac{5,6 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-3}}$ ;      c)  $\frac{1,9 \cdot 10^{-5}}{3,8 \cdot 10^{-4}}$ .

20.  **Investigați!** Dintr-o foaie de tablă de formă pătrată s-a tăiat o fâșie cu lățimea de 25 cm. Aflați dimensiunile inițiale ale foii de tablă, dacă se știe că aria părții rămase după tăiere este de 4400 cm<sup>2</sup>.


21. Tatăl îi spune fiului: „10 ani în urmă eu eram de 10 ori mai în vârstă decât tine, iar peste 22 de ani voi fi numai de două ori mai în vârstă”. Câți ani are acum tatăl și câți fiul?

22. Calculați valoarea expresiei:

a) (EG, 2015)  $\frac{2^{23}}{4^3 \cdot 8^5}$ ;      b) (EG, 2017)  $\frac{2^3 \cdot 4^{-2}}{8^{-1}}$ ;      c) (EG, 2019)  $\frac{6^4 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 3^3}$ ;

d) (EG, 2021)  $\frac{4^8 + 25^0 - 1}{8^4}$ ;      e) (EG, 2023)  $\frac{9^{-3} \cdot 27}{3^{-4}}$ .



23.  **Investigați!** O cărămidă are masa de 1,5 kg și încă a unei jumătăți de aceeași cărămidă. Care este masa cărămizii?



24. Un pepene-verde are masa de 3,5 kg și încă a unei jumătăți de același pepene. Care este masa pepenelui?

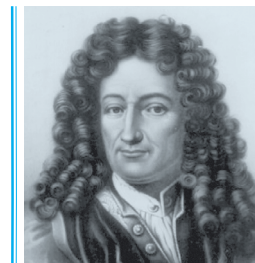
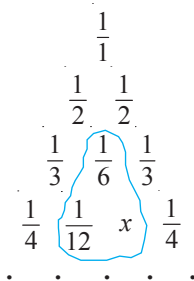
25. „Triunghiul de numere” al lui Leibniz se construiește astfel:

1) Laturile laterale sunt formate din inversele numerelor naturale

nenule  $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

2) Fiecare număr al unei linii este suma numerelor de pe linia următoare situate imediat sub el.

De exemplu:  $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + x$ .



**Gottfried Wilhelm Leibniz**  
(1646–1716), matematician german

a) Completați triunghiul până la linia care începe cu  $\frac{1}{10}$ .

b) Investigați și găsiți proprietăți interesante în cadrul „triunghiului de numere” al lui Leibniz. Navigați pe internet!

26. Calculați:

a) (EG, 2016)  $\frac{2}{\sqrt{7}-3} + \sqrt{7} + 4$ ;      b) (EG, 2022)  $\frac{2\sqrt{3}+9}{\sqrt{3}} - \sqrt{27}$ ;      c) (EG, 2018)  $\sqrt{75} - \sqrt{12} - \frac{9}{\sqrt{3}}$ .

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

27. Reprezentați geometric pe axa numerelor punctele:

$A(\sqrt{5}+1), B(2+\sqrt{3}), C(\sqrt{3}-\sqrt{2}), D(\sqrt{7}-4)$ .

28. Efectuați:

a)  $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$ ;      b)  $(2\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ .

29. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $|x|(|x|-3)=5$ ;

b)  $x^2-|x|-2=0$ ;

c)  $\sqrt{(3-x)^2}=3-|3-x|^2$ ;

d)  $(|x|-3)(|x|+5)-1=0$ ;

e)  $\sqrt{(x+4)^2}=5-|4+x|^2$ .

30. Aduceți la forma cea mai simplă:

a)  $(x^{-2}-y^{-2}):(x^{-1}+y^{-1}), x, y \in \mathbb{R}^*$ ;

b)  $(a+b)^{-2} \cdot (a^2-b^2), a, b \in \mathbb{R}^*$ .

31. Cu ce este egală:

a) diferența  $|a|-a, a \in \mathbb{R}$ ;

b) suma  $|a|+a, a \in \mathbb{R}$ ?

32. Demonstrați că:

a) produsul oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 6;

b) produsul a două numere pare consecutive este multiplu al lui 8.

33.  **Lucrați individual!**



**Proiect.** Numerele reale în viața mea.



Timpefectiv de lucru:  
45 de minute

## Test sumativ

### Varianta I

1. Fie  $A = \{-5; 0; 3; 2, (3); |\pi - 1|; 8; \sqrt{9}; \sqrt{7}\}$ .
  - a) Completați caseta: card  $A = \square$ .
  - b) Aflați:  $A \cap \mathbb{N}$ ;  $A \cap \mathbb{Z}$ ;  $A \cap \mathbb{Q}$ .
  - c) Ordonăți crescător elementele mulțimii  $A$ .
  - d) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

$$[18 : (-3)^3 - 7^{-2} \cdot 5, (4)] \cdot (x - 1) = \sqrt{9} - 2x.$$

2. Fie expresia
 
$$E = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{4})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{4})^2} - 2(\sqrt{5} - 2).$$
  - a) Aflați valoarea expresiei  $E$ .
  - b) Aflați inversul numărului obținut la a).
3. Alisia are o bancnotă de 100 de lei, două bancnote de 50 de lei, una de 20 de lei, trei de 10 lei și patru de 1 leu. După ce a achitat cumpărătura, Alisiei i-au rămas 12 % din suma inițială.
  - a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată:
 
$$\text{Suma inițială } \square \text{ } 210 \text{ lei.}$$
  - b) Calculați cât a cheltuit Alisia.
  - c) Aflați ce sumă ar trebui să cheltuiască Alisia, astfel încât să-i rămână 20 % din suma inițială.



### Varianta II

1. Fie  $B = \{-\sqrt{3}; |5 - \pi|; 0; \sqrt{16}; 3, (6); -\pi; 8\}$ .
  - a) Completați caseta: card  $B = \square$ .
  - b) Aflați:  $B \cap \mathbb{N}$ ;  $B \cap \mathbb{Z}$ ;  $B \cap \mathbb{Q}$ .
  - c) Ordonăți descrescător elementele mulțimii  $B$ .
  - d) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

$$[(-5)^2 : 8, (3) - 6^{-2} \cdot 18] \cdot (x - 1) = \sqrt{4} + 3x.$$

2. Fie expresia
 
$$E = \sqrt{(\sqrt{4} + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} - 2(\sqrt{5} - 1).$$
  - a) Aflați valoarea expresiei  $E$ .
  - b) Aflați inversul numărului obținut la a).
3. Amelia are o bancnotă de 200 de lei, două bancnote de 100 de lei, una de 50 de lei, patru de 5 lei și trei de 1 leu. După ce a achitat facturile de întreținere și utilități, Ameliei i-au rămas 20 % din suma inițială.
  - a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată:
 
$$\text{Suma inițială } \square \text{ } 620 \text{ de lei.}$$
  - b) Calculați cât a achitat Amelia pentru întreținere și utilități.
  - c) Aflați ce sumă ar trebui să plătească Amelia pentru întreținere și utilități, astfel încât să-i rămână 15 % din suma inițială.



# Rapoarte algebrice

*Esența matematicii nu este să faci lucrurile simple complicate, ci să faci lucrurile complicate simple.*

Stan Gudder

## § 1. Noțiunea de raport algebric



**Investigăm** 1 Observați, selectați și completați.

$$\frac{5}{3} \quad \frac{-2}{5} \quad \frac{9,5}{6} \quad \frac{0,4}{2} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{-4}{3} \quad \frac{4,2}{7} \quad \frac{2,6}{3,8} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{-0,3}{0,4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{6}{9,5}$$

- Următoarele rapoarte nu sunt fracții:  $\frac{9,5}{6}$ ,  $\frac{0,4}{2}$ ,  $\frac{4,2}{7}$ ,  $\frac{2,6}{3,8}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{-0,3}{0,4}$ .
- Numărătorul raportului  $\frac{4,2}{7}$  este  $\frac{4,2}{7}$ . Numitorul raportului  $-\frac{0,3}{0,4}$  este  $-\frac{0,3}{0,4}$ .
- Valoarea raportului  $\frac{3}{4}$  este 0,75, iar a raportului  $\frac{0,4}{2}$  este  $\frac{0,4}{2}$ .
- Rapoartele  $\frac{0,4}{2}$  și  $\frac{1}{5}$  sunt egale.

**Examinați și completați:**

a) Dacă  $\frac{a}{b} = 0,9$ , atunci  $\frac{2a+3b}{3b} = ?$

$$\frac{2a+3b}{3b} = \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{3b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} + 1 = \frac{2}{3} \cdot 0,9 + 1 = 0,6 + 1 = 1,6$$

Dacă  $\frac{a}{b} = 0,9$ , atunci numărul  $1,6$  este valoarea raportului  $\frac{2a+3b}{3b}$ .

b) Dacă  $a=2$ ,  $b=-1$ ,  $c=3$ , atunci valoarea expresiei  $a^2 + 5b + c$  este  $2^2 + 5 \cdot (-1) + 3 = 4 - 5 + 3 = 2$ .



**Rețineți!**

- ♦ **Expresiile algebrice** sunt formate din numere și litere (numite **variabile**), legate prin operațiile de adunare, scădere, înmulțire, ridicare la putere, extragere a rădăcinii pătrate.
- ♦ **Expresiile algebrice raționale** nu conțin variabile sub radical.

### Definiție

Raportul a două expresii algebrice raționale se numește **raport algebric** (sau **fracție algebrică**).

De exemplu, expresiile  $\frac{4}{x-2}$ ,  $\frac{x+y}{x^2+y}$ ,  $\frac{ab}{a-b}$ ,  $\frac{t-2}{t+4}$ ,  $\frac{z^2t}{z+5t}$  sunt rapoarte algebrice.

**3** Completați:

a) Pentru  $x=1$  și  $y=2$ , valoarea raportului algebric  $\frac{2x+y}{3x-y}$  este  $\frac{2 \cdot 1 + 2}{3 \cdot 1 - \square} = \frac{4}{\square} = \square$ .

b) Pentru  $a=0$ , valoarea raportului algebric  $\frac{a^2-2}{2-a}$  este  $\frac{0^2-2}{2-\square} = \frac{\square}{\square} = \square$ .

Valoarea raportului algebric  $\frac{a^2-2}{2-a}$  nu poate fi calculată pentru  $2-a=0$ , adică pentru  $a = \square$ .

Valoarea raportului algebric  $\frac{a^2-2}{2-a}$  poate fi calculată pentru orice  $a \in \mathbb{R} \setminus \{\square\}$ .



### Rețineți!

♦ **Domeniul valorilor admisibile** (se notează DVA), în mulțimea dată  $M$ , al unui raport algebric cu o variabilă este submulțimea lui  $M$ , în care nu se anulează numitorul raportului algebric, adică raportul algebric are sens.

♦ DVA în  $\mathbb{R}$  al raportului algebric  $\frac{a^2-2}{2-a}$  este  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Notăm cu  $F(x)$  un raport algebric cu variabila  $x$ . Dacă  $a \in \text{DVA}$  al raportului  $F(x)$ , atunci  $F(a)$  este valoarea raportului  $F(x)$  pentru  $x=a$ .

**4** Observați și completați:

Valoarea variabilei	Valoarea raportului algebric $\frac{1-x}{x+5}$	Valoarea raportului algebric $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$
1	$\frac{1-1}{1+5} = \frac{0}{6} = 0$	$\frac{1-1^2}{1^2+5 \cdot 1} = 0$
-2	$\frac{1-(-2)}{\square+5} = \square$	$\frac{-2-(-2)^2}{(-2)^2+5 \cdot \square} = \square$
3	$\frac{1-\square}{3+5} = \square$	$\frac{3-\square^2}{\square^2+5 \cdot \square} = -0,25$

DVA în  $\mathbb{R}$  al raportului  $\frac{1-x}{x+5}$  este  $\mathbb{R} \setminus \{\square\}$ , iar al raportului  $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$  este  $\mathbb{R} \setminus \{0; \square\}$ .

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

- Calculați valoarea expresiei algebrice  $2x^2 - 3x$  pentru:
  - $x=0$ ;
  - $x=-2$ ;
  - $x=0,5$ ;
  - $x=\frac{1}{6}$ .
- Calculați valoarea expresiei algebrice  $4ab - b^2 + a$  pentru:
  - $a=b=2$ ;
  - $a=3, b=-2$ ;
  - $a=-4, b=1,5$ ;
  - $a=\frac{3}{4}, b=\frac{4}{3}$ .
- Scrieți ca raport algebric:
  - $3x : (2x+5)$ ;
  - $(ax^2 + bx) : (a-b)$ ;
  - $(2x+4) : (x-3a)$ ;
  - $12x^5 : (7b-x^3)$ .

4.  **Investigați!** Selectați rapoartele algebrice:

a)  $\frac{2x-1}{3x}$ ,  $\frac{0,4x^2-\sqrt{x}}{x+1}$ ,  $\frac{3}{ax+2}$ ,  $\frac{5x}{-9y}$ ,  $\frac{7x}{4}$ ,  $\frac{\sqrt{2x-1}}{2x+1}$ ,  $\frac{y^2+5}{y^2-5}$ ,

b)  $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5x+3}}$ ,  $\frac{0,99a}{ax+4}$ ,  $\frac{y}{x}$ ,  $\frac{4}{\sqrt{x}}$ ,  $\frac{\sqrt{y}}{-x^2-9}$ .

5. Numiți numărătorul și numitorul raportului algebric:

a)  $\frac{0,9a^2+1}{2a-\sqrt{3}}$ ;      b)  $\frac{8}{-5x-3}$ ;      c)  $\frac{\sqrt{7+x^2}}{a^2x+8a}$ ;      d)  $\frac{8,(7)xy}{-7,(4)y^2-x}$ .

6. Aflați valoarea raportului algebric  $\frac{x^2+1}{x+1}$  pentru:

a)  $x=1$ ;      b)  $x=0$ ;      c)  $x=0,5$ ;      d)  $x=1\frac{1}{2}$ .

7. Aflați valoarea raportului algebric  $\frac{3x+2y}{2x-y}$  pentru:

a)  $x=y=1$ ;      b)  $x=4, y=2$ ;      c)  $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{2}$ ;      d)  $x=-0,8, y=0,4$ .

8.  **Lucrați în perechi!** Aflați domeniul valorilor admisibile al raportului algebric:

a)  $\frac{3a}{a-4}$ ;      b)  $\frac{x^2+2x}{3+x}$ ;      c)  $\frac{a+b}{2b+6}$ ;      d)  $\frac{a-b^2}{-8+0,6a}$ ;      e)  $\frac{5ax+3}{2x^2-18}$ ;      f)  $\frac{a^2+2ax+1}{0,36-a^2}$ .

### Formăm abilitățile și aplicăm

9. Aflați valoarea raportului algebric  $\frac{0,8x+1,2y}{x-y}$  pentru:


a)  $x=2y$ ;      b)  $y=2x$ ;      c)  $\frac{x}{y}=1,3$ ;      d)  $\frac{y}{x}=-0,4$ .

10. Fie raportul algebric  $F(x)=\frac{2x+1}{8-4x}$ . Comparați numerele:

a)  $F(0)$  și  $F(1)$ ;      b)  $F(-2)$  și  $F(-1)$ ;      c)  $F(0,5)$  și  $F(-0,5)$ ;      d)  $F(10)$  și  $F(-10)$ .

11. Fie raportul algebric  $F(x)=\frac{10-x^2}{x}$ .

- a) Ordonăți crescător numerele  $F(-3), F(-2), F(-1), F(1), F(2), F(3)$ .  
b) Ordonăți descrescător numerele  $F(-4), F(4), F(-0,5), F(0,5)$ .

12.  **Lucrați în grup!** Pentru care valori ale variabilei valoarea raportului algebric este număr întreg:

a)  $\frac{7}{x-2}$ ;      b)  $\frac{-5}{3-x}$ ;      c)  $\frac{9}{2+x}$ ;      d)  $\frac{-4}{x+10}$ ?

13. Aflați domeniul valorilor admisibile al raportului algebric:

a)  $\frac{x^2}{x^2-3}$ ;      b)  $\frac{t-1}{t^2+2t+1}$ ;      c)  $\frac{a+b^3}{b-\sqrt{2}}$ ;      d)  $\frac{xy}{x-y}$ .

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

14. Utilizând proprietățile rapoartelor, determinați pentru care valori ale variabilei sunt egale valorile rapoartelor algebrice:

a)  $\frac{8}{3-x}$  și  $\frac{4}{2+x}$ ;      b)  $\frac{5}{2x-1}$  și  $\frac{-10}{x+1}$ ;      c)  $\frac{\sqrt{12}}{3-3x}$  și  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{2x}}$ ;      d)  $\frac{-\sqrt{5}}{x}$  și  $\frac{\sqrt{10}}{x+1}$ .

15. Sunt oare egale în  $\mathbb{R}$  rapoartele:

a)  $\frac{x}{x^2+4}$  și  $\frac{x(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}$ ;      b)  $\frac{1}{x-1}$  și  $\frac{x+1}{x^2-1}$ ;      c)  $\frac{1}{x^2}$  și  $\frac{x}{x^3}$ ?

## § 2. Amplificarea și simplificarea rapoartelor algebrice

### 2.1. Amplificarea rapoartelor algebrice



**Investigăm** • Observați și completați:

$$\frac{2,4}{1,6} = 2,4 : 1,6 = \text{●}$$

$\times 2$  ↓ Amplificăm cu 2.

$$\frac{4,8}{3,2} = 4,8 : 3,2 = \text{●}$$

$$\frac{x+3}{x} \xleftarrow{\text{DVA}} \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\times (x-3)$  ↓ Amplificăm cu  $x-3$ .

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{\square^2 - 9}{x^2 - \square} \xleftarrow{\text{DVA}} \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$$

- Înmulțiți numărătorul și numitorul raportului algebric  $\frac{x+3}{x}$  cu expresia  $x-3$ .
- Comparați DVA al raportului obținut cu DVA al raportului  $\frac{x+3}{x}$ .
- Calculați valorile celor două rapoarte algebrice pentru:  $x=1$ ;  $x=-2$ ;  $x=5$ .  
Ce observați?



**Rețineți!**

- ♦ **A amplifică un raport algebric** cu o expresie algebrică rațională nenulă înseamnă a înmulți numărătorul și numitorul raportului cu expresia dată.
- ♦ Prin amplificarea unui raport algebric se obține un raport algebric egal cu cel dat în domeniul valorilor admisibile comune celor două rapoarte.

### 2.2. Simplificarea rapoartelor algebrice



**Investigăm** • Observați și completați:

$$\frac{0,9}{1,5} = 0,9 : 1,5 = \text{●}$$

$: 3$  ↓ Simplificăm cu 3.

$$\frac{\square}{0,5} = \square : 0,5 = \text{●}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} \xleftarrow{\text{DVA}} \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$$

$: (x+1)$  ↓ Simplificăm cu  $x+1$ .

$$\frac{\square}{x} \xleftarrow{\text{DVA}} \mathbb{R} \setminus \{\square\}$$

- Împărțiți numărătorul și numitorul raportului algebric  $\frac{3x^2 - x}{x^2 - 1}$  la expresia  $x-1$ .  
(Considerăm  $x-1 \neq 0$ .)
- Comparați DVA al raportului obținut cu DVA al fracției  $\frac{3x^2 - x}{x^2 - 1}$ .
- Calculați valorile celor două rapoarte algebrice pentru:  $x=0$ ;  $x=2$ ;  $x=-3$ .  
Ce observați?



**Rețineți!**

- ♦ **A simplifică un raport algebric** cu o expresie algebrică rațională nenulă înseamnă a împărți (fără rest) numărătorul și numitorul raportului la expresia dată.
- ♦ Prin simplificarea unui raport algebric se obține un raport algebric egal cu cel dat în domeniul valorilor admisibile comune celor două rapoarte.
- ♦ DVA al raportului algebric obținut în urma simplificării unui raport algebric poate fi diferit de DVA al raportului dat.

### Definiții

- ◆ Raportul algebric se numește **reductibil** dacă el poate fi simplificat.
- ◆ Raportul algebric se numește **ireductibil** dacă el nu poate fi simplificat.

### Exemplu

Raportul algebric  $\frac{x(x-2)}{x^2-4}$  este reductibil (Argumentați!), iar raportul  $\frac{x}{x+2}$  – ireductibil.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1. Amplificați fracția:

- a)  $\frac{2}{5}$  cu 3;                      b)  $\frac{4}{9}$  cu 5;  
 c)  $-\frac{3}{7}$  cu 4;                      d)  $-\frac{5}{6}$  cu 6.

2. Amplificați raportul:

- a)  $\frac{1,8}{3}$  cu 2,5;                      b)  $-\frac{2,1}{4,4}$  cu 3;  
 c)  $-\frac{3,5}{6,8}$  cu 1,6;                      d)  $\frac{0,7}{1,9}$  cu 8.

3. Amplificați raportul algebric:

- a)  $\frac{x}{y}$  cu  $x$ ;                      b)  $\frac{y}{x-1}$  cu  $y$ ;  
 c)  $\frac{ab}{2+a}$  cu  $b$ ;                      d)  $\frac{x-1}{x+1}$  cu  $x-1$ .

4. Simplificați fracția:

- a)  $\frac{24}{36}$ ;      b)  $\frac{96}{216}$ ;      c)  $\frac{81}{189}$ ;      d)  $\frac{180}{216}$ .

5. Simplificați raportul:

- a)  $\frac{2,8}{3,6}$  cu 4;                      b)  $\frac{3,25}{5,5}$  cu 2,5;  
 c)  $\frac{-10,08}{11,34}$  cu 1,8;                      d)  $\frac{15,68}{25,56}$  cu 3,2.

6.  **Lucrați în perechi!** Simplificați raportul algebric:

- a)  $\frac{5x^3y}{10xy^2}$  cu  $5xy$ ;                      b)  $\frac{-3x^5y^6}{9x^3y^8}$  cu  $3x^3y^6$ ;  
 c)  $\frac{2x^3-x^2y}{4x^2-y^2}$  cu  $2x-y$ ;                      d)  $\frac{9x^2+12xy+4y^2}{21xy+14y^2}$  cu  $2y+3x$ .

### Formăm abilitățile și aplicăm

7. Restabiliți șirul de rapoarte egale:

- a)  $\frac{3}{4} = \frac{\square}{12} = \frac{0,3}{\square} = \frac{\square}{11,2} = \frac{-16,8}{\square}$ ;                      b)  $\frac{5}{8} = \frac{11}{\square} = \frac{\square}{12,8} = \frac{-32}{\square} = \frac{\square}{-28}$ .

8. Restabiliți șirul de rapoarte algebrice egale:

- a)  $\frac{x-1}{xy} = \frac{\square}{x^2y} = \frac{xy-y}{\square} = \frac{\square}{0,5x^3y+xy}$ ;                      b)  $\frac{x+y}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{\square} = \frac{\square}{7y-7x} = \frac{3y^2-3x^2}{\square}$ .

9.  **Lucrați în grup!** Utilizând proprietățile rapoartelor, determinați valorile variabilei pentru care sunt egale rapoartele algebrice:

- a)  $\frac{x+1}{x-1}$  și  $\frac{x^2+x}{x^2-x}$ ;      b)  $\frac{2+x}{4-x^2}$  și  $\frac{-1}{x-2}$ ;      c)  $\frac{2x+3}{2x-3}$  și  $\frac{-4x^2-12x-9}{9-4x^2}$ ;      d)  $\frac{x}{x-1}$  și  $\frac{x^3+x}{x^3-x^2+x-1}$ .

10. Simplificați raportul algebric, astfel încât să obțineți un raport algebric ireductibil:

- a)  $\frac{3(x+2)}{x^2+4x+4}$ ;      b)  $\frac{4a^2-4b^2}{2(b+a)^2}$ ;      c)  $\frac{y^2-x^2}{x^2-yx}$ ;      d)  $\frac{4x^2-4bx+b^2}{0,25b^2-x^2}$ .

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

11. Se știe că  $\frac{x+y}{y} = 10$ . Aflați  $\frac{x^2-y^2}{y^2}$ .



### Matematică distractivă

12. Care este prima cifră a celui mai mic număr natural care are proprietatea: suma cifrelor lui este egală cu 2007?

## § 3. Operații aritmetice cu rapoarte algebrice.

### Puterea cu exponent natural a unui raport algebric

#### 3.1. Adunarea și scăderea rapoartelor algebrice



**Investigăm** • Observați și completați adecvat:

$$\frac{3}{14} + \frac{2}{7} = \frac{3+4 \cdot \square}{14} = \frac{\square}{14}$$

$$\frac{2}{9} - \frac{3}{6} = \frac{2 \cdot 2 - 5 \cdot 3}{18} = -\frac{\square}{18}$$

$$3 - \frac{8}{9} = \frac{\square}{1} - \frac{8}{9} =$$

$$= \frac{3 \cdot 9 - 8}{\square} = \frac{\square}{9} = \frac{\square}{9}$$

$$\frac{a}{2b^2} + \frac{b-a}{2b^2} = \frac{a+b-a}{2b^2} = \frac{\square}{\square}$$

$$x) \frac{x-1}{3x} + \frac{2}{x^2} = \frac{x(x-1)+2 \cdot \square}{3x^2} = \frac{\square}{3x^2}$$

$$y^{-1}) \frac{y-1}{y+1} - \frac{y+1}{y-1} = \frac{(y-1)^2 - (y+1)^2}{(y+1)(y-1)} =$$

$$= \frac{y^2 - 2y + 1 - (y^2 + \square + 1)}{\square^2 - 1} = \frac{\square}{\square^2 - 1}$$

#### Reguli de adunare și scădere a rapoartelor algebrice

1. **Suma a două rapoarte algebrice cu același numitor** este un raport algebric cu numărătorul egal cu suma numărătorilor, iar numitorul coincide cu numitorii rapoartelor date.
2. Pentru a **aduna două rapoarte algebrice cu numitori diferiți**, se aduc rapoartele la același numitor, apoi se aplică regula 1.
3. Pentru a **scădea două rapoarte algebrice**, se adună descăzutul cu opusul scăzătorului.



**Rețineți!**

Adunarea rapoartelor algebrice posedă aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor reale (asociativitatea, comutativitatea etc.).

#### 3.2. Înmulțirea și împărțirea rapoartelor algebrice



**Investigăm** • Observați și completați adecvat:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{11} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 11} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{12} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 12} = \frac{5}{8 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{21}{16} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{16} \cdot \frac{\square}{7} =$$

$$= \frac{21 \cdot \square}{16 \cdot 7} = \frac{3 \cdot \square}{\square \cdot 1} = \frac{\square}{\square}$$

$$1 \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{6} =$$

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{3 \cdot \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{2y-1}{y+3} \cdot \frac{(y+3)^2}{2y} = \frac{(y+3)^2(2y-1)}{(y+3) \cdot 2y} =$$

$$= \frac{\square(y+3)}{2y} = \frac{2y^2 + \square y - 3}{2y}$$

$$\frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{(a^2 - ab) \cdot b^2}{ba} =$$

$$\frac{(a^2 - ab) \cdot \square}{a} = \frac{\square(a-b) \cdot \square^a}{a} = (a-b) \square$$

$$\frac{x^2 - y^2}{3x^2y^2} \cdot \frac{x+y}{xy} = \frac{x^2 - y^2}{3x^2y^2} \cdot \frac{\square}{x+y} =$$

$$= \frac{(x+y)(\square)}{3(\square)^2 \cdot (x+y)} = \frac{\square}{3 \square}$$

 Observați și completați adecvat:

• Inversa fracției  $\frac{3}{7}$  este fracția  $\frac{7}{3}$ .

• Inversa fracției  $4\frac{1}{5}$  este fracția  $\frac{5}{\square}$ .

• Inversul raportului algebric  $\frac{x-1}{x}$  este  $\frac{x}{x-1}$ .

• Inversul raportului algebric  $\frac{8}{x^2-y}$  este  $\frac{\square}{\square}$ .

### Reguli de înmulțire și împărțire a rapoartelor algebrice

1. Pentru a **înmulți două rapoarte algebrice**, se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.
2. Pentru a **împărți două rapoarte algebrice**, se înmulțește deîmpărțitul cu inversul împărțitorului.
3. Dacă raportul algebric obținut este reducibil, atunci el se simplifică până se obține un raport ireducibil.



**Rețineți!**

Înmulțirea rapoartelor algebrice posedă aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor reale (asociativitatea, comutativitatea, distributivitatea înmulțirii față de adunare/scădere).

### 3.3. Puterea cu exponent natural a unui raport algebric



**Investigăm**

• Observați și completați adecvat:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3^2}{8^2} = \frac{\square}{64}$$

$$\left(\frac{5^2 \cdot 2^3}{0,1}\right)^2 = \frac{5^{2 \cdot \square} \cdot 2^{3 \cdot 2}}{0,1^{\square}} =$$

$$= \frac{5^{\square} \cdot 2^{\square}}{\square} = \square$$

$$\left(\frac{x^3 y}{x-1}\right)^2 = \frac{x^{3 \cdot \square} \cdot y^{\square}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{a^2}{2b^3} \cdot \frac{a^3}{b^4} = \frac{a^2 \cdot a^3}{2b^3 \cdot b^4} = \frac{a^{\square}}{2b^{\square}}$$

$$\left(\frac{2x^3 - 5y + 1}{3x - 8y^2}\right)^0 = \square$$

### Regula de ridicare a unui raport algebric la o putere cu exponent natural

Pentru a **ridica un raport algebric la o putere cu exponent natural**, se ridică la această putere numărătorul și numitorul raportului.



**Rețineți!**

În calculul cu puteri cu exponent natural ale rapoartelor algebrice se aplică aceleași proprietăți ca și în calculul cu puteri cu exponent natural ale numerelor reale.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1. Calculați:

a)  $\frac{7}{12} + \frac{5}{12}$ ;

b)  $\frac{21}{14} - \frac{9}{14}$ ;

c)  $\frac{29}{47} + \left(-\frac{31}{47}\right)$ ;

d)  $-\frac{25}{39} - \left(-\frac{18}{39}\right)$ .

2. Calculați:

a)  $\frac{5}{8} + \frac{3}{4}$ ;

b)  $-\frac{11}{12} + \frac{11}{20}$ ;

c)  $\frac{8}{9} - \frac{8}{15}$ ;

d)  $\frac{7}{16} - \left(-\frac{11}{12}\right)$ ;

e)  $-\frac{14}{21} + \left(-\frac{15}{28}\right)$ .

3. Efectuați:

a)  $\frac{3}{xy} + \frac{10}{xy}$ ;      b)  $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a-b}$ ;      c)  $\frac{12x}{x^2+1} - \frac{8x}{x^2+1}$ ;      d)  $\frac{4y^3}{x-y^2} + \frac{3xy+y^3}{y^2-x}$ .

4. Efectuați:

a)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ;      b)  $\frac{6}{xy} + \frac{2}{x}$ ;      c)  $\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2} - \frac{x-a}{x+a}$ ;      d)  $\frac{5}{2x^3+2x} - \frac{1}{2x}$ .

5. Calculați:

a)  $\frac{12}{17} \cdot \frac{3}{5}$ ;      b)  $\frac{9}{10} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right)$ ;      c)  $-\frac{15}{22} \cdot \frac{2}{5}$ ;      d)  $-\frac{8}{27} \cdot \left(-\frac{9}{16}\right)$ .

6. Efectuați:

a)  $\frac{x}{y} \cdot \frac{3x}{y^2}$ ;      b)  $\frac{5x^2y}{y-1} \cdot \frac{2xy}{y+1}$ ;      c)  $\frac{4(x+1)}{x-2} \cdot \frac{x-1}{x-2}$ ;      d)  $\frac{8y}{7xy+7x} \cdot \frac{y+1}{y}$ .

7. Calculați:

a)  $\frac{33}{40} \cdot \frac{3}{10}$ ;      b)  $-\frac{25}{32} \cdot \frac{5}{8}$ ;      c)  $\frac{27}{60} \cdot \left(-\frac{9}{15}\right)$ ;      d)  $-\frac{84}{287} \cdot \left(-\frac{21}{41}\right)$ .

8. Precizați inversul raportului algebric:

a)  $\frac{3x}{4y}$ ;      b)  $\frac{ax-b}{b+ay}$ ;      c)  $\frac{7x-5}{3x^2}$ ;      d)  $\frac{4y}{25-x^2}$ .

9.  **Lucrați în perechi!** Efectuați:

a)  $\frac{ab^2}{xy} \cdot \frac{b}{x}$ ;      b)  $-\frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x+1}{x+2}$ ;      c)  $\frac{x^2+2x}{xy+2x} \cdot \left(-\frac{x+2}{2+y}\right)$ ;      d)  $\frac{4x-16}{x+3} \cdot \frac{4xy-16y}{8x^2+24x}$ .

10. Efectuați ridicarea la putere:

a)  $\left(\frac{6}{7}\right)^2$ ;      b)  $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$ ;      c)  $\left(\frac{4}{5}\right)^4$ ;      d)  $\left(\frac{3^4 \cdot 5^3}{2^5}\right)^2$ .

11. Efectuați:

a)  $\left(\frac{xy}{3a}\right)^3$ ;      b)  $\left[\frac{x(x+y)}{x-y}\right]^2$ ;      c)  $\left(\frac{x^2a}{y^5b^3}\right)^3$ ;      d)  $\left[\frac{2(x-1)}{3a+b}\right]^2$ .

### Formăm abilitățile și aplicăm

12.  **Lucrați în grup!** Efectuați:

a)  $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$ ;      b)  $\frac{3x+2}{x^2+2x+1} - \frac{4}{x+1}$ ;      c)  $\frac{-3(x+a)}{ax+ay} + \frac{3x}{x^2+xy}$ .

13. Scrieți sub formă de raport algebric: a)  $\frac{x-y}{x+y} + 1$ ;      b)  $x+y - \frac{x^2+y^2}{x+y}$ .

14. Aflați valoarea raportului algebric  $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2+1}$  pentru:

a)  $x=1+\sqrt{2}$ ,  $y=\sqrt{2}-1$ ;      b)  $x=\sqrt{5}-2$ ,  $y=\sqrt{5}+2$ .

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

15. Demonstrați că:

a)  $\left(\frac{2a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} + \frac{1}{a+2}\right) \cdot \frac{a-6}{4(a+2)} = \frac{4}{a-2}$ ;      b)  $\frac{a^2-1}{a^2+1} \cdot \left(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) \cdot \frac{a^2+2a+1}{1-a^2} = \frac{1-a}{a+1}$ .

16. Compuneți un raport algebric cu variabilele  $x$  și  $y$ , a cărui valoare este egală cu:

a)  $-\frac{2}{5}$  pentru  $x=y=1$ ;      b)  $0,8$  pentru  $x=y=-1$ ;  
c)  $\sqrt{5}$  pentru  $x=1$  și  $y=-1$ ;      d)  $0$  pentru  $x=2$  și  $y=3$ .

## § 4. Transformări identice ale expresiilor algebrice



### Ne amintim

- Determinați dacă egalitatea  $(x-1)^2 - (x+1)^2 - 4 = x^2 - (x+2)^2$  este o identitate.

*Rezolvare:*

Transformăm partea stângă a egalității:

$$(x-1)^2 - (x+1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 - 4 = -4(x+1).$$

Transformăm partea dreaptă a egalității:

$$x^2 - (x+2)^2 = x^2 - x^2 - 4x - 4 = -4(x+1).$$

Obținem  $-4(x+1) = -4(x+1)$ , adică egalitatea este adevărată pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Deci, egalitatea este o identitate în mulțimea  $\mathbb{R}$ .

- Fie rapoartele algebrice  $\frac{1-x}{x+5}$  și  $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$ .

a) Aflați DVA al rapoartelor.

b) Determinați dacă egalitatea  $\frac{1-x}{x+5} = \frac{x-x^2}{x^2+5x}$  este o identitate în DVA al rapoartelor.

*Rezolvare:*

a) În §1 am determinat că DVA al rapoartelor  $\frac{1-x}{x+5}$  și  $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$  este mulțimea  $\mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$ .

b) Transformăm în DVA partea dreaptă a egalității:

$$\frac{x-x^2}{x^2+5x} = \frac{x(1-x)}{x(x+5)} = \frac{1-x}{x+5}.$$

Deci, rapoartele  $\frac{1-x}{x+5}$  și  $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$  sunt egale pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$ .

Adică, egalitatea  $\frac{1-x}{x+5} = \frac{x-x^2}{x^2+5x}$  este o identitate în mulțimea  $\mathbb{R} \setminus \{-5; 0\}$ .

### Definiții

- ◆ Două rapoarte algebrice cu aceleași variabile se numesc **egale** în mulțimea  $M$ , dacă:
  - mulțimea  $M$  aparține fiecărui DVA al rapoartelor;
  - ele au valori egale pentru orice valori ale variabilelor din  $M$ .
- ◆ Dacă  $E_1$  și  $E_2$  sunt două expresii algebrice cu aceleași variabile și dacă valorile lor sunt egale pentru orice valori ale variabilelor lor din domeniul valorilor admisibile ale celor două expresii, atunci expresiile  $E_1$  și  $E_2$  se numesc **identice egale** în acest domeniu, iar scrierea  $E_1 = E_2$  se numește **identitate**.
- ◆ Transformarea expresiei într-o expresie identică cu ea se numește **transformare identică**.



### Rețineți!

Identitățile se demonstrează utilizând următoarele modalități:

- 1) Se efectuează transformări identice cu partea stângă a egalității. Dacă la rezultat obținem partea dreaptă, atunci identitatea este demonstrată.
- 2) Se efectuează transformări identice cu partea dreaptă a egalității. Dacă la rezultat obținem partea stângă, atunci identitatea este demonstrată.
- 3) Se efectuează transformări identice atât cu partea stângă, cât și cu partea dreaptă. Dacă se obține același rezultat, atunci identitatea este demonstrată.
- 4) Se scade partea stângă din partea dreaptă, sau partea dreaptă din partea stângă. Dacă la rezultat se obține zero, atunci identitatea este demonstrată.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1. Fie expresia  $\left(2 - \frac{1}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{5x+5}$ . Indicați litera care corespunde expresiei identic egale cu expresia dată.

A.  $\frac{5}{2x-3}$ ;      B.  $\frac{2x-3}{5}$ ;      C.  $\frac{2x+3}{5}$ ;      D.  $\frac{5}{2x+3}$ .

2. Efectuați în DVA transformările identice și aduceți expresia la forma cea mai simplă:

a)  $\frac{x}{x-3} : \frac{1}{x^2-9}$ ;      b)  $\left(\frac{t-n}{n-t}\right) \cdot \frac{2nt}{t^2-n^2}$ ;      c)  $\frac{m+1}{m} \cdot \frac{m^2}{(m+1)^2}$ .

3.  **Investigați!** Adevărat sau fals?

a) Egalitatea  $(x-y)^2 = (y-x)^2$  este o identitate.

b) Egalitatea  $\frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$  este o identitate.

c)  $1 - \frac{x}{x+y} = \frac{2y}{x+y}$ , pentru  $x \neq -y$ .



4.  **Lucrați în perechi!** Efectuați în DVA transformările identice:

a)  $\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1}$ ;      b)  $1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$ ;      c)  $\left(\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1}{(x-2)^2}$ .

5. Fie egalitatea  $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+1)^2}$ .

a) Determinați dacă egalitatea este o identitate în DVA.

b) Pentru care valori ale lui  $x$  egalitatea este adevărată?

### Formăm abilitățile și aplicăm

6. Determinați dacă sunt identic egale expresiile  $\frac{3m}{m-4} - \frac{m+2}{2m+8} \cdot \frac{m^2-16}{m+2}$  și  $\frac{3m}{2(m-4)}$ .

7. Efectuați în DVA transformările identice și aduceți expresia la forma cea mai simplă.

a)  $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1}\right) : \left(1 + \frac{1}{x^3-1}\right)$ ;      b)  $\frac{a^3-b^3}{2a^2b^2} \cdot \frac{8ab}{a^2+ab+b^2} - \frac{a-b}{ab}$ .

8. Demonstrați identitatea:

a)  $(t-1)(t+1)(t^2+1)(t^4+1) = t^8 - 1$ ;      b)  $\left(\frac{a}{a+3} + \frac{a}{a-3} + \frac{a^2}{9-a^2}\right) : \frac{a-5}{a^2-9} = \frac{a^2}{a-5}$ .

9. Aduceți la forma cea mai simplă:

a)  $\frac{4t^2-8t+3}{4t^2-1}$ ;      b)  $\frac{a^2+3a}{a^2-3a-18}$ ;      c)  $\frac{9a^2+6ab+b^2}{9a^2-b^2}$ ;      d)  $\left(\frac{t+2}{3t} - \frac{2}{t-2} - \frac{t-14}{3t^2-6t}\right) : \frac{t+2}{6t} \cdot \frac{1}{t-5}$ .

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

10. Fie expresia: 1)  $\frac{5}{x^2+16} - \frac{x^3}{16-4|x|}$ ; 2)  $\frac{3}{x^2-25} + \frac{x}{20+4|x|}$ .

a) Aflați DVA al expresiei.

b) Aduceți în DVA expresia la forma cea mai simplă.

11. Rezolvați în DVA ecuația  $\frac{2|x|+1}{x^2+|x|+1} - \frac{4(x^2+|x|+1)}{1+2|x|} + 3 = 0$ .

12. Fie expresia  $E(x) = \frac{x^2+3x-5}{x+4}$ .

a) Scrieți expresia în forma  $E(x) = ax + b + \frac{c}{x+4}$ , unde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

b) Aflați coeficienții  $a, b, c$ .

## Exerciții și probleme recapitulative

### Fixăm cunoștințele

1.  **Investigați!** Selectați rapoartele algebrice:

a)  $\frac{3x-\sqrt{x}}{2x}$ ,  $\frac{9x+\sqrt{8}}{2x+y}$ ,  $\frac{\sqrt{3}x}{5}$ ,  $\frac{9x^2+bx+c}{a-b}$ ,  $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ ,  $\frac{ax+y}{2\sqrt{3+x^2}}$ ;

b)  $\frac{x}{y}$ ,  $\frac{2}{x}$ ,  $\frac{5-x^2}{\sqrt{y+x}}$ ,  $\frac{\sqrt{20-x^2}}{\sqrt{5-x}}$ ,  $\frac{0,7xy}{0,2ab}$ ,  $\frac{(1+xy)^2}{(1-xy)^2}$ .

2. Aflați valoarea raportului algebric  $\frac{5-4xy}{x^2+1}$  pentru:

a)  $x=y=0$ ;

b)  $x=-1$ ,  $y=1$ ;

c)  $x=0$ ,  $y=-1$ ;

d)  $x=2$ ,  $y=-1$ .

3.  **Lucrați în perechi!** Aflați domeniul valorilor admisibile al raportului algebric:

a)  $\frac{y-1}{-3-0,3x}$ ;

b)  $\frac{5x-9}{-4x^2+16}$ ;

c)  $\frac{x-y}{x^2+x}$ ;

d)  $\frac{15y}{2x^3-x^2}$ .

4. Amplificați raportul algebric:

a)  $\frac{x+3}{2x-1}$  cu  $2x+1$ ;

b)  $\frac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}}$  cu  $x+\sqrt{7}$ ;

c)  $\frac{x-y}{3x-y}$  cu  $3x+y$ ;

d)  $\frac{4x-y}{y+4x}$  cu  $y+4x$ .

5. Simplificați raportul algebric până la un raport ireductibil:

a)  $\frac{3x+9}{x^2+6x+9}$ ;

b)  $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$ ;

c)  $\frac{a^2-ax}{x^2-a^2}$ ;

d)  $\frac{x^2-4}{2x-x^2}$ .

6. Efectuați:

a)  $\frac{1}{x^2y} + \frac{2}{xy^2}$ ;

b)  $\frac{5}{x-2y} - \frac{3}{x+2y}$ ;

c)  $\frac{x-1}{2x-6} + \frac{1}{3-x}$ ;

d)  $\frac{5}{x^2-16} - \frac{7}{x-4}$ .

7. Efectuați:

a)  $\frac{(x+1)^3}{(x-2)^4} \cdot \frac{(x-2)^3}{x+1}$ ;

b)  $\frac{xy^2}{x+y} \cdot \frac{(x+y)^2}{xy}$ ;

c)  $\frac{3ab}{25yx^4} \cdot \frac{15x^2y^2}{18a^2b^3}$ ;

d)  $\frac{\sqrt{3}a^2x}{1,2yz^2} \cdot \frac{\sqrt{12}y^2}{5a}$ .

8. Efectuați:

a)  $\frac{3x-6}{3x-1} \cdot \frac{xy-2y}{9x^2-1}$ ;

b)  $\frac{2-x}{3x+12} \cdot \frac{x^2-4}{4x+x^2}$ ;

c)  $\frac{ab^3}{6-6x} \cdot \frac{x^2-2x+1}{a^3b^3}$ ;

d)  $\frac{3ab}{ax+3x} \cdot \frac{6ba^2}{9+6a+a^2}$ .

9. Aduceți la forma cea mai simplă:

a)  $\frac{ax+ay-bx-by}{xy+x^2}$ ;

b)  $\frac{x^2-2x+1}{y-xy+z-zx}$ ;

c)  $\frac{y^2+x^2-2xy}{xz-yz+ty-xt}$ ;

d)  $\frac{xy-xz-y^2+yz}{x^2-xy}$ .

10. Desfaceți parantezele drepte:

a)  $\left[ \frac{a(x+1)^2}{b(x-1)} \right]^3$ ;

b)  $\left[ \frac{x^2(x-1)}{y^3(x+1)^2} \right]^4$ ;

c)  $\left[ \frac{ab^2x^3}{(a-b^2)^2y^4} \right]^2$ ;

d)  $\left[ \frac{\sqrt{5}(a^2-x)^2}{\sqrt{3}y^2x} \right]^4$ .

11.  **Lucrați în grup!** Scrieți ca raport algebric:

a)  $\left( x - \frac{b}{a} \right)^2$ ;

b)  $\left( \frac{x}{y} - 3 \right)^2$ ;

c)  $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$ ;

d)  $\frac{2}{2a+3} - \frac{1}{3-2a}$ .

### Formăm abilitățile și aplicăm

12. Aflați valoarea expresiei  $\left( \frac{t^2+2t-3}{t^2-1} + \frac{t^2+t-2}{t^2-t-6} \right) \cdot \frac{t^2-5}{t^2-2t-3} \cdot (2t-4)$ , pentru  $t=2+\sqrt{5}$ .


13. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a)  $\frac{a^2-4a+4}{a^2+ab^2-2a-2b^2}$ ;

b)  $\frac{x^2+2x+2y^2-y^4}{x^2-xy^2+2y^2-4}$ ;

c)  $\left( \frac{x-y}{x^2-xy} - \frac{1}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{(y-x)^2} \right) \cdot \frac{y^2}{(x+y)^2}$ ;

d)  $\left( \frac{a}{a-b} - \frac{ab}{a^2-b^2} \right) \cdot \frac{4a^2}{a^2-2ab+b^2}$ .

14.  **Lucrați în grup!** Aduceți la o formă mai simplă și calculați valoarea expresiei pentru  $x = -1,8$  și  $y = 0,6$ .

a)  $\left(\frac{x^2}{x+y} - \frac{x^3}{x^2+y^2+2xy}\right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{x^2-y^2}\right)$ ;      b)  $\frac{x+y}{x+2y} : \left(\frac{x}{x-2y} + \frac{y^2}{x^2-4y^2}\right)$ ;

c)  $\frac{x^2}{x^2-2xy} : \left(\frac{2xy}{x^2-4y^2} - \frac{y}{x+2y}\right)$ ;      d)  $\left(\frac{2xy}{x^2-9y^2} - \frac{y}{x-3y}\right) : \frac{y^2}{x^2+3xy}$ .

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a)  $\frac{8x-4x^2-4}{(x^2-1)(1-x)} + \frac{(1+x)(x-1)}{1-x} \cdot \frac{x}{(x+1)(x^2-2x+1)} + \frac{x}{x^2+1-2x}$ ;

b)  $\frac{8x^2-24x+18}{9+6x} \cdot \frac{4x^2+12x+9}{15-10x} \cdot \frac{15x}{4x^2-9}$ .

16. (EG, 2015) Aflați valorile reale ale lui  $x$ , pentru care suma rapoartelor algebrice  $\frac{2}{x-3}$  și  $\frac{2x}{x+3}$  este egală cu produsul acestor rapoarte.

17. (EG, 2019) Determinați valorile lui  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$ , pentru care suma rapoartelor algebrice  $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$  și  $\frac{4x-5}{x-3}$  este egală cu 1.

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

18. Demonstrați că:

a)  $\frac{x}{x^2-6x+9} : \left(\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x} - \frac{3x}{x^2-9}\right) = \frac{3+x}{3-x}$ ;      b)  $\left(1 + \frac{7}{a-3}\right) \cdot \left(\frac{a+5}{a^2+a-12} + \frac{a}{a+4} - \frac{4}{a-3}\right) (3-a)^2 = a^2 - 6a - 11$ .

19. Demonstrați că:

a)  $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \cdot \dots \cdot (x^{16}+y^{16}) = \frac{x^{32}-y^{32}}{x-y}$ ;      b)  $\frac{x^{2^{10}}-y^{2^{10}}}{x-y} = (x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4) \cdot \dots \cdot (x^{2^9}+y^{2^9})$ .

## Test sumativ



Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

### Varianta I

1. Completați caseta:

DVA al raportului algebric  $\frac{7x-\sqrt{2}}{-2x-9}$  este  $\mathbb{R} \setminus \{\square\}$ .

2. a) Scrieți sub formă de raport algebric ireductibil:

$$\frac{a^2-4a+4}{b+b^3} : \frac{2-a}{b^2+1}$$

- b) Aflați valoarea raportului obținut la a) pentru  $a = 1 - \sqrt{5}$ ,  $b = 1 + \sqrt{5}$ .

3. Amplificați raportul algebric  $\frac{\sqrt{3}x-4}{\sqrt{3}x+4}$  cu  $4 - \sqrt{3}x$ .

4. Simplificați raportul algebric:

$$\frac{100a^2-9}{100a^2-60a+9}$$

5. Demonstrați în DVA identitatea:

$$\left(\frac{40a}{a^2-25} + \frac{4a}{a+5} - \frac{4a}{15-3a}\right) : \frac{4a}{3a-15} = 4.$$

### Varianta II

1. Completați caseta:

DVA al raportului algebric  $\frac{5x+\sqrt{8}}{-3x+7}$  este  $\mathbb{R} \setminus \{\square\}$ .

2. a) Scrieți sub formă de raport algebric ireductibil:

$$\frac{b^2-6b+9}{a-\sqrt{3}} : \frac{3-b}{5a^2-15}$$

- b) Aflați valoarea raportului obținut la a) pentru  $a = \sqrt{2} - 1$ ,  $b = \sqrt{2} + 1$ .

3. Amplificați raportul algebric  $\frac{\sqrt{5}x-1}{1+\sqrt{5}x}$  cu  $\sqrt{5}x+1$ .

4. Simplificați raportul algebric:

$$\frac{9x^2-4}{18x^2+24x+8}$$

5. Demonstrați în DVA identitatea:

$$\left(\frac{1}{a+2} - \frac{a}{a^2-4} + \frac{2}{5a-10}\right) : \frac{a-3}{a^2-4} = 0,4.$$

*Nu există decât un singur fel de a învăța. Prin acțiune.*  
Paulo Coelho

## § 1. Noțiunea de funcție. Recapitulare și completări

### 1.1. Noțiunea de funcție. Moduri de definire a funcției

Noțiunea de **funcție** este una dintre cele mai importante noțiuni în cursul de matematică. Întâlnim aplicații ale funcțiilor în diverse domenii – în economie, în tehnică, în sociologie, în cotidian, în fizică, în chimie, în biologie etc.



**Ne amintim**

• Identificați elementele funcției:

a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 1.$

$D(f)$  – domeniul de definiție al funcției  $f$

Domeniul de valori sau codomeniul funcției  $f$

Legea de corespondență

$E(f) = \{y \mid y = f(x) = -3x + 1\}$  – mulțimea valorilor funcției  $f$

b)  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = 8,5x - 3.$

$E(g) =$

### Definiție

Fie mulțimile nevide  $A$  și  $B$ . Se spune că este definită o **funcție** pe mulțimea  $A$  cu valori în mulțimea  $B$  dacă este stabilită o lege de corespondență, o regulă, un procedeu care asociază *fiecărui* element  $x$  din  $A$  un *singur* element  $y$  din  $B$ .



**Rețineți!**

Funcția definită pe mulțimea  $A$  cu valori în mulțimea  $B$  se notează  $f: A \rightarrow B$  (sau  $A \xrightarrow{f} B$ ).

Mulțimea  $A$  se numește **domeniul de definiție** al funcției  $f$  și se notează  $D(f)$ .

Mulțimea  $B$  se numește **domeniul de valori**, sau **codomeniul** funcției  $f$ .

Valoarea funcției  $f$  în  $x$  se notează  $y = f(x)$ ;  $x$  se numește **variabilă independentă**, sau **argument** al funcției  $f$ , iar  $y$  – **variabilă dependentă**.

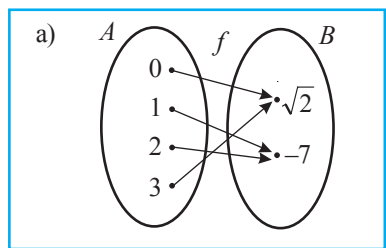
**Mulțimea valorilor funcției**  $f$  se notează  $E(f) = \{y \mid y = f(x)\}$ .

Evident,  $E(f) \subseteq B$ .



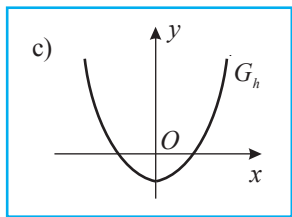
**Lucrați în perechi!**

- Fie funcțiile  $f, g, h, p$  (fig. 1). Identificați modul de definire a fiecărei funcții.



b) 

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = g(x)$	-6	-4	-2	0	2	4	6



d)  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(x) = x^2 + 2.$

Fig. 1

**Generalizăm** Moduri de definire a funcției

- I. Modul analitic: prin formule.
- II. Modul sintetic: printr-o diagramă, printr-un tabel de valori, printr-un grafic.



**Rețineți!**

Rezolvarea problemelor referitoare la funcții începe cu determinarea domeniului de definiție al funcției respective.

**1.2. Graficul unei funcții**

- Examinați desenele din figura 2 și identificați care dintre ele reprezintă graficul unei funcții. Argumentați.

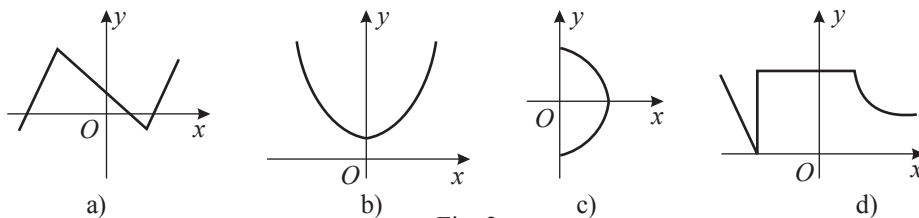


Fig. 2

**Definiție**

Se numește **graficul funcției**  $f: A \rightarrow B$  mulțimea  $G_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y = f(x)\}$  sau reprezentarea acestei mulțimi într-un sistem de axe ortogonale.

Așadar, graficul funcției  $f$  este o submulțime a produsului cartezian  $A \times B$  sau reprezentarea acestei submulțimi într-un sistem de axe ortogonale.



**Rețineți!**

Ecuția  $y = f(x)$ , verificată de toate elementele  $(x, y) \in G_f$ , se mai numește **ecuația graficului** funcției  $f$ .

**1.3. Transformări ale graficelor funcției**

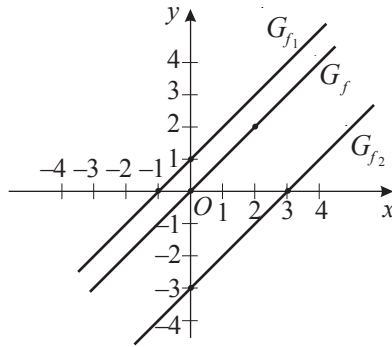


**Lucrați în perechi!**

1. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x + 1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x - 3.$   
 Ce observați?

Rezolvare:

$f$ :	$x$	0	2
	$y$	0	2
$f_1$ :	$x$	0	-1
	$y$	1	0
$f_2$ :	$x$	0	3
	$y$	-3	0



**Observăm**

- a) Graficul  $G_{f_1}$  este obținut prin translația paralelă a graficului  $G_f$  cu o unitate liniară de-a lungul axei  $Oy$ , în sensul acesteia.
- b) Graficul  $G_{f_2}$  este obținut prin translația paralelă a graficului  $G_f$  cu 3 unități liniare de-a lungul axei  $Oy$ , în sensul opus acesteia.

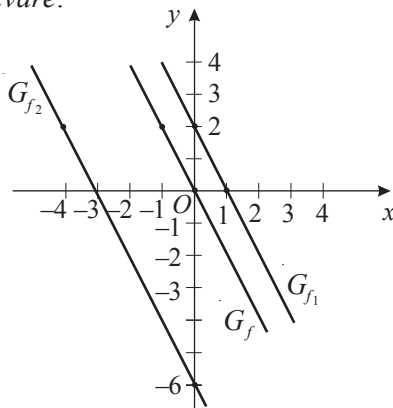
**Aplicăm**

2 Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = -2(x-1)$  și  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = -2(x+3)$ , fiind dat graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x$ . Ce observați?

Rezolvare:

$f$ :	$x$	0	-1
	$y$	0	2
$f_1$ :	$x$	0	1
	$y$	2	0
$f_2$ :	$x$	0	-4
	$y$	-6	2



**Observăm**

- a) Graficul  $G_{f_1}$  este obținut prin translația paralelă a graficului  $G_f$  cu o unitate liniară de-a lungul axei  $Ox$ , în sensul acesteia.
- b) Graficul  $G_{f_2}$  este obținut prin translația paralelă a graficului  $G_f$  cu 3 unități liniare de-a lungul axei  $Ox$ , în sensul opus acesteia.

**Atenție!**

Alte transformări ale graficelor funcțiilor le vom studia în § 3.

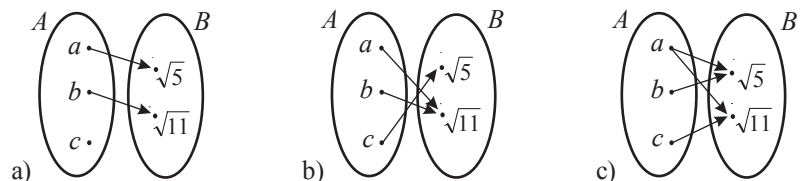
**Exerciții și probleme**

**Fixăm cunoștințele**

1. Citiți:

- a)  $f: \{0; 1; 2; 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ ;      b)  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ;      c)  $h: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ;      d)  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ .

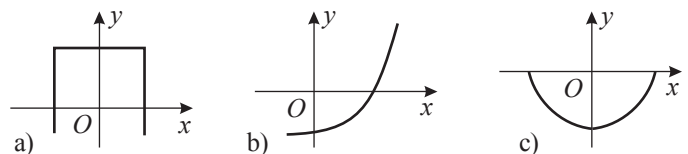
2. **Investigați!** Precizați care dintre diagrame definește o funcție.



3. Determinați elementele funcției:

- a)  $f: \{-1; 0; 2; 3\} \rightarrow \{-3; -2; 0; 1\}, f(x) = -x$ ;      b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 5x + 12$ .

4. **Investigați!** Determinați care dintre desene nu reprezintă graficul unei funcții. Argumentați.



**Formăm abilitățile și aplicăm**

5.  **Lucrați în grup!**

Fie mulțimile  $A = \{-\sqrt{5}; -3; 0; 2\}$  și  $B = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$ .

- a) Reprezentați prin diagrame patru funcții definite pe  $A$  cu valori în  $B$ .
- b) Trasați graficele funcțiilor obținute la a), completând tabelele de valori respective.

6.  **Investigați!** Determinați dacă este definită corect funcția:

- a)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x^2 - 1;$
- b)  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = -\frac{5}{x};$
- c)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = \frac{2}{3}x + 4;$
- d)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \frac{1}{2}x - 3.$

7. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \leq -1, \\ 5 - 3x, & \text{dacă } x > -1. \end{cases}$

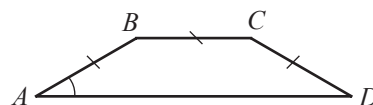
Calculați  $f(-\sqrt{2}), f(-0,1), f(0), f(2\sqrt{5})$ .

8. Exprimați printr-o formulă funcția:

$f: \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{N}, f(1) = 4, f(2) = 7, f(3) = 10, f(4) = 13, f(5) = 16.$

9. Una dintre bazele unui trapez isoscel este congruentă cu latura laterală, iar măsura unghiului alăturat bazei este de  $30^\circ$ .

Exprimați printr-o formulă perimetrul trapezului ca funcție de înălțime.



10. Aflați domeniul de definiție al funcției:

- a)  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 1;$
- b)  $g: D(g) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x} + 5;$
- c)  $h: D(h) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{x - 3};$
- d)  $f_1: D(f_1) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(t) = t^2 - 2t.$

11. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = 2x + 3, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 2x - 2;$
- b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = -3(x + 2), f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = -3(x - 2);$
- c)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x, g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = -x - 1,5, g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(x) = -x + 3;$
- d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x, f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2), f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \frac{1}{2}(x + 4).$  Ce ați observat?

12.  **Lucrați în perechi!** Dați exemple de funcții din diverse domenii (chimie, fizică, economie, medicină, geometrie, istorie etc.).

13.  **Lucrați în perechi!** Aflați valoarea funcției  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  pentru valoarea dată a argumentului:

- a)  $f(x) = 3x^2 - 2, x \in \{-1; 2; \sqrt{3}\};$
- b)  $f(t) = -4t + 1, t \in \{-\sqrt{5}; 0; 7\};$
- c)  $f(z) = \frac{1}{z} + z, z \in \{-2; 0,3; 100\}.$

**Dezvoltăm abilitățile și creăm**

14. Fie funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) =$  restul împărțirii numărului  $n$  la 5.

- a) Calculați  $f(0), f(2), f(3), f(5), f(7).$
- b) Arătați că  $f(n + 5) = f(n)$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}.$

15. Între variabilele  $x, y \in \mathbb{R}$  există relația:

- a)  $3x - y = 7;$
- b)  $x^2 + 3y^2 = 8.$

Se poate exprima  $y$  ca funcție de  $x$ ? Dar  $x$  ca funcție de  $y$ ?

16. Reprezentați grafic funcția  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{9 - x^2}{x - 3}.$

## § 2. Funcții numerice. Recapitulare și completări

### 2.1. Proprietăți ale funcțiilor numerice

#### 2.1.1. Monotonia funcțiilor numerice

##### Definiție

Funcția  $f: A \rightarrow B$  se numește **funcție numerică**, sau **funcție reală de variabilă reală**, dacă  $A$  și  $B$  sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale  $\mathbb{R}$ .

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $f(x) = 0,5x - 1$ ;  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3x$ ;  $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = -\sqrt{2}x^3$ , sunt funcții numerice.

Fie funcția numerică  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $A \subseteq \mathbb{R}$  și  $x_1, x_2 \in A$ .

##### Definiții

- Funcția  $f$  se numește **crescătoare (strict crescătoare)** pe mulțimea  $A$ , dacă pentru orice  $x_1 < x_2$  ( $x_1, x_2 \in A$ ) avem  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) < f(x_2)$ ).
- Funcția  $f$  se numește **descrescătoare (strict descrescătoare)** pe mulțimea  $A$ , dacă pentru orice  $x_1 < x_2$  ( $x_1, x_2 \in A$ ) avem  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ).
- Funcția  $f$  se numește **monotonă (strict monotonă)** pe domeniul ei de definiție  $D(f)$  sau pe un interval  $I \subseteq D(f)$ , dacă ea este crescătoare sau descrescătoare (strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe  $D(f)$  sau pe  $I$  (fig. 3).

##### Exemple

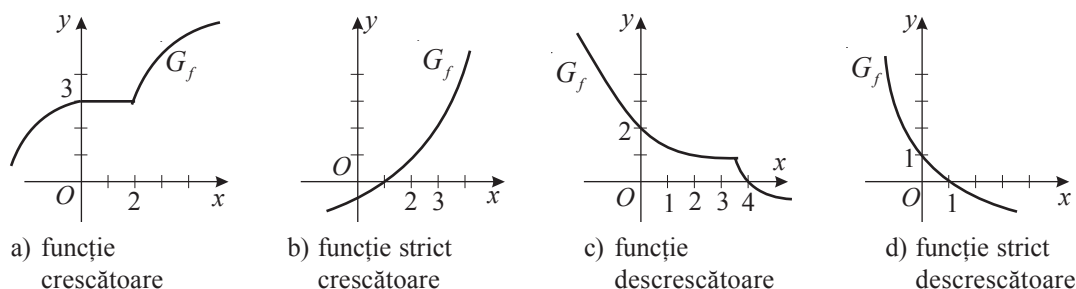


Fig. 3



**Lucrați în perechi!**

##### Aplicăm

- Examinați graficul  $G_f$  al funcției  $f$  și precizați intervalele ei de monotonie (fig. 4).

*Rezolvare:*

Funcția  $f$  este  pe  $(-\infty; 1]$ ,  $[3; +\infty)$  și  pe  $[1; 3]$ .

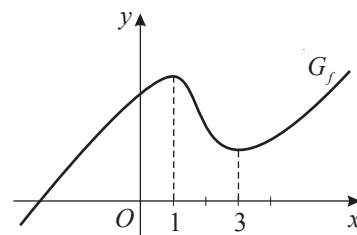


Fig. 4

#### 2.1.2. Zeroul funcției



**Investigăm**

- Examinați graficul  $G_f$  al funcției  $f$  și determinați zerourile acestei funcții (fig. 5).

*Rezolvare:*

Deoarece graficul  $G_f$  intersectează axa  $Ox$  în punctul  $A(-3; 0)$ , rezultă că  $x_1 = -3$  este zeroul funcției  $f$ . Deoarece  $B(2; 0)$  este punct comun al graficului  $G_f$  cu axa  $Ox$ , adică  $f(2) = 0$ , rezultă că  $x_2 = 2$  este zeroul funcției  $f$ .

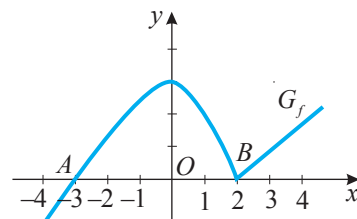


Fig. 5

*Răspuns:* Funcția  $f$  are două zerouri:  și .

**Definiție**

Numărul real  $a$  se numește **zeroul funcției**  $f$  dacă  $f(a) = 0$ .



**Rețineți!**

Numărul real  $a$  este zerou al funcției  $f$  dacă și numai dacă punctul  $(a, 0)$  este situat pe graficul  $G_f$ .

**2.1.3. Semnul funcției**



**Investigăm**

- Examinați graficul  $G_f$  al funcției  $f$  (fig. 6) și precizați intervalele în care: a)  $f(x) > 0$ ; b)  $f(x) \geq 0$ ; c)  $f(x) < 0$ ; d)  $f(x) \leq 0$ .

Rezolvare:

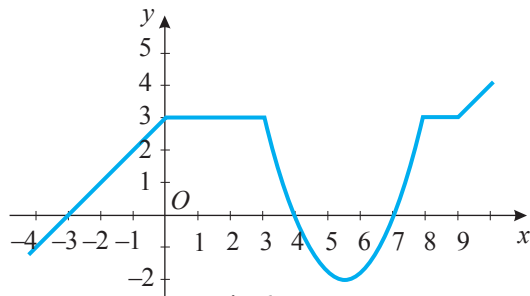


Fig. 6

- a)  $f(x) > 0$ , pentru  $x \in (-3; 4) \cup (7; +\infty)$ ;
- b)  $f(x) \geq 0$ , pentru  $x \in \text{[ ]} \cup \text{[ ]}$ ;
- c)  $f(x) < 0$ , pentru  $x \in (-\infty; -3) \cup (4; 7)$ ;
- d)  $f(x) \leq 0$ , pentru  $x \in \text{[ ]} \cup \text{[ ]}$ .

**2.2. Funcția numerică  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$**

**Definiții**

- Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se numește **funcție de gradul I**.
- Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se numește **proporționalitate directă**, sau **funcție liniară**.
- Numărul real  $a$  se numește **coeficient de proporționalitate**.
- Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , se numește **funcție constantă**.

**Observație**

Proporționalitatea directă dintre mărimi este funcția de forma  $f: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ ,  $f(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}_+$ .

**2.2.1. Graficul funcției de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$**

Graficul funcției de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , reprezintă o dreaptă:

- care nu trece prin origine și nu este paralelă cu axa  $Ox$ , dacă  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  (fig. 7 a));
- care trece prin originea  $O(0; 0)$ , dacă  $a \neq 0$ ,  $b = 0$  (fig. 7 b));
- paralelă cu axa  $Ox$ , dacă  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , sau axa  $Ox$ , dacă  $a = 0$ ,  $b = 0$  (fig. 7 c)).

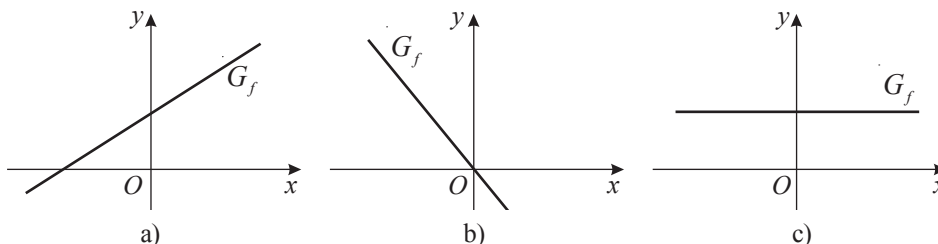


Fig. 7



**Rețineți!**

Numărul  $a$  se numește **panta dreptei** sau **coeficientul unghiular al dreptei** – graficul funcției de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Pentru a construi dreapta – graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , este suficient să se construiască dreapta determinată de două puncte ale graficului funcției  $f$ . De regulă, acestea sunt punctele de intersecție a graficului  $G_f$  cu axele  $Ox$  și  $Oy$ .

Pentru funcția liniară  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se determină convenabil un punct și se construiește dreapta care trece prin originea  $O(0; 0)$  și acest punct.

**2.2.2. Proprietăți ale funcției de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$**



**Lucrați în perechi!**

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 2$  (fig. 8).
  - 1) Precizați monotonia funcției  $f$ .
  - 2) Aflați zeroul funcției  $f$ .
  - 3) Determinați semnul funcției  $f$ .

*Rezolvare:*

Fie  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  și  $x_1 < x_2$ .

- 1)  $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$  pentru orice  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Prin urmare, funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ . Constatăm că  $a = 3 > 0$ .
- 2)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ . Așadar,  $x = -\frac{2}{3}$  este zeroul funcției  $f$ .
- 3)  $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$ ;  $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$ . Prin urmare, funcția  $f$  ia valori negative pentru  $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$  și valori pozitive pentru  $x \in \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .

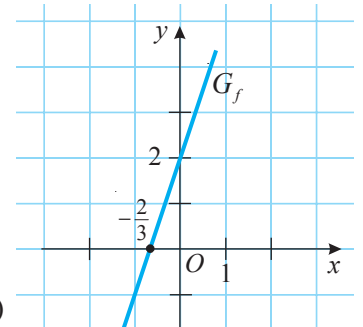


Fig. 8

**Generalizăm**

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- Dacă  $a = 0$ , funcția  $f$  este constantă pe  $\mathbb{R}$ .
- Dacă  $a > 0$ , funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- Dacă  $a < 0$ , funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- Zeroul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , este  $x = -\frac{b}{a}$ .
- Intervalul pe care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , ia valori pozitive este mulțimea soluțiilor inecuației  $ax + b > 0$ , iar intervalul pe care funcția  $f$  ia valori negative este mulțimea soluțiilor inecuației  $ax + b < 0$ .

**2.3. Funcția numerică  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $k \in \mathbb{R}^*$**

Dependența dintre două mărimi  $x$  și  $y$ , astfel încât, odată cu majorarea (micșorarea) mărimii  $x$ , mărimea  $y$  se micșorează (majorează) tot de atâtea ori, se numește **proporționalitate inversă**.

Proporționalitatea inversă dintre mărimile  $x$  și  $y$  este exprimată prin relația  $x \cdot y = k$ , unde  $k \in \mathbb{R}^*$  și  $x \in (0; +\infty)$ .

**Definiție**

Funcția de forma  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $k \in \mathbb{R}^*$ , se numește **proporționalitate inversă**.

Graficul proporționalității inverse este o hiperbolă cu două ramuri:

- a) pentru  $k > 0$  ramurile ei sunt situate în cadranele I și III (fig. 9);
- b) pentru  $k < 0$  ramurile ei sunt situate în cadranele II și IV (fig. 10).

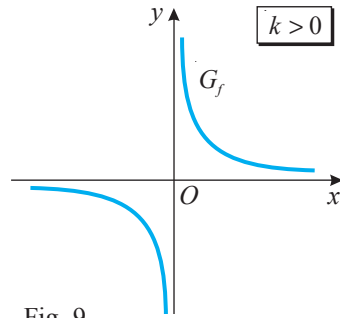


Fig. 9

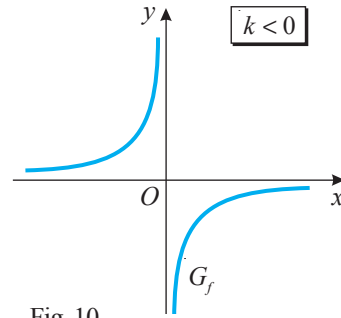


Fig. 10



**Rețineți!**

**Proprietăți ale funcției de forma  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}^*$**

- 1° Funcția  $f$  nu are zerouri; graficul  $G_f$  nu intersectează nici axa  $Ox$ , nici axa  $Oy$ .
- 2° a) Pentru  $k > 0$  funcția  $f$  ia valori pozitive, dacă  $x \in (0; +\infty)$ , și valori negative, dacă  $x \in (-\infty; 0)$ .  
b) Pentru  $k < 0$  funcția  $f$  ia valori pozitive, dacă  $x \in$  [ ] , și valori negative, dacă  $x \in$  [ ] .
- 3° a) Pentru  $k > 0$  funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; +\infty)$ .  
b) Pentru  $k < 0$  funcția  $f$  este strict crescătoare pe [ ] , [ ] .
- 4° Pentru  $k > 0$  ( $k < 0$ ) observăm: pentru valori ale lui  $x$ , pozitive sau negative, din ce în ce mai mari, funcția  $f$  ia valori din ce în ce mai mici (mari); pentru valori negative ale lui  $x$  din ce în ce mai mici, funcția  $f$  ia valori din ce în ce mai mari (mici); pentru valori pozitive ale lui  $x$  din ce în ce mai mici, funcția  $f$  ia valori din ce în ce mai mari (mici).
- 5° Observăm că  $f(-x) = -f(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Într-adevăr,  $f(-x) = \frac{k}{-x} = -\frac{k}{x} = -f(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}^*$ .

Deoarece  $f(-x) = -f(x)$ , rezultă că dacă punctul  $A(x_0; y_0) \in G_f$ , atunci și punctul  $A'(-x_0; -y_0) \in G_f$ . Deci, graficul  $G_f$  este simetric față de originea  $O(0; 0)$  (figurile 9–10).

**2.4. Funcția radical  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$**

**Definiție**

Funcția  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$ , se numește **funcție radical**.

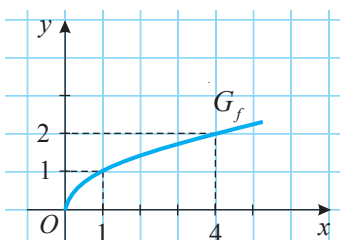


Fig. 11

Graficul funcției radical este o curbă situată în cadranul I (fig. 11).

**Proprietăți ale funcției radical**

- 1° Funcția  $f$  are un singur zero,  $x = 0$ , deoarece  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .  
Graficul  $G_f$  intersectează axele  $Ox$  și  $Oy$  într-un singur punct:  $O(0; 0)$ .
- 2° Funcția  $f$  ia numai valori pozitive pentru  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
- 3° Funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}_+$ .

## 2.5. Funcția modul (opțional)

### Definiție

Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ , se numește **funcție modul**.



### Investigăm

- Fie funcția modul  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ .
  - Trasați graficul  $G_f$ .
  - Determinați proprietățile funcției  $f$ .

*Rezolvare:*

- Explicitând modulul, obținem:  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [0; +\infty), \\ -x, & \text{dacă } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

Prin urmare, pentru  $x \in [0; +\infty)$  trasăm graficul funcției  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ , iar pentru  $x \in (-\infty; 0)$  – graficul funcției  $f: (-\infty; 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x$ .

Graficul funcției  $f(x) = |x|$  este un unghi de  $90^\circ$  cu vârful în originea sistemului de axe ortogonale, astfel încât  $[Oy]$  este bisectoarea acestuia (fig. 12).

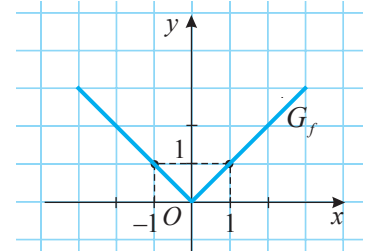


Fig. 12

### b) Proprietăți ale funcției modul

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Prin urmare, funcția  $f$  are un singur zero:  $x = 0$ .
- Deoarece  $|x| \geq 0$ , rezultă că pentru  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  funcția  $f$  ia valori pozitive.
- Funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty; 0]$  și strict crescătoare pe  $[0; +\infty)$ . (Demonstrați!)

### Aplicăm

- Trasați graficul funcției  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = -|3 - x|$ .

*Rezolvare:*

Explicitând modulul, obținem:

$$h(x) = -|3 - x| = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x \in (-\infty; 3], \\ 3 - x, & \text{dacă } x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

Graficul funcției  $h$  este reprezentat în figura 13.

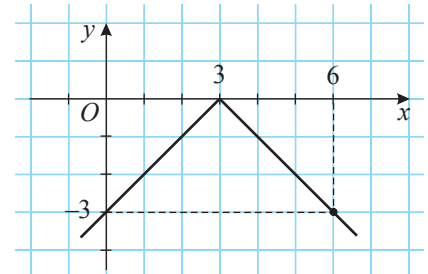


Fig. 13

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

- Fie punctele:  $(1; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(-2; -11)$ ,  $(-2; 10)$ ,  $(-3; 16)$ . Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
  - $f(x) = 4x - 3$ ;
  - $f(x) = -3x + 4$ ;
  - $f(x) = -5x + 1$ .



### Lucrați în perechi!

Fie funcția: 1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0,5x - 4$ ;  
2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x + 5$ .

- Reprezentați grafic funcția  $f$ .
- Aflați zeroul funcției  $f$ .
- Precizați semnul funcției  $f$ .
- Precizați monotonia funcției  $f$ .

- Fie funcția: 1)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -0,25x$ ;

$$2) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 7x.$$

- Reprezentați grafic funcția  $g$ .
- Aflați zeroul funcției  $g$ .
- Precizați semnul funcției  $g$ .
- Precizați monotonia funcției  $g$ .

- Determinați, fără a reprezenta grafic funcția, dacă este crescătoare sau descrescătoare funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin formula:

- $f(x) = \sqrt{15}x + 3$ ;
- $f(x) = -\sqrt{3}x - 5$ ;
- $f(x) = -x$ ;
- $f(x) = 7, (8)x$ .

5. Determinați, fără a reprezenta graficul funcției, în care cadrane sunt situate ramurile hiperbolei – graficul funcției  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ :

- a)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;                      b)  $f(x) = -\frac{2}{3x}$ ;  
 c)  $f(x) = -\frac{\sqrt{7}}{x}$ ;                      d)  $f(x) = -\frac{1+\sqrt{19}}{x}$ .

6. Fie funcția radical  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ , și  $x \in \{4; 7; 9; 25; -36; 0; -49\}$ .

Aflați valorile respective ale funcției  $f$ .

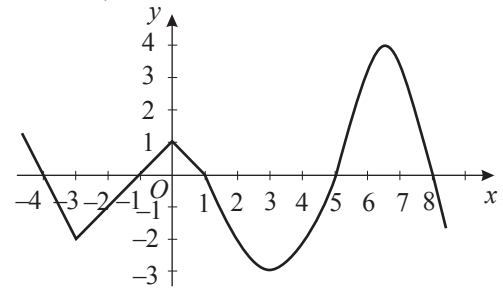
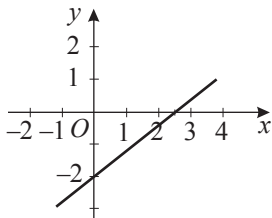
8.  **Investigați!** Adevărat sau fals?

- a) Dacă  $f(\sqrt{2}) = -3$ , atunci  $-3 \in D(f)$ , iar  $\sqrt{2} \in E(f)$ .  
 b) Dacă  $D(f) = [-2; \sqrt{5})$ , atunci  $f(\sqrt{5})$  nu există.  
 c) Dacă  $E(f) = (-1; 10)$ , atunci există valoarea  $x_0$  a argumentului, astfel încât  $f(x_0) = 5$ .  
 d) Domeniul de definiție al funcției definite prin formula  $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{3-x}}$  este mulțimea vidă.



9. Examinați graficul  $G_f$  din desenul alăturat. Aflați:

- a) zerourile funcției  $f$ ;  
 b) intervalele de semn constant ale funcției  $f$ ;  
 c) intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .



10. (EG, 2016) În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ . Utilizând desenul, scrieți în casetă una dintre expresiile *un număr pozitiv* sau *un număr negativ*.

„Zeroul funcției  $f$  este .”

**Formăm abilitățile și aplicăm**

11. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale, utilizând programul Advanced Grapher, graficele funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x + b$ , pentru:

- a)  $b = -1$ ;      b)  $b = 0$ ;      c)  $b = 2$ .

Ce ați observat?

12.  **Lucrați în grup!** Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -4x$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 4x$ ;  
 b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ , și  
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1 - 2x$ .

Ce ați observat?

13. Determinați funcția de gradul I, știind că:

- a)  $f(1) = 4$  și  $f(0) = -3$ ;  
 b)  $f(0) = 2$  și  $f(-2) = 5$ ;  
 c)  $f(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{3}$  și  $f(2\sqrt{6}) = 3\sqrt{3}$ ;  
 d)  $f(-1) = 3$  și  $f(2) = -1$ .


7. Completați formula cu un număr real, astfel încât funcția obținută  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = \square x - 1$ ;                      b)  $f(x) = -\square x + 3$ ;  
 c)  $f(x) = \frac{\square}{x}$ ;                      d)  $f(x) = -\frac{\square}{x}$

să fie: 1) strict crescătoare pe mulțimea  $D$ ;  
 2) strict descrescătoare pe mulțimea  $D$ .

Dezvoltăm abilitățile și creăm

18. Fie  $m$  un parametru real și funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : a)  $f(x) = (m-2)x + 4$ ; b)  $f(x) = (m+4)x + m - 6$ .  
Aflați valorile lui  $m$  pentru care funcția  $f$  este: 1) crescătoare; 2) descrescătoare.

19.  **Lucrați în perechi!** Reprezentați grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  
a)  $f(x) = \sqrt{|x|}$ ; b)  $f(x) = \sqrt{|x-2|}$ ; c)  $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } 0 < x \leq 4, \\ 2, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$



20. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$ . Arătați că există  $A, B \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $f(x) = A + \frac{B}{x-3}$ .

21. (EG, 2019) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + 1 - a^2$ . Determinați valorile reale ale lui  $a$ , pentru care graficul funcției  $f$  trece prin originea sistemului de coordonate, iar funcția  $f$  este strict descrescătoare.



**Problemă pentru campioni**

22. Scrieți o funcție de argument natural, definită cu ajutorul unei formule, ale cărei valori să fie numere prime pentru orice valoare a argumentului.

23.  **Lucrați individual!**  **Proiect.** Observați, pe parcursul unei săptămâni, cum se schimbă zi de zi, la aceeași oră, temperatura aerului în localitate. Reprezentați grafic rezultatele obținute. Determinați prin formule funcțiile asociate fiecărei porțiuni de grafic.

### § 3. Funcția de gradul II

#### 3.1. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2$



**Investigăm**



• Fie un pătrat cu latura  $a$  (fig. 14). Scrieți o funcție care să descrie dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale.

*Rezolvare:*

Aria unui pătrat cu lungimea laturii  $a$  este  $A = a^2$ . Prin urmare, dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale este descrisă de funcția  $g: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ ,  $g(x) = x^2$ .

Funcția  $g$  ne conduce la funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .
  - a) Reprezentați graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .
  - b) Determinați proprietățile funcției  $f$ .

*Rezolvare:*

a) Completăm tabelul de valori al funcției  $f$  pentru valoarea zero, unele valori negative și pozitive ale argumentului  $x$ :

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale  $xOy$  punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabel. Unim aceste puncte cu o curbă continuă și obținem graficul  $G_f$  (fig. 15).

Graficul  $G_f$  al funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , se numește **parabolă**. Punctul  $O(0; 0)$  se numește **vârful parabolei**.

Se spune că această parabolă este cu *ramurile în sus*.

**Atenție!** La trasarea parabolei am ținut cont de faptul că nu există trei puncte distincte coliniare situate pe parabolă.

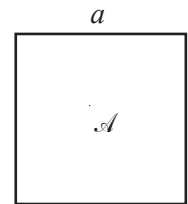


Fig. 14

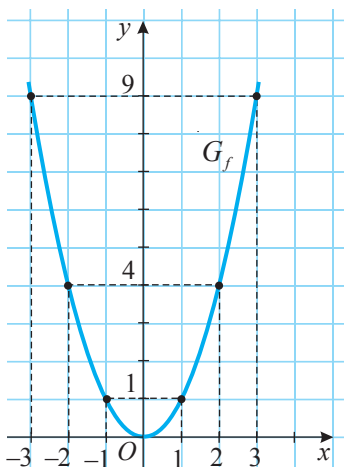


Fig. 15



b) **Proprietăți ale funcției**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

1°  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Prin urmare,  $x = 0$  este zeroul funcției  $f$ .  
Graficul  $G_f$  intersectează axele  $Ox$  și  $Oy$  într-un singur punct:  $O(0; 0)$ .

2°  $f(x) = x^2 \geq 0$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Așadar, funcția  $f$  ia numai valori nenegative.

3° Funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $[0; +\infty)$  și strict descrescătoare pe  $(-\infty; 0]$ .

4° Remarcăm că  $f(-x) = f(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Într-adevăr,  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Atunci  $(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (-x; y) \in G_f$ , ceea ce înseamnă că graficul  $G_f$  este simetric față de axa  $Oy$  sau că graficul  $G_f$  admite axa  $Oy$  drept axă de simetrie (fig. 15).

**Aplicăm**

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ .  
Aflați valorile lui  $x$  pentru care valoarea funcției  $f(x)$  este: a) 64; b) 0; c) -25.

*Rezolvare:*

- a)  $f(x) = 64 \Leftrightarrow x^2 = 64$ . Așadar,  $x_1 = -8, x_2 = 8$ .
- b)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ . Prin urmare,  $x = 0$ .
- c)  $f(x) = -25 \Leftrightarrow x^2 = -25$ . Deci, nu există astfel de valori reale ale lui  $x$ .

**3.2. Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}^*$**



**Investigăm**

- Fie un disc de rază  $r$  (fig. 16). Scrieți o funcție care să descrie dependența ariei discului de lungimea razei lui.

*Rezolvare:*

Aflăm aria discului aplicând formula  $A = \pi r^2$ .

Prin urmare, dependența ariei discului de lungimea razei acestuia este descrisă de funcția  $h: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ ,

$h(x) = \pi x^2$ .

Funcția  $h$  ne conduce la funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}^*$ .

- Fie funcția:
  - a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$ ;
  - b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x^2$ .
- 1) Trasați graficele funcțiilor  $f$  și  $g$ .
- 2) Determinați proprietățile funcțiilor  $f$  și  $g$ .

*Rezolvare:*

1) Completăm tabelele de valori ale funcțiilor  $f$  și  $g$  pentru valoarea zero, unele valori negative și pozitive ale argumentului  $x$ :

a)

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8

b)

$x$	-2	-1	0	1	2
$g(x) = -2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

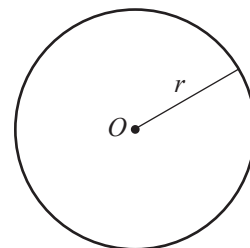


Fig. 16





Graficele  $G_f$  și  $G_g$ , trasate „prin puncte”, sunt reprezentate în figurile 17 și 18. Graficul funcției  $f$ , precum și graficul funcției  $g$ , se numește **parabolă**.

Punctul  $O(0; 0)$  se numește **vârful parabolei**.

Se spune că graficul funcției  $f$  este o **parabolă cu ramurile în sus**, iar graficul funcției  $g$  – o **parabolă cu ramurile în jos**.

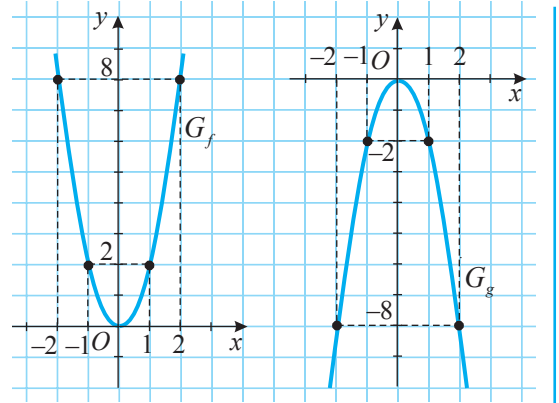


Fig. 17

Fig. 18

## 2) Proprietăți ale funcției

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$$

1°  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Deci, funcția  $f$  are un zero:  $x = 0$ .

Prin urmare, graficul  $G_f$  intersectează axele  $Ox$  și  $Oy$  în punctul  $O(0; 0)$ .

2°  $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 0$ . Deci, funcția  $f$  ia valori nenegative pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

3° Funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty; 0]$  și strict crescătoare pe  $[0; +\infty)$ .

4°  $D(f) = \mathbb{R}$ .

Deci, din  $x \in D(f)$  rezultă că și  $-x \in D(f)$ .

Deoarece  $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 = 2x^2 = f(x)$ , rezultă că  $G_f$  este simetric față de axa  $Oy$ .

5° Punctul  $x_0 = 0$  este punct de minim al funcției  $f$  și  $f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ .

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -2x^2$$

1°  $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Deci, funcția  $g$  are un zero:  $x = 0$ .

Prin urmare, graficul  $G_g$  intersectează axele  $Ox$  și  $Oy$  în punctul  $O(0; 0)$ .

2°  $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0$ . Deci, funcția  $g$  ia valori negative sau zero pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

3° Funcția  $g$  este strict crescătoare pe  $(-\infty; 0]$  și strict descrescătoare pe  $[0; +\infty)$ .

4°  $D(g) = \mathbb{R}$ .

Deci, din  $x \in D(g)$  rezultă că și  $-x \in D(g)$ .

Deoarece  $g(-x) = -2 \cdot (-x)^2 = -2x^2 = g(x)$ , rezultă că  $G_g$  este simetric față de axa  $Oy$ .

5° Punctul  $x_0 = 0$  este punct de maxim al funcției  $g$  și  $g(x_0) = \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$ .

## Definiții

Fie  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}$ , și  $x_0 \in A$ .

- ◆ Valoarea  $f(x_0)$  se numește **valoarea minimă** a funcției  $f$  pe mulțimea  $A$ , dacă  $f(x) \geq f(x_0)$  pentru orice  $x \in A$ . Se notează:  $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$ . În acest caz se spune că  $x_0$  este **punct de minim** al funcției  $f$ .
- ◆ Valoarea  $f(x_0)$  se numește **valoarea maximă** a funcției  $f$  pe mulțimea  $A$ , dacă  $f(x) \leq f(x_0)$  pentru orice  $x \in A$ . Se notează:  $f(x_0) = \max_{x \in A} f(x)$ . În acest caz se spune că  $x_0$  este **punct de maxim** al funcției  $f$ .
- ◆ Punctele de minim și de maxim se numesc **puncte de extrem** ale funcției  $f$ , iar valorile funcției  $f$  în aceste puncte se numesc **valori extreme** ale funcției  $f$ .



### Rețineți!

**Proprietăți ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2, a \in \mathbb{R}^*$**

1° Graficul  $G_f$  este o parabolă cu vârful în originea  $O(0; 0)$  și:

- are ramurile în sus, dacă  $a > 0$ ;
- are ramurile în jos, dacă  $a < 0$ .

Graficul  $G_f$  intersectează axele  $Ox$  și  $Oy$  într-un singur punct:  $O(0; 0)$ .

2° Funcția  $f$  are un zero:  $x = 0$ .

3° Funcția  $f$  ia valori nenegative, dacă  $a > 0$ , și valori negative sau zero, dacă  $a < 0$ .

4° a) Pentru  $a > 0$  funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty; 0]$  și strict crescătoare pe  $[0; +\infty)$ .

b) Pentru  $a < 0$  funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty; 0]$  și strict descrescătoare pe  $[0; +\infty)$ .

5° a) Dacă  $a > 0$ , atunci  $f(0) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$  și  $x_0 = 0$  este punct de minim al funcției  $f$ .

b) Dacă  $a < 0$ , atunci  $f(0) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$  și  $x_0 = 0$  este punct de maxim al funcției  $f$ .

6°  $G_f$  este simetric față de axa  $Oy$ .

### Aplicăm

• Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ ;

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -0,5x^2$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2$ .

*Rezolvare:*

Alcătuiți tabelul de valori al funcțiilor  $f$  și  $g$ :

a)	$x$	-2	-1	0	1	2
	$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8
	$g(x) = x^2$	4	1	0	1	4
b)	$x$	-2	-1	0	1	2
	$f(x) = -0,5x^2$	-2	-0,5	0	-0,5	-2
	$g(x) = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



Graficele funcțiilor  $f$  și  $g$  sunt reprezentate în figurile 19 și 20.

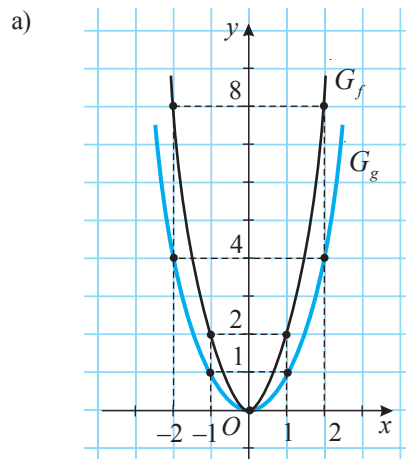


Fig. 19

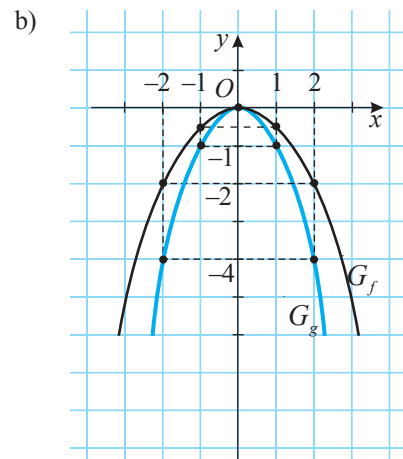


Fig. 20

**Observație**

Pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ , sunt posibile cazurile reprezentate în figurile 21 și 22.

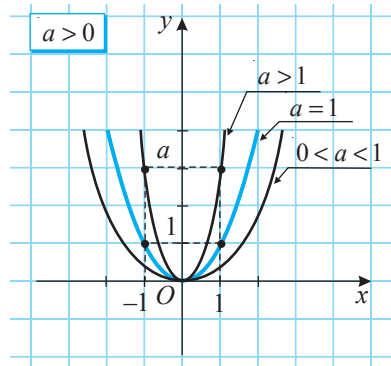


Fig. 21

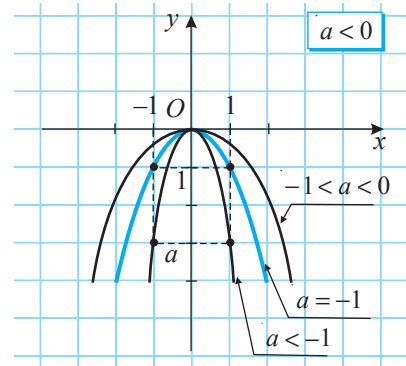


Fig. 22

**3.3. Transformarea graficelor**

**3.3.1. Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + n$ ,  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{R}^*$**



**Investigăm**

- Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

Trasați graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ .

*Rezolvare:*

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor  $g$  și  $f$ :

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10



Graficele funcțiilor  $g$  și  $f$  sunt reprezentate în figura 23.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului  $G_g$  cu 2 unități liniare în sus obținem punctul respectiv al graficului  $G_f$ . Astfel, graficul funcției  $f$  se obține din graficul funcției  $g$  efectuând translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei  $Oy$ , în sensul acesteia.

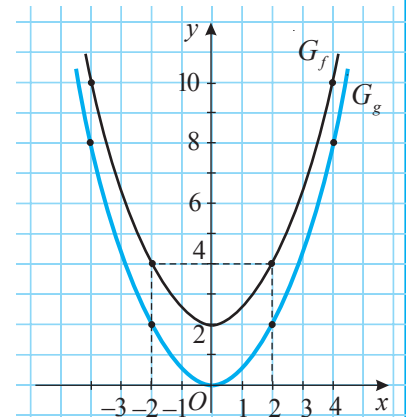


Fig. 23

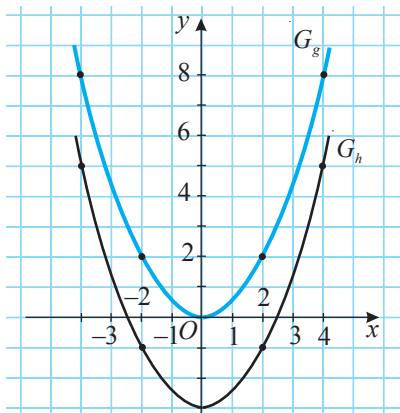
**Aplicăm**

- Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ .

Trasați graficul funcției  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$ .

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor  $g$  și  $h$ :



$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$	5	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	1,5	5

Graficele funcțiilor  $g$  și  $h$  sunt reprezentate în figura 24.

Observăm că graficul funcției  $h$  se obține din graficul funcției  $g$  efectuând translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei  $Oy$ , în sensul opus acesteia.

Fig. 24

**Generalizăm**

Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + n$ ,  $a \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{R}^*$ , este o parabolă care se obține din graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ , efectuând translația de-a lungul axei  $Oy$  cu  $n$  unități liniare în sensul acesteia, dacă  $n > 0$ , sau cu  $-n$  unități liniare în sensul opus acesteia, dacă  $n < 0$ .

**3.3.2. Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a(x - m)^2$ ,  $a \neq 0$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$**



- Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ .  
Trasați graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$ .

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor  $g$  și  $f$ :

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5
$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5

Graficele funcțiilor  $g$  și  $f$  sunt reprezentate în figura 25.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului  $G_g$  cu 2 unități liniare în dreapta de-a lungul axei  $Ox$  obținem punctul respectiv al graficului  $G_f$ . Astfel, graficul funcției  $f$  se obține din graficul funcției  $g$  efectuând translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei  $Ox$ , în sensul acesteia.

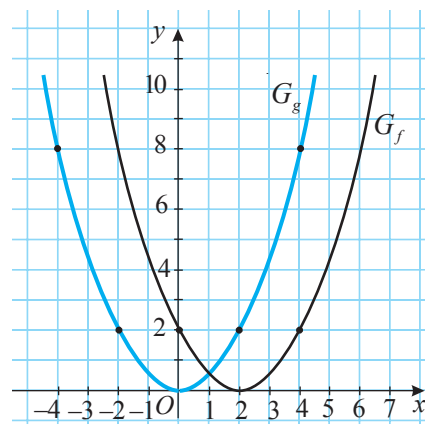


Fig. 25

**Aplicăm**

- Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ .  
Trasați graficul funcției  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$ .

*Rezolvare:*

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor  $g$  și  $h$ :

$x$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5
$h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32

Graficele funcțiilor  $g$  și  $h$  sunt reprezentate în figura 26.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului  $G_g$  cu 3 unități liniare în stânga de-a lungul axei  $Ox$  obținem punctul respectiv al graficului  $G_h$ . Astfel, graficul funcției  $h$  se obține din graficul funcției  $g$  efectuând translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei  $Ox$ , în sensul opus acesteia.

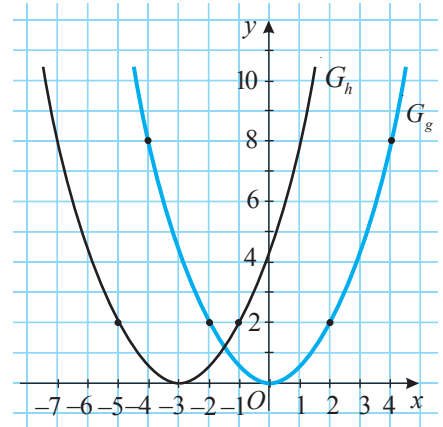


Fig. 26

**Generalizăm**

Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a(x-m)^2$ ,  $a \neq 0$ ,  $m \in \mathbb{R}^*$ , este o parabolă care se obține din graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = ax^2$ ,  $a \neq 0$ , efectuând translația de-a lungul axei  $Ox$  cu  $m$  unități liniare în sensul acesteia, dacă  $m > 0$ , sau cu  $-m$  unități liniare în sensul opus acesteia, dacă  $m < 0$ .



**Exercițiu**

Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă:

- $f(x) = -2x^2$ ,  $g(x) = -2x^2 + 1$ ,  $h(x) = -2x^2 - 3$ ;
- $f(x) = -2x^2$ ,  $g(x) = -2(x-1)^2$ ,  $h(x) = -2(x+2)^2$ .

**3.4. Studiul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$**



**Investigăm**

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 - x - 6$ .
  - Schițați graficul funcției  $f$ .
  - Determinați proprietățile funcției  $f$ .

*Rezolvare:*

1. Aflăm punctele de intersecție a graficului  $G_f$  cu axa  $Ox$ :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1,5 \text{ sau } x = 2.$$

Deci, punctele de intersecție a graficului  $G_f$  cu axa  $Ox$  sunt  $A(-1,5; 0)$  și  $B(2; 0)$ .

2. Aflăm punctul de intersecție a graficului  $G_f$  cu axa  $Oy$ :  $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 6 = -6$ .  
Prin urmare,  $C(0; -6)$  este punctul de intersecție a graficului  $G_f$  cu axa  $Oy$ .

3. Determinăm axa de simetrie pentru graficul  $G_f$ :

$f\left(x + \frac{1}{4}\right) = f\left(-x + \frac{1}{4}\right)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , ceea ce demonstrează că dacă punctul  $E\left(x + \frac{1}{4}; y\right) \in G_f$ , atunci și punctul  $E'\left(-x + \frac{1}{4}; y\right) \in G_f$ , adică dreapta de ecuație  $x = \frac{1}{4}$  este axă de simetrie pentru graficul  $G_f$  (fig. 27).

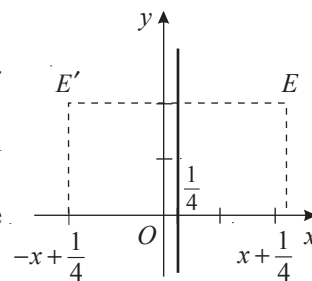


Fig. 27

4. Aflăm coordonatele vârfului parabolei.

Deoarece  $x = \frac{1}{4}$  este axă de simetrie pentru  $G_f$ , rezultă că abscisa vârfului parabolei  $G_f$  este  $x_0 = \frac{1}{4}$ , iar ordonata lui este  $y_0 = f(x_0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = -\frac{49}{8}$ .

Prin urmare, punctul  $V\left(\frac{1}{4}; -\frac{49}{8}\right)$  este vârful parabolei  $G_f$ .

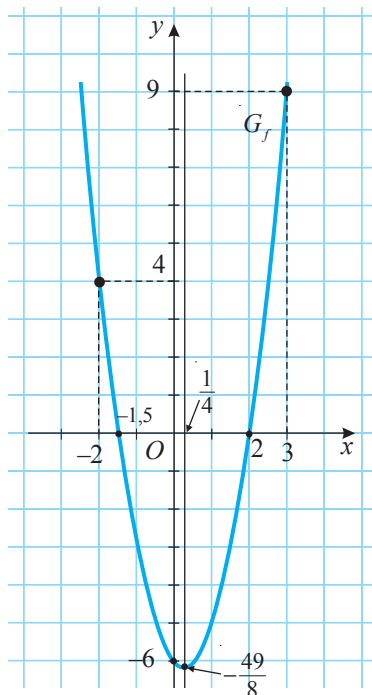


Fig. 28

5. Completăm tabelul de valori al funcției  $f$  pentru abscisele punctelor de intersecție a graficului  $G_f$  cu axele  $Ox, Oy$  și, eventual, pentru alte valori ale lui  $x$ :

$x$	-2	-1,5	0	$\frac{1}{4}$	2	3
$f(x) = 2x^2 - x - 6$	4	0	-6	$-\frac{49}{8}$	0	9

6. Trasăm „prin puncte” graficul  $G_f$  și obținem o parabolă cu ramurile în sus (fig. 28).

b) Utilizăm graficul  $G_f$  și determinăm proprietățile funcției  $f$ :

1°  $f$  are două zerouri:  $x_1 = \text{■}$ ,  $x_2 = \text{■}$ .

2°  $f > 0$  pentru  $x \in \text{■}$  și  $f < 0$  pentru  $x \in \text{■}$ .

3°  $f$  este strict descrescătoare pe ■ și strict crescătoare pe ■.

4°  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\text{■}) = \text{■}$  și punctul  $x = \text{■}$  este punct de ■ al funcției  $f$ .

### Definiție

Funcția de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se numește **funcție de gradul II**.

Deoarece numărul real  $a$  este nenul, putem scrie:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \text{ sau}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{-\Delta}{4a} \quad (1)$$

pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , unde  $\Delta = b^2 - 4ac$  este discriminantul ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , asociată funcției  $f$ . Egalitatea (1) se numește **forma canonică a funcției  $f$** .

Din (1) rezultă că, pentru a obține reprezentarea grafică a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , din reprezentarea grafică a funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = ax^2$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ , se efectuează două translații ale graficului  $G_g$ :

- 1) de-a lungul axei  $Ox$  cu  $-\frac{b}{2a}$  unități liniare (în sensul axei  $Ox$ , dacă  $-\frac{b}{2a} > 0$ , și în sensul opus axei, dacă  $-\frac{b}{2a} < 0$ );
- 2) de-a lungul axei  $Oy$  cu  $-\frac{\Delta}{4a}$  unități liniare (în sensul axei  $Oy$ , dacă  $-\frac{\Delta}{4a} > 0$ , și în sensul opus axei, dacă  $-\frac{\Delta}{4a} < 0$ ).

Fie funcția: a)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 - x - 2$ ; b)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 1 - x^2$ .

1. Trașați: a) graficul funcției  $g$ ; b) graficul funcției  $h$ .
2. Determinați: a) proprietățile funcției  $g$ ; b) proprietățile funcției  $h$ .



**Rețineți!**

Abscisa  $x_0$  a vârfului parabolei  $G_f$  este  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ . Pentru a calcula ordonata  $y_0$  a vârfului parabolei  $G_f$ , aflăm  $y_0 = f(x_0)$  sau  $y_0 = \frac{-\Delta}{4a}$ .

**3.4.1. Mulțimea valorilor funcției de gradul II**

Când  $x$  parcurge mulțimea  $\mathbb{R}$ ,  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  parcurge  $[0; +\infty)$ , iar  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  parcurge:

- a)  $[0; +\infty)$ , dacă  $a > 0$ ; b)  $(-\infty; 0]$ , dacă  $a < 0$ .

Prin urmare, din (1) și din a), b) rezultă că:

- 1)  $E(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}; +\infty\right)$ , dacă  $a > 0$ ; 2)  $E(f) = \left(-\infty; -\frac{\Delta}{4a}\right]$ , dacă  $a < 0$ .

**Aplicăm**

- Fie funcția: a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ .

Aflați  $E(f)$ .

*Rezolvare:*

- a)  $f(x) = x^2 - 7x + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ . Deoarece  $a = 1 > 0$ , obținem  $E(f) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ .
- b)  $f(x) = -3x^2 - 2x + 1 = \dots$ . Deoarece  $a = -3 < 0$ , rezultă că  $E(f) = \dots$ .



**Exercițiu**

Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2 - x - x^2$ . Aflați  $E(g)$ .

**3.4.2. Extremele funcției de gradul II**

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , și forma ei canonică

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}, \text{ unde } \Delta = b^2 - 4ac \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

- 1) *Cazul*  $a > 0$

Deoarece  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$  și  $a > 0$ , rezultă că și  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ .

Atunci  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$ . Deci,  $f(x) \geq \frac{-\Delta}{4a}$  (2) pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Evident,  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$  numai pentru  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Atunci  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$  (3).

Prin urmare, din (2) și (3) rezultă că  $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  (4) pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Din (2) și (4) rezultă că  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$  și  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  este punct de minim al funcției  $f$  (fig. 29).

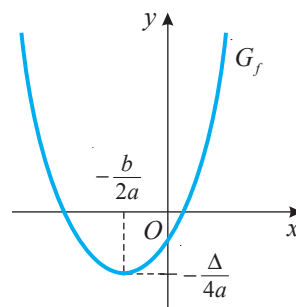


Fig. 29

2) Cazul  $a < 0$

Deoarece  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$  și  $a < 0$ , rezultă că  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ .

Atunci  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \leq \frac{-\Delta}{4a}$ . Deci,  $f(x) \leq \frac{-\Delta}{4a}$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Ținând cont de (3), obținem  $f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  (5) pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

Din (5) rezultă că  $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$  și  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  este punct de maxim pentru funcția  $f$  (fig. 30).

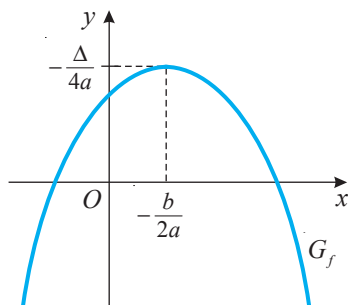


Fig. 30

■ **Aplicăm**

• Fie funcțiile:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ ;      b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -3x^2 - 2x + 1$ .

Aflați punctele de extrem și extremele funcțiilor  $f$  și  $g$ .

*Rezolvare:*

a) Deoarece  $a = 1 > 0$ , obținem  $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-7}{2} = 3,5$  – punct de minim al funcției  $f$  și  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(3,5) = -\frac{1}{4}$ .

b) Deoarece  $a = -3 < 0$ , avem  $x_0 = \text{■} = \text{■} = \text{■}$  – punct de  $\text{■}$  al funcției  $g$  și  $\max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = g(\text{■}) = \text{■}$ .



■ **Exercițiu**

Fie funcția  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 4 - x^2$ . Aflați punctele de extrem și extremele funcției  $h$ .

3.4.3. Intervalele de monotonie ale funcției de gradul II

■ **Generalizăm**

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , o funcție de gradul II.

- Dacă  $a > 0$ , funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$  și strict crescătoare pe  $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$  (fig. 29).
- Dacă  $a < 0$ , funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$  și strict descrescătoare pe  $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$  (fig. 30).
- Intervalele  $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$  și  $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$  se numesc **intervale de monotonie ale funcției  $f$** .



**Aplicăm**

- Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : a)  $f(x) = 3x^2 + x - 8$ ; b)  $f(x) = -0,3x^2 - 6x + 3$ .  
Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .

Rezolvare:

a) Deoarece  $a = 3 > 0$  și  $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{6}$ , rezultă că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right]$  și strict crescătoare pe  $\left[-\frac{1}{6}; +\infty\right)$ .

b) Deoarece  $a = -0,3 < 0$  și  $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(-0,3)} = -10$ , rezultă că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty; -10]$  și strict descrescătoare pe  $[-10; +\infty)$ .



**Exercițiu**

Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x^2 - x$ . Determinați intervalele de monotonie ale funcției  $g$ .

**3.4.4. Zerourile funcției de gradul II**

- Fie funcțiile: a)  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x^2 - 9x + 18$ ;  
b)  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = 4x^2 - 4x + 1$ ;  
c)  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_3(x) = -x^2 + x - 1$ .

Aflați zerourile funcțiilor  $f_1, f_2, f_3$ .

Rezolvare:

a)  $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = 6$ . Prin urmare, funcția  $f_1$  are două zerouri:  $x_1 = 3, x_2 = 6$  (fig. 31 a)).

b)  $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$ .  
Deci, funcția  $f_2$  are un zero:  $x = 0,5$  (fig. 31 b)).

c)  $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 = 0$ .  
Această ecuație nu are soluții reale. (Argumentați!)  
Astfel, funcția  $f_3$  nu are zerouri (fig. 31 c)).

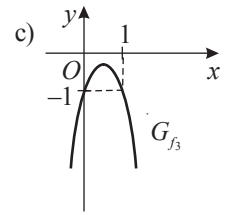
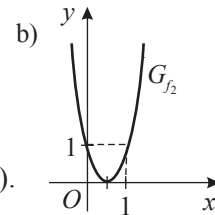
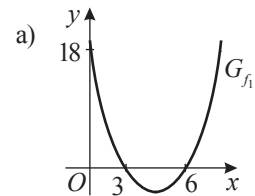


Fig. 31

**Generalizăm**

Zerourile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , sunt soluțiile reale ale ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , asociată funcției  $f$ .

Numărul de soluții reale ale ecuației de gradul II depinde de valoarea discriminantului ei  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Dacă  $\Delta > 0$ , ecuația de gradul II are două soluții reale, iar funcția  $f$  – două zerouri:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Prin urmare, graficul  $G_f$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte:  $(x_1; 0)$ ,  $(x_2; 0)$ .

- Dacă  $\Delta = 0$ , ecuația de gradul II are o soluție reală, iar funcția  $f$  – un zero:  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Deci, graficul  $G_f$  are un punct comun cu axa  $Ox$ , punctul  $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$ .

- Dacă  $\Delta < 0$ , ecuația de gradul II nu are soluții reale. Deci, funcția  $f$  nu are zerouri.

Prin urmare, graficul  $G_f$  nu intersectează axa  $Ox$ .



**Exercițiu**

Fie: a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x - 10$ ; b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 - 2x$ .  
Aflați zerourile funcțiilor  $f$  și  $g$ .



### 3.4.5. Semnul funcției de gradul II

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Determinați mulțimea valorilor lui  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0$ ).

Rezolvare:

Semnul funcției  $f$  depinde de semnul discriminantului  $\Delta$  al ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , asociată funcției  $f$ .

Scriem funcția  $f$  sub forma canonică:  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2} \right]$ .

1) Cazul  $\Delta < 0$

Semnul valorilor funcției  $f$  coincide cu semnul numărului  $a$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  (fig. 32).

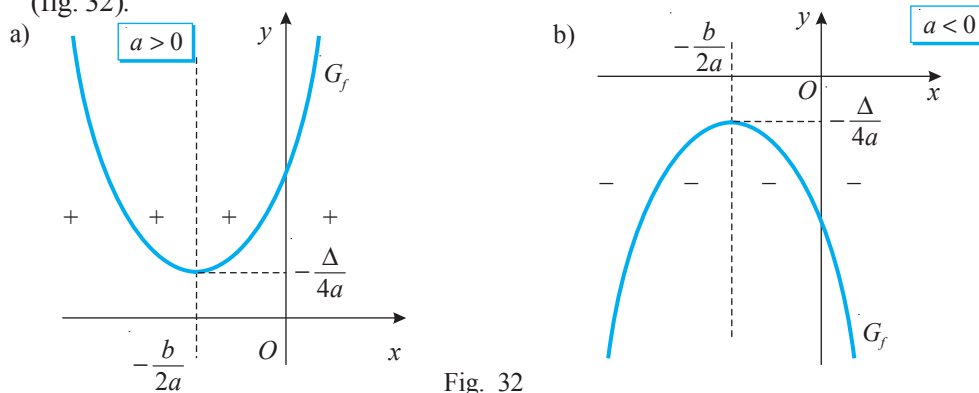


Fig. 32

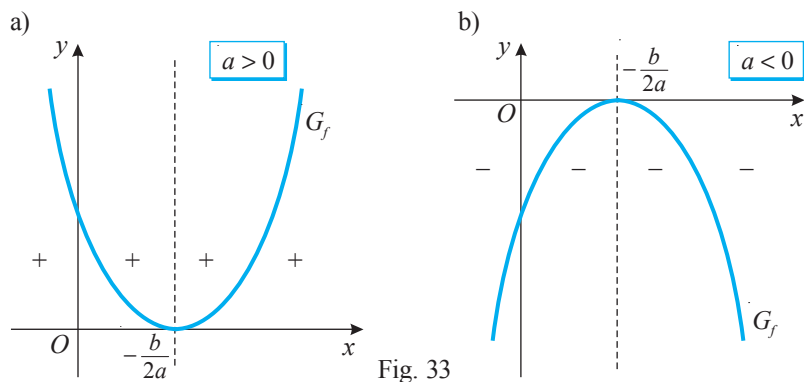


Fig. 33

2) Cazul  $\Delta = 0$

Semnul valorilor funcției

$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  coincide cu semnul numărului  $a$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$  (fig. 33).

3) Cazul  $\Delta > 0$

Semnul valorilor funcției  $f$ , cu zerourile  $x_1 < x_2$ , coincide cu semnul numărului  $a$ , pentru orice  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ , și este opus semnelui lui  $a$ , pentru orice  $x \in (x_1; x_2)$  (fig. 34).

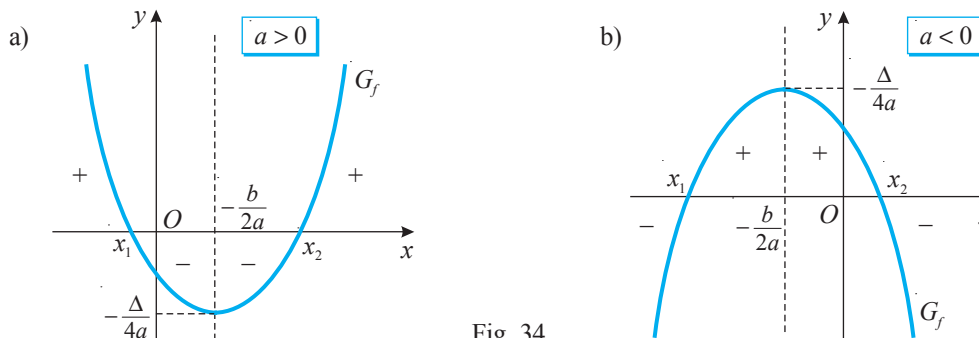


Fig. 34

**Observație**

Atât semnul funcției de gradul II, cât și intervalele ei de monotonie pot fi identificate mai simplu folosind reprezentarea grafică a acesteia.



**Exercițiu**

Fie: a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - x - 2$ ; b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -x^2 + 2x - 3$ .  
Aflați semnele funcțiilor  $f$  și  $g$ .

**3.4.6. Graficul funcției de gradul II**



**Investigăm**

Pentru a trasa graficul funcției de gradul II, procedăm astfel:

- ① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului  $G_f$ :
  - a) cu axa  $Ox$ : rezolvăm ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , asociată funcției  $f$ ; soluțiile ecuației sunt zerourile funcției  $f$ ;
  - b) cu axa  $Oy$ : calculăm  $f(0)$ .
- ② Aflăm coordonatele vârfului parabolei:  $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ; punem în evidență axa de simetrie: dreapta  $x = -\frac{b}{2a}$  este axa de simetrie a graficului funcției de gradul II.
- ③ Completăm tabelul, numit **tabelul de variație** al funcției  $f$ . Tabelul include abscisele punctelor de intersecție a graficului  $G_f$  cu axele  $Ox$  (dacă există) și  $Oy$ , abscisa vârfului parabolei și, eventual, alte valori ale lui  $x$ .
- ④ Completând tabelul de variație, putem stabili monotonia funcției, punctele de extrem, extremele ei, precum și comportamentul graficului  $G_f$  la  $-\infty$ , la  $+\infty$ .
- ⑤ Trasăm graficul funcției.

**Observație**

Cu  $\searrow$  vom nota funcția descrescătoare, iar cu  $\nearrow$  – funcția crescătoare.

**Aplicăm**

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ .
  - a) Trasați graficul funcției  $f$ .
  - b) Precizați monotonia, semnul și extremele funcției  $f$ .

*Rezolvare:*

a) ① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului  $G_f$  cu axa  $Ox$ : rezolvăm ecuația  $x^2 - 2x + 3 = 0$ , asociată funcției  $f$ ; deoarece  $\Delta = -8 < 0$ , rezultă că graficul  $G_f$  nu intersectează axa  $Ox$ .

Determinăm coordonatele punctului de intersecție a graficului  $G_f$  cu axa  $Oy$ :  $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$ ; prin urmare, graficul  $G_f$  intersectează axa  $Oy$  în punctul  $(0; 3)$ .

② Aflăm coordonatele vârfului parabolei:  $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$ ,  $y_0 = f(x_0) = 2$ .

Așadar, punctul  $V(1; 2)$  este vârful parabolei. Prin urmare, dreapta de ecuație  $x = -\frac{b}{2a} = 1$  este axa de simetrie a graficului  $G_f$ .

③–④ Completăm tabelul de variație al funcției  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x + 3$	$+\infty$	$6$	$3$	$2$	$3$	$6$	$+\infty$
Concluzie	min						

⑤ Trasăm graficul funcției  $f$  – parabola  $G_f$  (fig. 35).

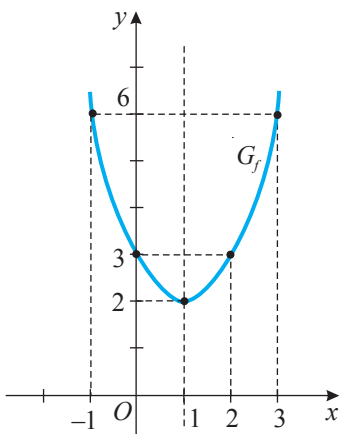


Fig. 35


b) Funcția  $f$  ia valori pozitive pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty; 1]$  și strict crescătoare pe  $[1; +\infty)$ .

Punctul  $x = 1$  este punct de minim pentru funcția  $f$  și  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 2$ .

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Aflați:
- valorile lui  $x$  pentru care  $f(x)$  este: 36; -4; 0,25; 100; 7; -1,6;
  - valorile lui  $f$ , știind că  $x$  este: 1,4; -0,2; -3; 0,4; 2;  $\sqrt{5}$ ; 7, (2);  $-4\sqrt{3}$ .

2.  **Investigați!** Fie punctele:
- $A(2; -2)$ ;      b)  $B(1; 2)$ ;      c)  $C(-1; 0,5)$ ;
  - $D(1; -0,5)$ ;      e)  $E(0,5; 0,5)$ .
- Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2$ ;
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -0,5x^2$ ;
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0,5x^2$ .

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- $f(x) = 3x^2$ ;      b)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ ;
  - $f(x) = -1,5x^2$ ;      d)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ .

- Trasați graficul funcției  $f$ .
- Determinați proprietățile funcției  $f$ .

6. Fie funcțiile:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2,3x^2$ ;  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -4x^2$ ;  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{3}{4}x^2$ .  
Precizați: a) extremele; b) monotonia; c) semnele funcțiilor.

7. Aflați zerourile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :


- $f(x) = 16x^2 - 4$ ;      b)  $f(x) = 6x^2 + 3$ ;      c)  $f(x) = x^2 - 8x + 12$ ;      d)  $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$ .

8.  **Lucrați în grup!** Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $f(x) = x^2 - 7x + 12$ ;      b)  $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$ ;      c)  $f(x) = x^2 - x + 4$ ;
- $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ ;      e)  $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ ;      f)  $f(x) = 9 - x^2$ .

- Trasați graficul funcției  $f$ .
- Determinați axa de simetrie a graficului și proprietățile funcției  $f$ .

### Formăm abilitățile și aplicăm


9.  **Lucrați în grup!** Trasați graficul și determinați proprietățile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $f(x) = x^2 + 3$ ;      b)  $f(x) = 2x^2 - 1$ ;      c)  $f(x) = 3(x+2)^2$ ;
- $f(x) = -2(x-1)^2$ ;      e)  $f(x) = 4(x+2)^2 - 6$ ;      f)  $f(x) = -(x-3)^2 + 2$ .

10. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $f(x) = 4,7x^2$ ;      b)  $f(x) = -3x^2 + 2$ ;      c)  $f(x) = 4(x-1)^2$ ;
- $f(x) = -2(x+3)^2$ ;      e)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ ;      f)  $f(x) = 3(x-4)^2 + 5$ .

Aflați mulțimea valorilor  $E(f)$ .

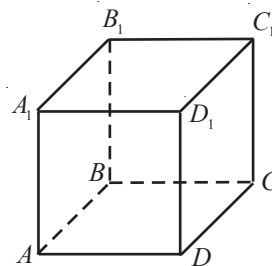
4.  **Lucrați în perechi!** a) Construiți o funcție care arată dependența ariei suprafeței totale a cubului de lungimea muchiei lui.

b) Reprezentați graficul acestei funcții.

c) Aflați:

- aria totală a cubului, știind că lungimea muchiei lui este de: 0,5 cm; 1,2 dm; 3 m.
- lungimea muchiei cubului, știind că aria suprafeței totale a lui este de:

16 cm<sup>2</sup>; 8 $\sqrt{3}$  dm<sup>2</sup>; 4 m<sup>2</sup>.



5. Completați cu numere reale, astfel încât punctul  $A(\blacksquare; \blacksquare)$  să aparțină graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $f(x) = x^2$ ;      b)  $f(x) = -x^2$ ;
- $f(x) = 3x^2$ ;      d)  $f(x) = -2,5x^2$ ;
- $f(x) = 3x(x-2)$ ;      f)  $f(x) = -0,5x(x+1)$ ;
- $f(x) = x^2 - x - 2$ ;      h)  $f(x) = -3x^2 + x + 1$ ;
- $f(x) = x^2 + 3x + 5$ .

11. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

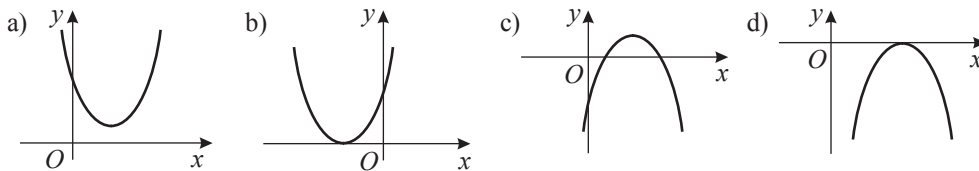
- a)  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2, g(x) = 3x^2 + 2, h(x) = 3x^2 - 4;$   
 b)  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2, g(x) = -2(x+1)^2 + 3, h(x) = -2(x-3)^2 - 4.$   
 Ce ați observat?

12.  **Lucrați în perechi!** Fie tabelul de variație al funcției  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$3,5$	$5$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	$+\infty$	$18$	$10$	$0$	$-2,25$	$0$	$+\infty$
Concluzie	min						

Trasați graficul funcției  $f$ .

13. Fie graficul funcției de gradul II:



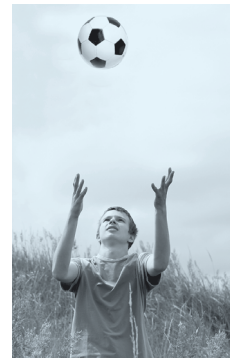
Aflați semnul coeficientului  $a$  și al discriminantului  $\Delta$  ai ecuației asociate funcției respective.

14. Completați cu unul dintre semnele „<”, „>” sau „=”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

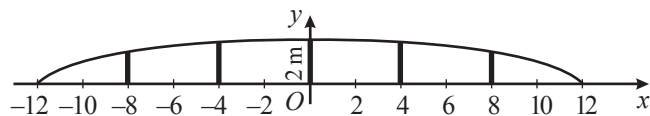
- 1) Dacă graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ , reprezintă o parabolă cu ramurile în jos și vârful situat pe axa  $Ox$ , atunci  $a$    $0, \Delta$    $0$ .  
 2) Dacă graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ , reprezintă o parabolă cu ramurile în sus și vârful situat pe axa  $Oy$ , atunci  $a$    $0, \Delta$    $0$ . Analizați toate cazurile posibile.

15. Fie  $h$  înălțimea (în metri) la care se află o minge aruncată în sus,  $t$  – timpul (în secunde) în care mingea s-a aflat în zbor. Dependența variabilei  $h$  de variabila  $t$  se exprimă prin formula:  
 $h = 24t - 4,8t^2$ .

- a) Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea?  
 b) În cât timp mingea se va ridica în zbor și în cât timp va coborî?  
 c) Peste câte secunde, după ce a fost aruncată în sus, mingea va cădea pe pământ?




16. Balustrada unui pod are forma unui arc de parabolă. Înălțimea balustradei este de 2 m, iar lungimea coardei care o subîntinde – de 24 m. Balustrada are 5 stâlpi verticali, fixați în punctele care împart coarda în părți de aceeași lungime. Aflați lungimile acestor stâlpi.




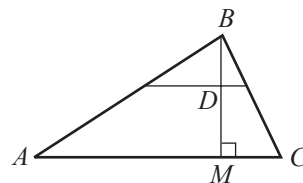
17. Trasați graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = (x+2)(x-4);$       b)  $f(x) = -6x(x+1);$       c)  $f(x) = -2(x-3)(5-x);$   
 d)  $f(x) = 5(x-1)(x-3);$       e)  $f(x) = -(x-3)(x-4);$       f)  $f(x) = 4x(x-2).$

18.  **Lucrați în perechi!** Parabola 1)  $y = 3x^2$ ; 2)  $y = -0,5x^2$  a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei  $Ox$  și cu 3 unități de-a lungul axei  $Oy$ .

- a) Determinați funcția  $g$  al cărei grafic este parabola obținută în urma acestor transformări. Câte funcții pot fi determinate?  
b) Reprezentați graficul  $G_g$  pentru fiecare funcție obținută.

19.  **Investigați!** Lungimea laturii  $AC$  a triunghiului  $ABC$  este  $a$ , iar înălțimea corespunzătoare acesteia  $-h$ . Prin punctul  $D$  al înălțimii  $BM$  este dusă o dreaptă paralelă cu  $AC$ . Exprimați, dacă e posibil, ariile figurilor obținute ca funcții de variabila  $x$ , unde  $x = BD$ .



20. Determinați, utilizând graficele, apoi în mod analitic, punctele de intersecție a graficelor funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x^2 - x + 4$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -x + 2$ ;

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x^2$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 3$ .

21. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x + 4)^2 - 1$ .

- a) Trasați graficul funcției  $f$ .  
b) Determinați axa de simetrie a graficului funcției  $f$ .  
c) Determinați proprietățile funcției  $f$ .

22. Fie  $h$  înălțimea (în metri) la care se află un acrobat în timpul saltului, iar  $x$  (în metri) distanța parcursă de el în timpul acestui salt. Dependența variabilei  $h$  de variabila  $x$  se exprimă prin formula  $h(x) = -0,75x^2 + 3x$ .

- a) Trasați graficul funcției  $h$  pentru  $x \in [0; 4]$ .  
b) Care este înălțimea maximă la care poate să ajungă acrobatul în timpul saltului?



### Dezvoltăm abilitățile și creăm

23. (EG, 2022) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 + 2x + m$ ,  $m \neq 0$ . Determinați valorile reale ale lui  $m$  pentru care graficul funcției  $f$  este o parabolă cu ramurile în jos și cu vârful situat pe axa absciselor.

24. Aflați valorile parametrului real  $a$  pentru care are zerouri funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ :

a)  $f(x) = ax^2 + 7$ ;      b)  $f(x) = ax^2 - 4$ ;      c)  $f(x) = x^2 + a$ ;      d)  $f(x) = 2x^2 - a$ .

25. Aflați valorile coeficienților  $b$  și  $c$ , astfel încât parabola  $y = x^2 + bx + c$  să aibă vârful în punctul  $V(-3; 6)$ .

26. Determinați funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , al cărei grafic trece prin punctele  $A(-2; 0)$ ,  $B(1; 6)$  și care are valoarea maximă 6.

27. Formulați și rezolvați exerciții asemănătoare cu exercițiile 13, 15, 16, 18, 21, 23.

28. Trasați graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{dacă } x \geq 3, \\ 3 - x, & \text{dacă } x < 3; \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{dacă } x > 0, \\ x - 2, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$



### Problemă pentru campioni

29. Trasați graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite prin:

a)  $f(x) = x^2 - 6|x| - 7$ ;

b)  $f(x) = x^2 - 5|x + 4| - 26$ ;

c)  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ .

## § 4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$



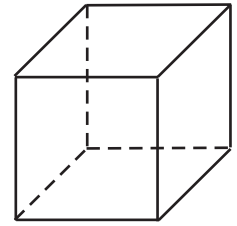
### Investigăm

- Fie cubul cu muchia  $a$ . Scrieți o funcție care să descrie dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale.

Rezolvare:

Volumul cubului se calculează aplicând formula  $V = a^3$ . Prin urmare, dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale este descrisă de funcția  $g: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty), g(x) = x^3$ .

Această funcție ne conduce la funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ .



- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ .

- Trasați graficul funcției  $f$ .
- Stabiliți proprietățile funcției  $f$ .

Rezolvare:

- Completăm tabelul de valori al funcției  $f$  pentru valoarea zero, unele valori pozitive și negative ale lui  $x$ :

$x$	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	8	1	0	1	8

Graficul trasat „prin puncte” este reprezentat în figura 36.

- Proprietăți ale funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$**

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Prin urmare,  $x = 0$  este zeroul funcției  $f$ .
- Funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- Funcția  $f$  ia valori negative pentru  $x \in (-\infty; 0)$  și valori pozitive pentru  $x \in (0; +\infty)$ .
- Deoarece  $f(-x) = -f(x)$ , rezultă că dacă punctul  $E(x_0; y_0) \in G_f$ , atunci și punctul  $E'(-x_0; -y_0) \in G_f$ . Deci, graficul  $G_f$  este simetric față de originea  $O(0; 0)$  (fig. 35).

Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ , se numește **parabolă cubică**.

- Funcția  $f$  nu are extreme.

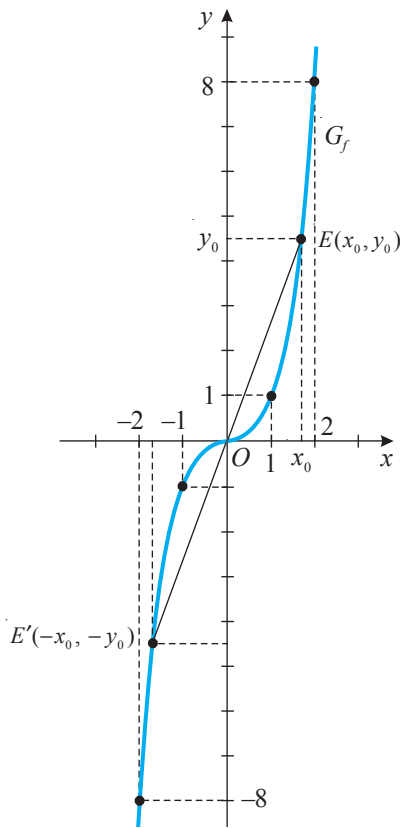


Fig. 36

### Aplicăm

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ . Aflați valorile lui  $x$  pentru care  $f(x)$  este:
  - 64;
  - $\frac{27}{8}$ ;
  - 125.

Rezolvare:

- $x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -4$ ;
- $x^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ;
- $x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$ .

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

- Fie punctele:


- $A(-2; 8)$ ;
- $B(3; 27)$ ;
- $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$ ;
- $D(0; 1)$ ;
- $E(-\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$ .

Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ .

- Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ . Aflați:

- valorile lui  $x$  pentru care  $f(x)$  este: 125; -64; -16; 3,375; -1; 0,001; -343.
- valorile lui  $f$ , știind că  $x$  este: 0,2;  $-\frac{2}{5}$ ; 1,3;  $2\sqrt{2}$ ; 10; 2,(5).

**Formăm abilitățile și aplicăm**

3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$ , prin metoda grafică, ecuația: a)  $x^3 = x - 1$ ; b)  $x^3 = -2x$ ; c)  $x^3 = 3x + 2$ ; d)  $x^3 = 2 - x$ .
4.  **Lucrați în perechi!** 1) Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:  
 a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = -x^3$ ;  
 b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3 + 1$ ;  
 c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3 - 2$ .  
 2) Aflați semnele funcțiilor  $f$  și  $g$ . 3) Aflați extremele funcțiilor  $f$  și  $g$ .

**Dezvoltăm abilitățile și creăm**

5. Aflați extremele funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definite prin:  
 a)  $f(x) = x^3 - 2$ ; b)  $f(x) = (x + 2)^3$ ; c)  $f(x) = 2(x - 8)^2 + 1$ ; d)  $f(x) = -5x + 1$ .
6. Trasați graficul și precizați monotonia funcției:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$
7. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|^3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = |x^3|$ .

**Exerciții și probleme recapitulative**

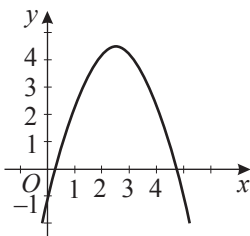
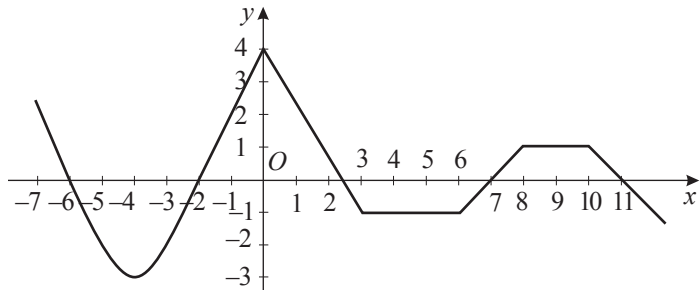
**Fixăm cunoștințele**

1. Fie funcția:  
 a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3 - 2x$ ; b)  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ; c)  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = -\frac{2}{x}$ ;  
 d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2$ ; e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 1$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ .
- Precizați care dintre următoarele puncte aparțin graficului  $G_f$ :  
 1)  $A(-1; 1)$ ; 2)  $B(1; 1)$ ; 3)  $C(0; 1)$ ; 4)  $O(0; 0)$ ;  
 5)  $D(1; -2)$ ; 6)  $E(0; 3)$ ; 7)  $F(4; 2)$ ; 8)  $M(-2; 1)$ .

2.  **Lucrați în perechi!**

Analizați graficul  $G_f$ . Aflați:

- a) zerourile funcției  $f$ ;  
 b) intervalele de monotonie ale funcției  $f$ ;  
 c) intervalele de semn constant ale funcției  $f$ ;  
 d) punctele de extrem și extremele funcției  $f$ .



3. (EG, 2023) În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Scrieți în casetă unul dintre cuvintele *pozitiv* sau *negativ*, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.  
 „Valoarea maximă a funcției  $f$  este un număr .

**Formăm abilitățile și aplicăm**


4. Fie mulțimea  $P = \{a, b, c, d\}$ . Construiți prin diagrame cel puțin patru funcții definite pe mulțimea  $P$  cu valori în  $P$ .
5. Scrieți o formulă care să exprime dependența lungimii cercului de raza lui. Este această dependență o proporționalitate directă?
6. Mariana avea 15 lei. După ce a procurat  $x$  timbre la prețul de 0,5 lei, i-au rămas  $y$  lei.  
 a) Exprimați printr-o formulă dependența lui  $y$  de  $x$ .  
 b) Aflați domeniul de definiție al funcției obținute.



7. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -1,5x + b$ , pentru  $b \in \{-2; 0; 2; 5\}$ .  
Ce ați observat?

8. Trasați graficul și determinați proprietățile funcției  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ , dacă:  
a)  $f(x) = -\frac{4}{x}$ ;                      b)  $f(x) = \frac{1}{2x}$ ;                      c)  $f(x) = \frac{7}{x}$ ;                      d)  $f(x) = -\frac{1}{5x}$ .

9. Rezolvați în  $\mathbb{R}$ , prin metoda grafică, ecuația:  
a)  $\sqrt{x} = 3x - 2$ ;                      b)  $\frac{25}{x} = x$ ;                      c)  $\frac{1}{2x} = 2x$ ;                      d)  $3x^2 = 5x - 2$ .

10.  **Lucrați în perechi!** Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 + n$ , pentru  $n \in \{-1; 0; 1; 3\}$ . Ce ați observat?


11. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2(x - m)^2$ , pentru  $m \in \{-1; 0; 1; 3\}$ . Ce ați observat?

12. Apa dintr-un fierbător, la un moment dat, avea temperatura de 10 °C. În continuare, peste fiecare minut, temperatura apei creștea cu 4 °C, astfel încât a atins valoarea de 100 °C. Exprimați printr-o formulă dependența temperaturii apei  $y$  (în grade Celsius) de timpul încălzirii  $t$  (în minute). Schițați graficul acestei dependențe.

Utilizând graficul, aflați:


- a) temperatura apei peste:
  - 1) 5 minute;                      2) 10 minute;
  - 3) 15 minute;                      4) 20 de minute de la începutul încălzirii.
- b) peste câte minute temperatura apei a atins valoarea de:
  - 1) 50 °C;                      2) 70 °C;                      3) 100 °C.



13.  **Lucrați în grup!** Trasați graficul și stabiliți proprietățile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă:  
a)  $f(x) = 1 - x - x^2$ ;    b)  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ ;    c)  $f(x) = 6x - 1 - 9x^2$ ;    d)  $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$ .

14. Aflați axa de simetrie a graficului și extremele funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  
a)  $f(x) = 5x^2 + 3$ ;    b)  $f(x) = x^2 - 4$ ;    c)  $f(x) = -3(x + 2)^2$ ;    d)  $f(x) = 6x^2 - x + 3$ .

15. Definiți printr-o formulă funcția de gradul II care este:  
a) strict crescătoare pe  $(-\infty; 4]$  și strict descrescătoare pe  $[4; +\infty)$ ;  
b) strict descrescătoare pe  $(-\infty; -2]$  și strict crescătoare pe  $[-2; +\infty)$ .

16.  **Investigați!** Parabola – graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x^2$ , a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei  $Oy$  și cu 3 unități de-a lungul axei  $Ox$ .

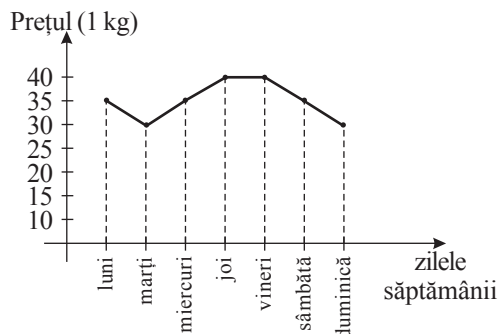
- a) Determinați funcția  $g$  al cărei grafic este parabola obținută în urma efectuării acestor transformări ale graficului funcției  $f$ . Câte funcții  $g$  ați determinat?
- b) Trasați graficul fiecărei funcții obținute.
- c) Determinați proprietățile fiecărei funcții obținute.

17. Aflați coordonatele punctelor de intersecție cu axele  $Ox$  și  $Oy$  ale graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  
a)  $f(x) = 2x^2 - x - 15$ ;                      b)  $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$ .


18. Dați exemple de utilizare a funcțiilor de gradul II în sport.

19. În desenul alăturat este prezentat graficul modificării prețului (în lei) a 1 kg de coarne la piață într-o săptămână (luni–duminică). Determinați:

- a) Cât costă 1 kg de coarne joi? Dar duminică?
- b) În care dintre zile prețul a fost cel mai mare? Care a fost acel preț?
- c) În care dintre zile prețul a fost cel mai mic? Care a fost acel preț?
- d) În care dintre zile prețul nu s-a schimbat?





20.  **Lucrați în perechi!** Un fotbalist șutează spre poartă. Traectoria mingii poate fi descrisă de funcția definită prin formula  $f(x) = -0,0125x^2 + 0,5x$ , unde  $x$  este distanța (în metri) parcursă de minge de la începutul șutului, iar  $y$  – înălțimea (în metri) la care se ridică mingea deasupra terenului de fotbal.
- Trasați graficul acestei funcții, pentru  $x \in [0; 30]$ .
  - Aflați înălțimea maximă la care poate să ajungă mingea.
  - Determinați distanța maximă parcursă de minge de la începutul șutului.

21. Grăbindu-se la școală, un elev nu are grijă să închidă ermetic robinetul. El pleacă de acasă în fiecare zi la ora 7.30 și se întoarce la 14.30. Se cunoaște că într-o oră curg 0,5 litri de apă.
- Calculați pierderea de apă în timpul absenței elevului timp de 5 zile.
  - Calculați costul apei pierdute ( $1 \text{ m}^3 = 15,3$  lei;  $1 \text{ l} = 0,001 \text{ m}^3$ ).
  - Reprezentați grafic dependența apei pierdute ( $l$ ) față de timpul (ore) cât curge apa din robinet într-o zi.



### Dezvoltăm abilitățile și creăm

22. Definiți printr-o formulă funcția de gradul I care satisface condiția:
- $f(2+x) = -5x+3$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ;
  - $f(3x-1) = 1-2x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
23. Trasați graficul funcției:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2, & \text{dacă } x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$
  - $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9, & \text{dacă } x \leq -2, \\ -\frac{2}{x}, & \text{dacă } -2 < x < 2, \\ -0,5x, & \text{dacă } x \geq 2. \end{cases}$
24. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + bx + c$ .  
Determinați coeficienții  $b$  și  $c$ , știind că vârful parabolei  $G_f$  este punctul  $A(-2; 4)$ .
25. Determinați funcția de gradul II al cărei grafic trece prin punctele:
- $A(-3; 0), B(2; 5)$  și care are valoarea maximă 5;
  - $A(0; 2), B(-1; 4)$  și care are valoarea minimă 3.
26. Trasați graficul funcției:
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3|x| - 4$ ;
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |0,2x + 5|$ ;
  - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3x^2 - x - 2|$ .
27. Rezolvați în  $\mathbb{R}$ , prin metoda grafică, ecuația:
- $x^3 = x^2 - x + 1$ ;
  - $2x = x^3 - 4$ .
28. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - x + 1$ . Pentru care valori reale ale lui  $a$  are loc relația  $f(a) = -3f(-a) + 6$ ?
29. Aflați cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D$  – domeniul de definiție):
- $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ ;
  - $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$ .
30. (EG, 2021) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -mx + m^2, m \neq 0$ . Determinați valorile reale ale lui  $m$ , pentru care funcția  $f$  este monoton crescătoare și graficul funcției  $f$  intersectează axa  $Oy$  într-un punct cu ordonata egală cu 4.



### Problemă pentru campioni 31. Trasați graficul funcției:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + x^3$ ;
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - x^3$ .

32.  **Lucrați în grup!**



### Proiect STREAM. Funcțiile în arte.

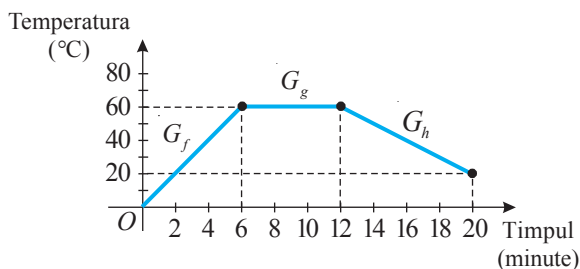
# Test sumativ



Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

## Varianta I

1. În desen este reprezentat graficul variației temperaturii apei timp de 20 de minute:



a) Indicați litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă este falsă: „ $G_f$  este graficul unei funcții crescătoare”.

**A      F**

- b) Aflați cu câte grade a crescut temperatura apei în primele 6 minute.  
 c) Aflați cu câte grade s-a schimbat temperatura apei în ultimele 8 minute.  
 d) Aflați perioada în care temperatura apei nu s-a schimbat.  
 e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele  $G_f$ ,  $G_g$  și  $G_h$ .

2. Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care ambele funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -(x-4)^2$ , și  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $g(x) = \frac{4}{x}$ , sunt descrescătoare. Argumentați răspunsul.

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x^2 - 5x - 3$ .  
 a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „<”, „=”, sau „>”, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată: „ $f(0)$    $f(-1)$ ”.

b) Trasați graficul  $G_f$ .

c) Determinați  $E(f)$ .

d) Completați casetele:

$f /$  pentru  $x \in$

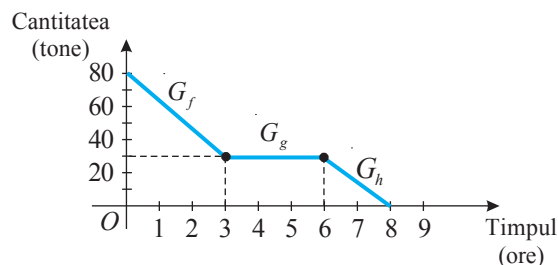
$f \setminus$  pentru  $x \in$

$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) =$

e) Formulați un exemplu din fizică referitor la aplicarea funcției de gradul II.

## Varianta II

1. În desen este reprezentat graficul de descărcare a grânelor dintr-un depozit timp de 8 ore:



a) Indicați litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă este falsă: „ $G_f$  este graficul unei funcții crescătoare”.

**A      F**

- b) Aflați cu cât s-a micșorat cantitatea de grâne în primele 3 ore.  
 c) Aflați cu cât s-a micșorat cantitatea de grâne în ultimele 2 ore.  
 d) Aflați perioada în care nu s-au efectuat lucrări în depozit.  
 e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele  $G_f$ ,  $G_g$  și  $G_h$ .

2. Determinați valorile reale ale lui  $x$  pentru care ambele funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -(x+2)^2$ , și  $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ ,  $g(x) = -\frac{8}{x}$ , sunt crescătoare. Argumentați răspunsul.

3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ .  
 a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „<”, „=”, sau „>”, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată: „ $f(-2)$    $f(1)$ ”.

b) Trasați graficul  $G_f$ .

c) Determinați  $E(f)$ .

d) Completați casetele:

$f \setminus$  pentru  $x \in$

$f /$  pentru  $x \in$

$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) =$

e) Formulați un exemplu din viața cotidiană privind aplicarea funcției de gradul II.

# Ecuatii. Sisteme de ecuații

*Cea mai importantă misiune a civilizației este de a-l învăța pe om să gândească.*

Thomas Edison

## § 1. Ecuatii de forma $ax + b = 0$ , $a, b \in \mathbb{R}$ . Recapitulare și completări

### 1.1. Noțiunea de ecuație cu o necunoscută



*Ne amintim*

• Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $2x - 3 = 5$ ;      b)  $x^2 + 8 = 0$ ;      c)  $0,25x(8x + 4) + 5 = 2(x^2 + 0,5x + 2) + 1$ .

*Rezolvare:*

a) DVA:  $\mathbb{R}$ .  $2x - 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ .  $S = \{4\}$ .

b) DVA:  $\mathbb{R}$ .  $x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -8$ .  $S = \emptyset$ .

c) DVA:  $\mathbb{R}$ .  $0,25x(8x + 4) + 5 = 2(x^2 + 0,5x + 2) + 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \square = \square \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ .  $S = \mathbb{R}$ .

• Fie ecuațiile  $(x - 3)(x + 1) = 0$  și  $2x^2 - 4x - 6 = 0$ .  
Stabiliți dacă ele sunt echivalente.

*Rezolvare:*

DVA al ambelor ecuații este  $\mathbb{R}$ .  $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$  sau  $x = -1$ .  $S_1 = \{-1; 3\}$ .

Mulțimea soluțiilor ecuației  $2x^2 - 4x - 6 = 0$  este  $S_2 = \{-1; 3\}$ .

Deci,  $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$ , deoarece mulțimile soluțiilor lor sunt egale:  
 $S_1 = S_2 = \{-1; 3\}$ .

#### Definiție

Egalitatea de forma  $A(x) = B(x)$ , unde  $A(x)$  și  $B(x)$  sunt expresii în care apare necunoscuta  $x$ , se numește **ecuație cu necunoscuta  $x$** .

#### Observație

Ecuația poate fi cu mai multe necunoscute. De exemplu,  $5x - 3y = 3$  este o ecuație cu două necunoscute,  $3u + 2v - 5t = 0$  este o ecuație cu trei necunoscute.

#### Definiție

Valoarea necunoscutei care transformă ecuația într-o propoziție adevărată se numește **soluție** a ecuației.



*Rețineți!*

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu  $S$ .

$A$  **rezolva o ecuație** înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

O ecuație poate avea o mulțime finită sau infinită de soluții sau poate să nu aibă soluții.



**Rețineți!**

Rezolvarea unei ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acesteia.

**Definiții**

- ◆ Mulțimea valorilor necunoscutei (necunoscutelor) pentru care au sens toate expresiile din ecuație se numește **domeniul valorilor admisibile** (DVA) al ecuației.
- ◆ Două ecuații cu aceeași necunoscută (aceleași necunoscute) se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Între ecuațiile echivalente se scrie simbolul „ $\Leftrightarrow$ ”.



**Exercițiu**

Stabiliți dacă sunt echivalente ecuațiile: a)  $x^2 + 5 = 0$  și  $1 + 2x^2 = 0$ ;  
b)  $2 - 3x = 4(x + 0,5)$  și  $x^2 + 4 = 0$ .



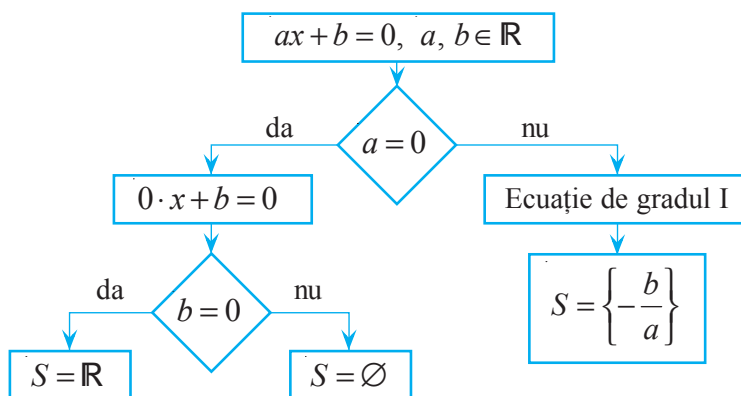
**Rețineți!**

Ecuațiile echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al ecuației inițiale) se numesc **echivalente în această mulțime**.

**1.2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută**

- Aplicând următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale, obținem ecuații echivalente:
  1.  $A(x) = B(x) \Leftrightarrow B(x) = A(x)$ .
  2.  $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \pm C(x) = B(x) \pm C(x)$ , unde expresia  $C(x)$  are sens pentru orice  $x \in \text{DVA}$  al ecuației inițiale.
  3.  $A(x) = B(x) \Leftrightarrow A(x) \cdot C(x) = B(x) \cdot C(x)$ , unde expresia  $C(x)$  are sens și  $C(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in \text{DVA}$  al ecuației inițiale.
  4.  $A(x) = B(x) \Leftrightarrow \frac{A(x)}{C(x)} = \frac{B(x)}{C(x)}$ , unde expresia  $C(x)$  are sens și  $C(x) \neq 0$  pentru orice  $x \in \text{DVA}$  al ecuației inițiale.

**Schema rezolvării ecuației de forma  $ax + b = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$**



**Definiții**

- ◆ Ecuația de forma  $ax + b = 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se numește **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.
- ◆  $a, b$  se numesc **coeficienții ecuației**.

Ecuația de gradul I cu o necunoscută are **soluția unică** numărul  $-\frac{b}{a}$ . Deci,  $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$ .

### 1.3. Ecuații reducibile la ecuația de gradul I cu o necunoscută

Unele ecuații pot fi reduse la ecuații de gradul I cu o necunoscută cu ajutorul unor substituții sau aplicând relațiile de echivalență.

#### Exemplu

Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $x^2 - 2x + 3 = x(x + 2) - 5$ ; b)  $\frac{2x}{x+3} = \frac{5x}{x+3} - 9$ .

Rezolvare:

a) DVA:  $\mathbb{R}$ .

$$x^2 - 2x + 3 = x(x + 2) - 5 \Leftrightarrow \text{desfacem parantezele}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2x - 5 \Leftrightarrow \text{aplicăm relația de echivalență 2}$$

$$\Leftrightarrow -4x = -8 \mid :(-4) \Leftrightarrow \text{aplicăm relația de echivalență 4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2.$$

Răspuns:  $S = \{2\}$ .

b) DVA:  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ . Notând  $\frac{x}{x+3} = t$ , obținem ecuația de gradul I

$$2t = 5t - 9 \Leftrightarrow 3t - 9 = 0$$

cu necunoscuta  $t$ , care are soluția 3. Revenind la necunoscuta  $x$ , obținem în DVA:

$$\frac{x}{x+3} = 3 \Leftrightarrow x = 3(x+3) \Leftrightarrow x = -4,5.$$

Cercetăm dacă soluția obținută aparține DVA:  $-4,5 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ; deci,  $-4,5 \in \text{DVA}$ .

Răspuns:  $S = \{-4,5\}$ .

### 1.4. Ecuații de gradul I cu o necunoscută, cu parametru (opțional)

Ecuațiile de gradul I cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluțiilor ecuației în funcție de valorile parametrului.

#### Exemplu

Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $mx - 3 = 2x + 5m$ , unde  $m$  este un parametru real.

Rezolvare:

$$\text{DVA: } \mathbb{R}. \quad mx - 3 = 2x + 5m \Leftrightarrow x(m - 2) = 5m + 3 \Leftrightarrow (m - 2)x = 5m + 3.$$

• Dacă  $m = 2$ , ecuația devine  $0 \cdot x = 13$ . Deci, ecuația nu are soluții.

• Dacă  $m \neq 2$  ( $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ), obținem  $x = \frac{5m + 3}{m - 2}$ .

Răspuns: Pentru  $m = 2$ ,  $S = \emptyset$ ; pentru  $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  $S = \left\{ \frac{5m + 3}{m - 2} \right\}$ .

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile de gradul I:

a)  $2x - 1 = 0$ ;

b)  $3(x - 1) = 5$ ;

c)  $\frac{1}{x-1} = 2$ ;

d)  $x^2 - x = 0$ ;

e)  $3x = 0$ ;

f)  $6x = -4$ ;

g)  $2x + \frac{1}{x} + 3 = 0$ ;

h)  $-\sqrt{5}x + 2,5 = 0$ .

2.  **Investigați!** Determinați care dintre elementele mulțimii  $\{-2; -1; 0; 1,5; 5\}$  este soluție a ecuației:

a)  $3x - 2 = x - 6$ ;

b)  $\frac{x+1}{x} = 1$ ;

c)  $(x+2)(x-5) = 0$ ;

d)  $x(x+1,5) = 0$ ;

e)  $\frac{2x-1}{x-2} = 2$ ;

f)  $x(x+1,5)(x-5) = 0$ .

3. Aflați DVA al ecuației:

a)  $2(x-5) - 4 = 5x + 1$ ;

b)  $\frac{3}{x-5} = 4$ ;

c)  $x(x+3) = 0$ .

4.  **Lucrați în perechi!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $2x - 1 = 0$ ;                      b)  $-\frac{3}{4}x = \frac{1}{5}$ ;  
 c)  $0,5x + 4 = 0$ ;                    d)  $3 - 2x = 0$ ;  
 e)  $1,4 + 2x = 0$ ;                    f)  $-\frac{5}{7}x - \frac{1}{3} = 0$ .

5. Aflați zeroul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = 3x - 1$ ;                      b)  $f(x) = 2 - 6x$ ;  
 c)  $f(x) = -\sqrt{19}x$ ;                    d)  $f(x) = \sqrt{5}x - 2\sqrt{5}$ .

6. Aflați zerourile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = 3x - 0,5$ ;                    b)  $f(x) = -8x + \sqrt{8}$ ;  
 c)  $f(x) = -0,3x - 2,8$ .

Formăm abilitățile și aplicăm

7. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $2(x-1) + 3(x+2) = 5x + 4$ ;  
 b)  $6 - 3(2-x) + 4x = 7 - x$ ;  
 c)  $-1,4(5-x) + 2,5(2+x) = -3,6 + x$ ;  
 d)  $5 + 7(1-x) - 5x = x - 8$ .

8.  **Lucrați în perechi!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația cu ajutorul unei substituții:

- a)  $\frac{4}{x-5} = 7 - \frac{3}{x-5}$ ;                      b)  $-\frac{3(x+2)}{x} = \frac{2(x+2)}{x} + 5$ ;  
 c)  $\frac{5t}{t+1} = -\frac{1}{2} + \frac{3t}{t+1}$ ;                    d)  $\frac{0,5a+1,5}{2a} = 9 - \frac{a+3}{a}$ .

9. Completați astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

- a)  $3(x-1) - 2x = 4 \Leftrightarrow 2x + 5 = \square - x$ ;                      b)  $4x + 2(1-x) = \square \Leftrightarrow x - 3(x+4) = 5 - 2x$ .

10. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$-3(1-z) = 4z - 8$	<input type="text" value="30"/>	$2z - 3(4-z) = 12 + z$
$2,5t - \frac{2}{3}(t+1) = 0$	<input type="text" value="?"/>	$\frac{2}{9}(2-t) - 4, (6)t = 6$

11. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$2(5-3x) + 4x = 7 - x$	<input type="text" value="81"/>	$8 - (3-4x) - x = 17$
$9\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right) - 5x = 8$	<input type="text" value="?"/>	$14 - 2(x+5) + 3x = 6$

12. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuațiile și determinați cuvântul cifrat.

Ecuația	R	A	B	O	V
$3x - 5 = 10$	-5	$\frac{5}{3}$	5	3	$-\frac{5}{3}$
$-x + 6,5 = x + 0,5$	3	7	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$12 - x = 3(x - 4)$	0	6	12	-6	-3
$\sqrt{3} \cdot x = 0$	$-\sqrt{3}$	2	1	$\sqrt{3}$	0
$x^2 - 2 = x(x - 0,2)$	2	0,2	-10	10	1

Dezvoltăm abilitățile și creăm

13. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $(3x-1)^2 - 4(5x+6) = 9(x^2 - x + 1) + 2$ ;                      b)  $\frac{1}{2}(1-5x) + 4(x^2 - 4) - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}(2-x) + 4x^2 - 3x$ ;  
 c)  $2x^3 - x + 3 = 5(x + \frac{2}{5}x^3 - 2) - 4x$ ;                      d)  $(4x-1)(4x+1) - 5x = -4(x-4x^2) - 7(x+3)$ ;

14. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $|x| = 2x + 1$ ;                      b)  $|2-x| = -0,5x + 4$ ;                      c)  $|2x+1| = -x$ ;                      d)  $\frac{2}{3}|5t-1| = \frac{1}{3}t + 2$ .


15. Știind că  $m$  este un parametru real, rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $mx - 6 = 3x + 4$ ;                      b)  $3 - mx = 2m(x+1) - 1$ ;  
 c)  $mx + m + 3 = x + 4$ ;                      d)  $2(mx+x) - 3(x+4) = 5 - m$ .

16. Formulați un exercițiu asemănător cu exercițiul 12 și propuneți-l colegilor și colegelor de clasă.

## § 2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

### 2.1. Formula de rezolvare

 Un teren de forma unui triunghi dreptunghic trebuie îngrădit. Se știe că lungimea uneia dintre catetele triunghiului este cu 5 m mai mică decât lungimea ipotenuzei, iar lungimea celeilalte catete este cu 3 m mai mică decât lungimea primei catete. Aflați lungimea gardului.



*Rezolvare:*

Fie  $x$  lungimea ipotenuzei. Atunci  $(x-5)$  este lungimea unei catete, iar  $(x-8)$  – lungimea celeilalte catete. Conform condiției problemei și teoremei lui Pitagora, obținem ecuația  $(x-5)^2 + (x-8)^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 26x + 89 = 0$ , cu soluțiile  $x_1 = 13 - 4\sqrt{5}$ ,  $x_2 = 13 + 4\sqrt{5}$ .

Constatăm că numai  $13 + 4\sqrt{5}$  satisface condiția problemei. (Precizați de ce  $13 - 4\sqrt{5}$  nu satisface condiția problemei.) Deci, lungimea ipotenuzei este de  $(13 + 4\sqrt{5})$  cm. Atunci lungimile catetelor sunt de  $(5 + 4\sqrt{5})$  m și  $(8 + 4\sqrt{5})$  m. Deci, gardul are lungimea de  $(26 + 12\sqrt{5})$  m.

*Răspuns:*  $(26 + 12\sqrt{5})$  m.

Ecuația  $x^2 - 26x + 89 = 0$  este o ecuație de gradul II cu o necunoscută.



**Ne amintim**

#### Definiții

- ◆ Ecuația de forma  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se numește **ecuație de gradul II cu necunoscuta  $x$** .
- ◆ Numerele  $a, b, c$  se numesc **coeficienții ecuației** de gradul II;  $c$  se mai numește **termenul liber**.

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu  $S$ .

**A rezolva o ecuație** înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

#### I. Cazuri particulare ale ecuației de gradul II

1. $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$	2. $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$	3. $a \neq 0, b = 0, c = 0$
$ax^2 + bx = 0$ $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$ . $S = \left\{ 0; -\frac{b}{a} \right\}$ .	$ax^2 + c = 0$ $S = \emptyset$ , dacă $a \cdot c > 0$ ; $S = \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}; \sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}$ , dacă $a \cdot c < 0$ .	$ax^2 = 0$ $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . $S = \{0\}$ .

#### Aplicăm

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $-x^2 + 0,5x = 0$ ;      b)  $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0$ ;      c)  $-2x^2 + 5 = 0$ ;      d)  $\sqrt{5}x^2 = 0$ .

*Rezolvare:*

a)  $-x^2 + 0,5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 0,5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  sau  $x = 0,5$ . *Răspuns:*  $S = \{0; 0,5\}$ .

b)  $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 = -1$ . *Răspuns:*  $S = \emptyset$ .

c)  $-2x^2 + 5 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow \square \Leftrightarrow x = \square$  sau  $x = \square$ . *Răspuns:*  $S = \square$ .

d)  $\sqrt{5}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \square$ . *Răspuns:*  $S = \square$ .



**Rețineți!**

Împărțind coeficienții oricărei ecuații de gradul II  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , la coeficientul  $a$ , obținem ecuația echivalentă  $x^2 + px + q = 0$ , numită **ecuație de gradul II, forma redusă**, unde  $p = \frac{b}{a}$ , iar  $q = \frac{c}{a}$ .

**II. Cazul general:  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$**

Existența și numărul soluțiilor reale ale ecuației de gradul II sau ale ecuației de gradul II, forma redusă, depind de semnul discriminantului  $\Delta = b^2 - 4ac$ , respectiv  $\Delta_1 = \frac{p^2}{4} - q$ .

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	$x^2 + px + q = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta_1 = \frac{p^2}{4} - q$
$\Delta > 0$ $\Delta < 0$ $\Delta = 0$	$\Delta_1 > 0$ $\Delta_1 < 0$ $\Delta_1 = 0$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\Delta_1}$ $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\Delta_1}$
Nu are soluții în $\mathbb{R}$ .	Nu are soluții în $\mathbb{R}$ .
$x = -\frac{b}{2a}$	$x = -\frac{p}{2}$
$S = \left\{ \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$	$S = \left\{ -\frac{p}{2} \mp \sqrt{\Delta_1} \right\}$
$S = \emptyset$	$S = \emptyset$
$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	$S = \left\{ -\frac{p}{2} \right\}$

**Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ; b)  $x^2 - 11x + 30 = 0$ .

Rezolvare:

a) DVA:  $\mathbb{R}$ .  $\Delta = b^2 - 4ac = 25$ .

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = 2.$$

Răspuns:  $S = \{-0,5; 2\}$ .

b) DVA:  $\mathbb{R}$ .  $\Delta_1 = \frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4}$ .

$$x_1 = \square - \square = \square; \quad x_2 = \square + \square = \square.$$

Răspuns:  $S = \{5; 6\}$ .

**Observație**

În cazul în care coeficientul  $b$  este un număr par, adică  $b = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , ecuația de gradul II ia forma  $ax^2 + 2kx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ . Discriminantul acestei ecuații este

$$\Delta = (2k)^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$$

și formulele de rezolvare devin:  $x_1 = \frac{-k - \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ ,  $x_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ .

Notând  $\Delta_1 = k^2 - ac$ , formulele de rezolvare devin:  $x_1 = \frac{-k - \sqrt{\Delta_1}}{a}$ ,  $x_2 = \frac{-k + \sqrt{\Delta_1}}{a}$ .

**Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $2x^2 - 8x + 3 = 0$ .

Rezolvare:

DVA:  $\mathbb{R}$ . Știind că  $a = 2$ ,  $c = 3$ ,  $b = -8 = 2 \cdot (-4)$ , obținem:

$$k = -4, \quad \Delta_1 = k^2 - ac = 16 - 6 = 10.$$

Atunci  $x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{10}}{2} = 2 - 0,5\sqrt{10}$ ,  $x_2 = \frac{\square + \sqrt{\square}}{2} = \square + \square$ .

Răspuns:  $S = \{2 - 0,5\sqrt{10}; 2 + 0,5\sqrt{10}\}$ .

## 2.2. Relații între soluții și coeficienți



### Ne amintim

#### Teorema lui Viète

Fie ecuația  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ . (1)

Dacă numerele reale  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației (1), atunci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases} \quad (2)$$

Fie ecuația  $x^2 + px + q = 0$ . (3)

Dacă numerele reale  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației (3), atunci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases} \quad (4)$$

Folosind relațiile lui Viète (2), (4), soluțiile unor ecuații de gradul II cu o necunoscută pot fi determinate fără a rezolva efectiv ecuația.

### Aplicăm

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $2x^2 - 3x - 2 = 0$ ; b)  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

*Rezolvare:*

a) Aflăm două numere reale  $x_1, x_2$ , astfel încât  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -1$  și  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ . Prin încercări, obținem  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 2$ .

*Răspuns:*  $S = \{-\frac{1}{2}, 2\}$ .

b) Aflăm două numere reale  $x_1, x_2$ , astfel încât  $x_1 \cdot x_2 = q = 12$  și  $x_1 + x_2 = -p = 7$ .

Prin încercări, obținem  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ .

*Răspuns:*  $S = \{3, 4\}$ .



### Ne amintim

#### Reciproca teoremei lui Viète

Dacă numerele reale  $x_1$  și  $x_2$  verifică relațiile (2), atunci  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației (1).

Dacă numerele reale  $x_1$  și  $x_2$  verifică relațiile (4), atunci  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației (3).

### Observație

Folosind reciproca teoremei lui Viète, dacă se cunosc soluțiile  $x_1$  și  $x_2$ , poate fi formată o ecuație de gradul II cu o necunoscută, care va avea aceste soluții.

### Aplicăm

- Scrieți o ecuație de gradul II cu o necunoscută care are soluțiile  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 2$ .

*Rezolvare:*

Deoarece  $-5 + 2 = -3 = -p$  și  $(-5) \cdot 2 = -10 = q$ , obținem ecuația  $x^2 + 3x - 10 = 0$ .

## 2.3. Ecuații reducibile la ecuația de gradul II cu o necunoscută

Unele ecuații mai complicate pot fi reduse la ecuații de gradul II prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

De exemplu, ecuațiile de forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , numite **ecuații bipătrate**, se rezolvă efectuând substituția  $x^2 = t$ , unde  $t \geq 0$ . În consecință, obținem ecuația de gradul II  $at^2 + bt + c = 0$ ,  $a \neq 0$ . Revenind apoi la necunoscuta  $x$ , obținem soluțiile ecuației inițiale.

**Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ ; b)  $(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0$ .

Rezolvare:

a) DVA:  $\mathbb{R}$ . Fie  $x^2 = t, t \geq 0$ . Obținem ecuația  $2t^2 - t - 1 = 0$ , cu soluțiile  $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 1$ . Ecuația  $x^2 = -\frac{1}{2}$  nu are soluții reale, iar soluțiile ecuației  $x^2 = 1$  sunt  $x_1 = -1, x_2 = 1$ .

Răspuns:  $S = \{-1; 1\}$ .

b) DVA:  $\mathbb{R}$ . Notăm  $x^2 - 3x = z$ . Obținem ecuația de gradul II  $z^2 + 3z - 28 = 0$ , cu soluțiile  $z_1 = -7, z_2 = 4$ . Revenind la necunoscuta  $x$ , obținem ecuațiile  $x^2 - 3x = -7$  și  $x^2 - 3x = 4$ .

Ecuația  $x^2 - 3x + 7 = 0$  nu are soluții reale.

Ecuația  $x^2 - 3x - 4 = 0$  are soluțiile  $x_1 = -1, x_2 = 4$ .

Răspuns:  $S = \{-1; 4\}$ .

**2.4. Descompunerea în factori a expresiilor de forma  $ax^2 + bx + c, a \neq 0$**



**Ne amintim**

Dacă  $a \neq 0$  și  $\Delta \geq 0$ , atunci  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  (5), unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile reale ale ecuației  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ .

**Aplicăm**

- Descompuneți în factori expresia  $2x^2 - 3x - 2$ .

Rezolvare:

Ecuația  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  are soluțiile  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2$ .

Prin urmare,  $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$ .

**2.5. Ecuații de gradul II cu o necunoscută, cu parametru (opțional)**

Ecuațiile de gradul II cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluției ecuației în funcție de valorile parametrului.

- Determinați valorile parametrului real  $m$  pentru care ecuațiile  $x^2 + mx + 4 = 0$  și  $x^2 + 4x + m = 0$  au o soluție reală comună.

Rezolvare:

Fie  $x_1$  soluția comună. Substituind  $x = x_1$ , obținem  $x_1^2 + mx_1 + 4 = 0$  și  $x_1^2 + 4x_1 + m = 0$ .

Prin scădere, obținem  $x_1(m - 4) + 4 - m = 0 \Leftrightarrow (m - 4)x_1 = m - 4$ .

Pentru  $m = 4$  ecuațiile devin identice:  $x_1^2 + 4x_1 + 4 = 0$ . Soluția lor comună este  $x_1 = -2$ .

Pentru  $m \neq 4$  obținem  $x_1 = 1$ . Înlocuind  $x_1 = 1$  în una dintre ecuații, obținem  $m = -5$ .

Atunci ecuațiile devin  $x^2 - 5x + 4 = 0$  și  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , cu soluțiile  $x_1 = 1, x_2 = 4$  și, respectiv,  $x_3 = 1, x_4 = -5$ .

Deci, pentru  $m = 4$  ecuațiile au soluția comună  $x = -2$ , iar pentru  $m = -5$  soluția lor comună este  $x = 1$ .

Răspuns:  $m \in \{-5; 4\}$ .


**Exerciții și probleme**

**Fixăm cunoștințele**

- Investigați!** Fie ecuațiile: a)  $5x^2 - x - \sqrt{2} = 0$ ; b)  $3,4x^2 - x + 1 - \sqrt{2} = 0$ ; c)  $(1 - \sqrt{3})x^2 + 7x - 3,5 = 0$ .  
Găsiți numărul care lipsește: a) 5; ;  $-\sqrt{2}$ ; b)  $-3,4$ ;  $-1$ ; ; c) ; 7;  $-3,5$ .
- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $x^2 - 16 = 0$ ; b)  $t^2 - 25 = 0$ ; c)  $5x^2 + 2x = 0$ ; d)  $\sqrt{3}x^2 + 5 = 0$ .

3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$ ;                      b)  $5x^2 - 7x + 2 = 0$ ;                      c)  $3x^2 - 2x + 1 = 0$ ;  
 d)  $-4x^2 + 6x - 5 = 0$ ;                      e)  $0,1x^2 - x - 2,5 = 0$ ;                      f)  $\sqrt{5}x^2 + \sqrt{2}x + 4 = 0$ .

4.  **Lucrați în grup!** Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuația de gradul II, forma redusă:

- a)  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ;                      b)  $x^2 - 8x + 12 = 0$ ;                      c)  $x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$ ;  
 d)  $x^2 + 1\frac{4}{5}x - \frac{2}{5} = 0$ ;                      e)  $x^2 - 3x - 4 = 0$ ;                      f)  $x^2 - \sqrt{3}x + 6 = 0$ .

5.  **Investigați!** Fără a rezolva ecuația, determinați semnele soluțiilor acesteia:

- a)  $3x^2 - x - 2 = 0$ ;                      b)  $x^2 + x - 12 = 0$ ;                      c)  $-t^2 + 2t + 8 = 0$ ;                      d)  $u^2 - 10u + 4 = 0$ ;                      e)  $2x^2 + 5x + 2 = 0$ .

## Formăm abilitățile și aplicăm

6.  **Lucrați în perechi!** Scrieți o ecuație de gradul II cu soluțiile:

- a) 1 și 3;                      b) -4 și 5;                      c) -1 și -2;                      d)  $\frac{1}{2}$  și  $\frac{3}{4}$ ;                      e)  $2 - \sqrt{3}$  și  $2 + \sqrt{3}$ .

7. Folosind teorema lui Viète, rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $x^2 - 2x - 15 = 0$ ;                      b)  $3x^2 - x - 2 = 0$ ;                      c)  $2x^2 + x - 1 = 0$ ;                      d)  $x^2 - 4x + 5 = 0$ .

8. Descompuneți în factori expresia: a)  $x^2 - 2x - 3$ ;                      b)  $2x^2 - x - 3$ ;                      c)  $4x^2 - 12x + 9$ .

9. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $\frac{x^2 - 5x}{x - 4} = \frac{4}{4 - x}$ ;                      b)  $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}$ ;                      c)  $\frac{3,5x^2}{x + 2} = \frac{4x + 6}{2 + x}$ .

10. Fie  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației: 1)  $5x^2 + 3x - 9 = 0$ ;                      2)  $-3x^2 - x + 1 = 0$ ;                      3)  $2,8x^2 + 2x - 3,5 = 0$ .

Fără a rezolva ecuația, calculați: a)  $x_1 + x_2$ ;                      b)  $x_1 \cdot x_2$ ;                      c)  $x_1^2 + x_2^2$ ;                      d)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ .

11. Aflați două numere pozitive, știind că media lor aritmetică este 12,5, iar media geometrică este 10.

12. Suma unui număr real cu întregul inversului acestuia este 4. Aflați numărul. Găsiți toate soluțiile.


13.  **Lucrați în perechi!** Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  ecuația:

- a)  $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3} = 0$ ;                      b)  $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{7}x + \sqrt{3} = 0$ ;                      c)  $(2x + 1)^2 = (4x + 1)^2$ .

14. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația bipătrată:

- a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ;                      b)  $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$ ;                      c)  $a^4 - a^2 - 2 = 0$ ;                      d)  $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ .

15. Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuația: a)  $x(x - \sqrt{7}) = 0$ ;                      b)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ;                      c)  $\sqrt{11}x^2 = 0$ ;                      d)  $-3x^2 + x + 4 = 0$ .

16.  **Lucrați în perechi!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuațiile și ordonați cuvintele de mai jos în funcție de soluțiile nenegative ale ecuațiilor respective (indicate în paranteze). Comentați rezultatul obținut.

- 1)  $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ ;                      2)  $2x^2 - x - 1 = 0$ ;                      3)  $x^2 - 3x - 10 = 0$ ;                      4)  $-8x^2 - 3x + 0,5 = 0$ ;                      5)  $x(x + \sqrt{15}) = 0$ .

culege ( $\frac{1}{8}$ )	seamnă (1)	cine ( $\frac{\sqrt{2}}{2}$ )	vânt (5)	furtună (0)
--------------------------	------------	-------------------------------	----------	-------------

17. Determinați zerourile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = 3x - x^2$ ;                      b)  $f(x) = -3x^2 + x + 2$ ;                      c)  $f(x) = 0, (4)x^2 - 1$ ;                      d)  $f(x) = 4,5x^2 - 2x - 1$ .

## Dezvoltăm abilitățile și creăm

18. Descompuneți în factori expresia: a)  $t^4 + t^2 - 2$ ;                      b)  $t^4 - t^2 - 2$ .

19. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 3$ ;                      b)  $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) = 3$ .

20. Folosind metoda substituției, rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $5x^2 + 3|x| - 9 = 0$ ;                      b)  $2x^2 - 1 = |x|(|x| - 2)$ .

21\*. Aflați valoarea parametrului real  $m$ , știind că ecuațiile  $2x^2 - 3x + 1 = 0$  și  $3x^2 + m(x + 2) + 1 = 0$  au o soluție comună.

22\*. Știind că  $m$  este un parametru real, rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

- a)  $mx^2 - 3x - 1 = 0$ ;                      b)  $(m - 2)x^2 + x - 4 = 0$ ;                      c)  $x^2 - mx + 4 = 0$ .

### § 3. Ecuații raționale

În ecuațiile a)  $3x - 5 = 2(1 - x)$ , b)  $2x + \frac{3x}{x-1} = x + 1$ , c)  $1 - \frac{x-1}{x^2-4} = -\frac{2x}{x-2}$ ,

membrul stâng și membrul drept sunt expresii raționale, adică expresii formate din numere și litere cu ajutorul operațiilor de adunare, scădere, înmulțire și împărțire. Astfel de ecuații sunt numite **ecuații raționale**. În ecuațiile b), c) necunoscuta apare atât la numărătorul, cât și la numitorul raportului algebric respectiv. Astfel de ecuații se mai numesc **ecuații raționale cu necunoscuta la numitor**.

Ecuația rațională cu necunoscuta la numitor se rezolvă conform următorului *algoritm*:

- ① Se determină DVA al ecuației.
- ② Se trec toți termenii în membrul stâng al ecuației.
- ③ Se aduce membrul stâng la forma  $\frac{A}{B}$ .
- ④ Se aplică regula egalării cu zero a unui raport.
- ⑤ Se rezolvă ecuația obținută ( $A = 0$ ).
- ⑥ Se verifică dacă valorile obținute satisfac condițiile precizate, inclusiv dacă aparțin DVA.
- ⑦ Se scrie răspunsul.

#### ■ **Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\frac{2}{x^2-1} = \frac{3x}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ .

*Rezolvare:*

DVA:  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{3x}{x-1} - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} - \frac{3x}{x-1} + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} = 0.$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ și } x^2 - 1 \neq 0.$$

Ecuația  $3x^2 + 2x - 1 = 0$  are soluțiile  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

Deoarece  $x_1 = -1 \notin \text{DVA}$ , această valoare nu poate fi soluție a ecuației date.  $x_2 = \frac{1}{3} \in \text{DVA}$ .

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

Unele ecuații raționale cu necunoscuta la numitor, mai complicate, pot fi reduse la ecuații mai simple prin diverse transformări sau prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

#### ■ **Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\frac{2x^2}{x^2-2x+1} + \frac{3x}{x-1} - 2 = 0$ .

*Rezolvare:*

DVA:  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , deoarece  $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  și ambele rapoarte din membrul stâng nu au sens pentru  $x = 1$ .

$$\frac{2x^2}{x^2-2x+1} + \frac{3x}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{(x-1)^2} + \frac{3x}{x-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{x-1}\right) - 2 = 0.$$

Introducem necunoscuta auxiliară  $t$ . Fie  $\frac{x}{x-1} = t$ . Obținem ecuația  $2t^2 + 3t - 2 = 0$ , cu soluțiile  $t_1 = -2$ ,  $t_2 = \frac{1}{2}$ . (Verificați!) Revenind la necunoscuta  $x$ , obținem ecuațiile  $\frac{x}{x-1} = -2$  și  $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$ .

Prima ecuație are soluția  $x_1 = \frac{2}{3}$ , iar a doua – soluția  $x_2 = -1$ . (Verificați!)

Valorile  $x_1 = \frac{2}{3}$  și  $x_2 = -1$  aparțin DVA. Deci, ambele sunt soluții ale ecuației date.

$$\text{Răspuns: } S = \left\{ -1; \frac{2}{3} \right\}.$$

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile raționale cu necunoscuta la numitor:

a)  $x - 1 = 3;$

b)  $x^2 - 3x + 4 = 0;$

c)  $\frac{t^2 + 1}{4} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2};$

d)  $\frac{x}{x^2 + 2} - \frac{1}{x} = 0;$

e)  $\frac{2}{t} - \frac{3}{t+1} = 1;$

f)  $z^2 - \frac{3}{z} - 2 = 0.$

2.  **Investigați!** Precizați care dintre elementele mulțimii  $\{-1; 0; 1; 5\}$  sunt soluții ale ecuației:

a)  $\frac{x^2}{x-5} = \frac{2x-1}{x-5};$

b)  $\frac{x(x+1)}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-1};$

c)  $\frac{3}{x} = x - 2;$

d)  $\frac{t}{t^2-1} = \frac{t}{t+1}.$

3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $\frac{1}{x} = 2;$

b)  $-\frac{2}{x} = \frac{1}{3};$

c)  $\frac{\sqrt{5}}{2x} = 2,5;$

d)  $-\frac{3\sqrt{2}}{7x} = -\frac{1}{7}.$

4. Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  ecuația:

a)  $\frac{2}{x-1} = \frac{3}{4};$

b)  $-\frac{5}{3x-2} = \frac{1}{2};$

c)  $\frac{2x}{1-x} = \frac{2}{5};$

d)  $\frac{3x+2}{x+2} = -\frac{1}{2}.$

5.  **Lucrați în perechi!** Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuația:

a)  $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{5x^2-1}{x-1};$

b)  $\frac{x^2+2}{2+x} = \frac{2x-1}{x+2};$

c)  $\frac{x(x-1)}{1-3x} = \frac{x^2+4x}{3x-1};$

d)  $\frac{x^2}{x^2+5} = \frac{2x(x-3)}{x^2+5}.$

6. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $\frac{2}{2x-5} - \frac{5}{5-2x} = \frac{4}{7};$

b)  $\frac{3}{x-3} = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{3-x};$

c)  $\frac{2x^2}{x^2-16} = \frac{3x}{x+4}.$

### Formăm abilitățile și aplicăm

7. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $\frac{x}{x^2-6x+9} = \frac{5x}{x-3};$

b)  $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x}{1-x};$

c)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x+3}{1-x^2};$

d)  $\frac{x}{4x^2-4x+1} = -\frac{4x}{2x-1}.$

8.  **Investigați!** Completați astfel încât ecuațiile să fie echivalente:

a)  $\frac{x^2}{x-1} = \frac{2-3x}{1-x} \Leftrightarrow 2x^2 - \square x + 4 = 0;$

b)  $\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} + \frac{2x}{x+2} \Leftrightarrow 5(x - \square)(2x - \square) = 0.$

9. Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  ecuația:

a)  $\frac{0,5}{x+3} = \frac{2}{4x+12};$

b)  $\frac{1,2}{2x-1} = -\frac{6}{5-10x};$

c)  $\frac{2x-1}{x^2-8x+16} = \frac{4x-2}{2(x-4)^2}.$

10.  **Lucrați în grup!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $\frac{3}{x-5} - \frac{x}{x+1} = \frac{10}{(x+1)(x-5)};$

b)  $\frac{16}{x-2} - \frac{6}{x} = \frac{21}{x+3};$

c)  $\frac{x^2+x}{x-1} + 2x = \frac{3x-1}{x-1} + 2;$

d)  $\frac{2}{x^2-4} + \frac{x+4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)}.$

11. Aflați valorile reale ale lui  $t$  pentru care:

a) suma rapoartelor algebrice  $\frac{6t+18}{3t-1}$  și  $\frac{4t-26}{2t+5}$  este egală cu 4;

b) diferența rapoartelor algebrice  $\frac{3t+1}{1-2t}$  și  $\frac{t-1}{t+1}$  este egală cu  $\frac{1}{2}$ ;

c) suma rapoartelor algebrice  $\frac{t+1}{t-5}$  și  $\frac{10}{t+5}$  este egală cu produsul lor;

d) diferența rapoartelor algebrice  $\frac{6}{2t-1}$  și  $-\frac{2}{t-2}$  este egală cu produsul lor.

12.  **Lucrați în perechi!** Stabiliți legitatea și determinați ecuația omisă:

a)  $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3}$        $x^2 - 36 = 0$   
 $\frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+2} = 8\frac{2}{3}$       ?

b)  $\frac{2(t-1)}{t+3} + \frac{t+3}{t-3} = 5$        $\frac{x+6}{x-5} = 0$   
 $\frac{4}{t+3} - \frac{5}{3-t} + 1 = \frac{1}{t-3}$       ?

13. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $(x^2 - 4)(2x + 5) = 0$ ;      b)  $\left(\frac{2+x}{x} - 1\right) \cdot (6x - 5) = 0$ ;      c)  $(2x^2 - 3x + 1) \cdot \left(\frac{x}{3x-1} + x\right) = 0$ ;  
 d)  $\left(\frac{2x}{x+2} + \frac{3}{x-2} + 2\right) \cdot \left(x + 1 - \frac{3}{x+2} + 8\right) = 0$ ;      e)  $(5x^2 - 7x + 8) \cdot \left(\frac{2x^2}{x-1} - \frac{5x}{x-1} + 4\right) = 0$ .

14. (EG, 2018) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\frac{x^2-2}{x^2+x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-3}{x}$ .

15. (EG, 2015) Fie  $A$  mulțimea soluțiilor reale ale ecuației  $5x^2 - 9x - 2 = 0$ . Determinați mulțimea  $A \cap [-\sqrt{2}; 1]$ .

**Dezvoltăm abilitățile și creăm**

16. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:


a)  $\frac{7}{2x^2+4x} + \frac{1}{2x-4} = \frac{2}{4-x^2}$ ;      b)  $\frac{x^2+4}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} = \frac{3x-2}{x^2-4}$ ;  
 c)  $\frac{1}{t-8} + \frac{1}{t-6} + \frac{1}{t+6} + \frac{1}{t+8} = 0$ ;      d)  $\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$ .

17\*. Știind că  $m$  este un parametru real, rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $\frac{x-m}{m} = \frac{2m}{x-m}$ ;      b)  $\frac{m}{x} + \frac{m-1}{x-1} = 2$ ;  
 c)  $\frac{x}{m} - 2 = \frac{m-1}{1-x}$ ;      d)  $\left|x + \frac{1}{x} - 3\right| = m - 3$ .

## § 4. Sisteme de ecuații

### 4.1. Noțiunea de sistem de ecuații

 Într-un chioșc erau 1305 ziare și reviste. După ce s-au vândut 100 de ziare și 50 de reviste, ziare au rămas de două ori mai multe decât reviste.

Aflați câte reviste și câte ziare erau la început.

*Rezolvare:*

Fie  $x$  numărul inițial de ziare și  $y$  numărul inițial de reviste.

Atunci, conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} x + y = 1305, \\ x - 100 = 2(y - 50), \end{cases} \text{ cu soluția } (870; 435). \text{ (Verificați!)}$$

*Răspuns:* Inițial, în chioșc erau 870 de ziare și 435 de reviste.



**Generalizăm**

Fie ecuațiile  $A_1(x, y) = B_1(x, y)$  și  $A_2(x, y) = B_2(x, y)$ . Dacă se pune problema să se afle soluțiile lor comune, adică perechile ordonate de numere reale  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  care satisfac prima și a doua ecuație, atunci se spune că este dat **un sistem de două ecuații cu două**

**necunoscute**. El se notează:  $\begin{cases} A_1(x, y) = B_1(x, y), \\ A_2(x, y) = B_2(x, y). \end{cases}$

Un sistem poate fi de trei ecuații cu trei necunoscute, de două ecuații cu trei necunoscute etc.

### Definiție

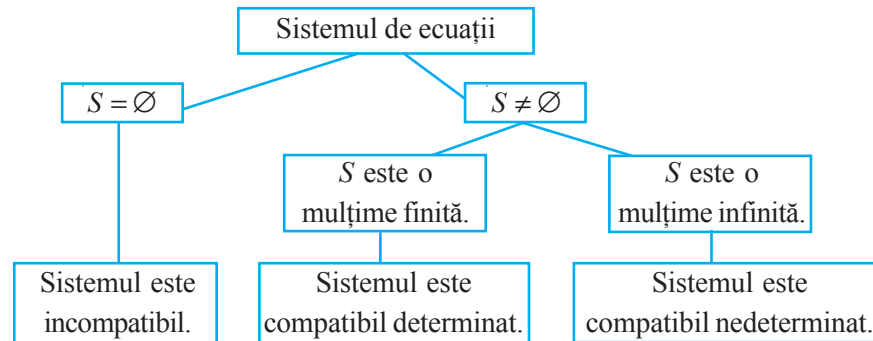
Se numește **soluție a sistemului** de două ecuații cu două necunoscute perechea ordonată de numere  $(a; b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , care este soluție comună pentru **ambele** ecuații ale acestuia.



### Rețineți!

**A rezolva un sistem** de ecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.  
**Mulțimea soluțiilor unui sistem** de ecuații (notată cu  $S$ ) este **intersecția** mulțimilor soluțiilor ecuațiilor acestui sistem.

### Relațiile dintre numărul de soluții și tipul sistemului de ecuații



Rezolvarea sistemului de ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acestuia.

**Domeniul valorilor admisibile** (DVA) al unui sistem de ecuații este **intersecția** domeniilor valorilor admisibile ale ecuațiilor sistemului.

### Definiție

Două sisteme de ecuații cu aceleași necunoscute se numesc **echivalente** dacă mulțimile de soluții ale acestora sunt egale.

Între sistemele de ecuații echivalente se scrie simbolul „ $\Leftrightarrow$ ”.

### Observație

Sistemele echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al sistemului inițial) se numesc **echivalente în această mulțime**.

**Transformări care pot fi aplicate pentru a obține sisteme echivalente:**

#### Exemple

- Schimbând ordinea ecuațiilor într-un sistem, obținem un sistem echivalent cu cel dat:
- Înlocuind o ecuație a unui sistem prin altă ecuație, echivalentă cu cea inițială, obținem un sistem echivalent cu cel dat:
- Exprimând într-o ecuație a unui sistem o necunoscută prin cealaltă necunoscută și substituind această expresie în celelalte ecuații ale sistemului, obținem un sistem echivalent cu cel dat:
- Înlocuind o ecuație a unui sistem cu altă ecuație, care se obține adunând sau scăzând două ecuații ale sistemului (înmulțite, dacă e cazul, cu un număr nenul), obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} 3x - y = 4, \\ x + y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 4, \\ 4x + 7y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 4x + 7y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 4, \\ 8x + y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 8x + 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 4, \\ 11x + y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 14x = 4. \end{cases}$$

## 4.2. Metode de rezolvare a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute

Sistemele de ecuații pot fi rezolvate prin:

◆ **metoda substituției**

$$\begin{cases} x - 3y = -4, \\ x - 7y = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 4, \\ 3y - 4 - 7y = 5. \end{cases}$$

⇨ Într-o ecuație a unui sistem, o necunoscută se exprimă prin cealaltă necunoscută și expresia obținută se substituie în cealaltă ecuație a sistemului.

◆ **metoda reducerii**

$$\begin{cases} 2x + 0,5y = 2, \\ 3x - 2y = -1, \end{cases} \begin{matrix} \times 4 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 11x = 7. \end{cases}$$

⇨ Se adună (se scad) cele două ecuații ale unui sistem, astfel încât să se reducă una dintre necunoscute.

◆ **metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutei) auxiliare**

$$\begin{cases} x^2 - \frac{1}{y-1} = 3, \\ 4x^2 + \frac{3}{y-1} = -2. \end{cases}$$

⇨ Se introduc necunoscute auxiliare, notând unele expresii cu aceste necunoscute, pentru a obține un sistem mai simplu. După rezolvarea sistemului obținut se revine la necunoscutele inițiale.

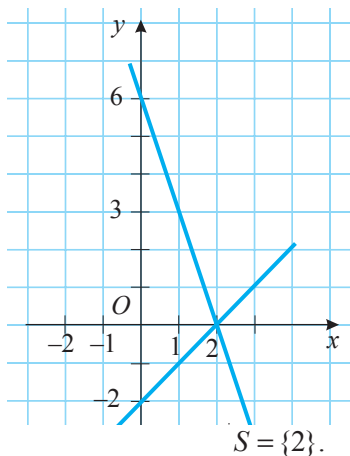
Fie  $x^2 = u$ ,  $\frac{1}{y-1} = v$ . Atunci

obținem sistemul  $\begin{cases} u - v = 3, \\ 4u + 3v = -2. \end{cases}$

◆ **metoda grafică**

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x + y = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2, \\ y = -3x + 6. \end{cases}$$

⇨ Se trasează, în același sistem de axe ortogonale, graficele ecuațiilor sistemului și se determină (dacă există) coordonatele punctelor de intersecție a acestora. Dacă graficele ecuațiilor sistemului nu se intersectează, rezultă că sistemul este incompatibil, adică  $S = \emptyset$ .




■ **Observație**

Metoda substituției, metoda reducerii, metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutei) auxiliare sunt **metode algebrice**, iar metoda grafică este **metodă geometrică**.

## Exerciții și probleme

■ **Fixăm cunoștințele**

1.  **Investigați!** Precizați care dintre perechile ordonate  $(0; -2)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(-2; 2)$ ,  $(0; 3)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(-3; 2)$  sunt soluții ale sistemului:

a)  $\begin{cases} 3x - y = -2, \\ 2x + 3y = 6; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x + 4y = 3, \\ x - y = -2; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 3x = -2(x + y), \\ 5x + 2y = -4. \end{cases}$

2. Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , prin metoda substituției, sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} x - 3y = 0, \\ 5x - y = -1; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 6x + 2y = 0; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 0,2x - 3,5y = 4; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} \frac{1}{3}x + y = 2, \\ \frac{2}{5}x - 3y = 10. \end{cases}$

3. Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , prin metoda reducerii, sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} 2x - 3y = -2, \\ 3x + y = 5; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 0,5y - 3x = 4,5, \\ 5x + 2y = 3; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} -2,2x + 3y = 2, \\ 3x - 4y = -1; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = \frac{1}{6}, \\ 2x + 2y = 3. \end{cases}$


4. Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , prin metoda grafică, sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} y = 2x, \\ x - 2y = 9; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ y + 2x = 6; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x + y = -2, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$

5.  **Lucrați în perechi!** Completați cu un număr real, astfel încât sistemul să fie compatibil:

1) nedeterminat;

2) determinat.

a)  $\begin{cases} 2x - \blacksquare y = -4, \\ 10x - 6y = -20; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} -x + 2y = -3, \\ \blacksquare x - 6y = 9; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 3x - y = -1, \\ -12x + 4y = \blacksquare. \end{cases}$

### Formăm abilitățile și aplicăm

6.  **Lucrați în grup!** Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} 3(x - 2) = y - 5, \\ 4x - 3(y + 1) = 0; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 0,5x - 3,4(5 - y) = 4,7, \\ -4x + 8y = 12; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x^2 - x = (x + 1)^2 + y, \\ -5x - 2y = 1. \end{cases}$

7. Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , prin metoda grafică și cea algebrică, sistemul:

a)  $\begin{cases} 6 - x = 2y, \\ 2x + 4y = 0; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} (x - 2)^2 = x^2 + y, \\ y + 3x = 6; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x - 3y = 6, \\ 5(x - 1) + 6(y + 2) = 58; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} -x - 3y = -7, \\ x^2 + y = (x - 1)^2 + 3. \end{cases}$

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

8. Explicitând modulele, rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} |x| + 3|y| = 5, \\ |x - 2| + 2|y - 1| = 0; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 3|x + 3| + |y - 4| = 0, \\ |x - 6| + 2|y| = 5; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} a^2 + 2|b| = 10, \\ |a^2 - 2| + |b - 4| = 0; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2|z - 3| - |y + 1| = 2, \\ |z| + |y| = -5. \end{cases}$

9. Două motonave, după întâlnire, și-au continuat drumul, una spre sud, iar cealaltă spre vest, și peste două ore distanța dintre ele era de 60 km. Aflați viteza fiecărei motonave, dacă se știe că viteza uneia dintre ele este cu 6 km/h mai mare decât a celeilalte.

10. Scrieți un sistem de două ecuații cu două necunoscute, având soluțiile:

a) (1; 5) și (5; 1);

b) (-1; 0) și (1; 2);

c) (1; 0) și (3; 2);

d) (-2; -1) și (1; 1).



11. Unui luntraș care plutea în amonte i-a căzut pălăria în apă când trecea pe sub un pod. Peste o oră el a observat pierderea, a întors luntrea și a ajuns pălăria la o distanță de 4 km de pod. Aflați viteza apei.



### Problemă pentru campioni

12. Pentru care valori ale parametrului real  $a$  sistemul  $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 10x - ay = 15 \end{cases}$  este compatibil nedeterminat?

## § 5. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și/sau al sistemelor de ecuații



Diverse probleme din matematică, fizică, chimie, economie și din alte domenii se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, sistemelor de ecuații.

**1** Într-un camion s-au încărcat 35 de saci cu făină și cu zahăr. Sacii cântăresc împreună 2 t 500 kg. Un sac cu făină cântărește 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg.

Aflați câți saci cu făină și câți saci cu zahăr s-au încărcat în camion.

Să rezolvăm această problemă cu ajutorul:

**unei ecuații;**

Fie  $x$  numărul de saci cu făină. Atunci  $(35 - x)$  este numărul de saci cu zahăr. Deoarece un sac cu făină cântărește 80 kg, s-au încărcat în total  $80x$  kg de făină. Fiindcă un sac cu zahăr cântărește 50 kg, s-au încărcat în total  $50(35 - x)$  kg de zahăr.

Conform condiției problemei, obținem ecuația

$$80x + 50(35 - x) = 2500,$$

cu soluția  $x = 25$ .

Așadar, în camion au fost încărcăți 25 de saci cu făină și 10 saci cu zahăr.

**unui sistem de ecuații.**

Fie  $x$  numărul de saci cu făină, iar  $y$  – numărul de saci cu zahăr.

Știind că s-au încărcat în total 35 de saci, obținem prima ecuație:  $x + y = 35$ .

Deoarece un sac cu făină cântărește 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg și s-au încărcat în total 2 t 500 kg, obținem a doua ecuație:  $80x + 50y = 2500 \Leftrightarrow 8x + 5y = 250$ .

Conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații  $\begin{cases} x + y = 35, \\ 8x + 5y = 250, \end{cases}$  cu soluția  $(25; 10)$ .

**Răspuns:** În camion s-au încărcat 25 de saci cu făină și 10 saci cu zahăr.

### Concluzie

Uneori, o problemă poate fi rezolvată atât cu ajutorul unei ecuații, cât și cu ajutorul unui sistem de ecuații.



### Ne amintim

Pentru a rezolva o problemă cu ajutorul **ecuației (sistemului de ecuații)**, se procedează astfel:

- 1 Se stabilesc datele cunoscute și cele necunoscute ale problemei.
- 2 Se notează cu o literă fiecare mărime necunoscută.
- 3 Se stabilesc relațiile dintre datele cunoscute și cele necunoscute și se scrie ecuația (sistemul de ecuații).
- 4 Se rezolvă ecuația (sistemul de ecuații).
- 5 Se analizează rezultatele, se alege soluția și se scrie răspunsul.

### Aplicăm

**2** Un tractor ară un lot de pământ. Peste 4 ore s-a mai alăturat un tractor. Cele două tractoare termină de arat lotul în 8 ore.

Aflați în câte ore ar putea ara lotul fiecare tractor, dacă se știe că primul tractor i-ar trebui cu 8 ore mai multe decât celui de-al doilea tractor.

**Rezolvare:**

Fie  $x$  numărul de ore în care primul tractor ar fi arat lotul de pământ, atunci  $(x - 8)$  este numărul de ore în care al doilea tractor ar fi arat același lot. În aceste condiții, productivitatea muncii primului tractor este  $\frac{1}{x}$  ( $\frac{1}{x}$  – partea din lot arată într-o oră), iar cea a tractorului al



doilea este  $\frac{1}{x-8}$ . Știind că primul tractor a lucrat 12 ore, iar al doilea 8 ore și ținând cont de productivitatea muncii fiecărui tractor, obținem următoarea ecuație:  $\frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} = 1$ .

Să aflăm soluțiile ei.

DVA:  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 8\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} = 1 &\Leftrightarrow \frac{12}{x} + \frac{8}{x-8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{12(x-8) + 8x - x(x-8)}{x(x-8)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 28x - 96}{x(x-8)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 28x + 96}{x(x-8)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 28x + 96 = 0, \\ x(x-8) \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

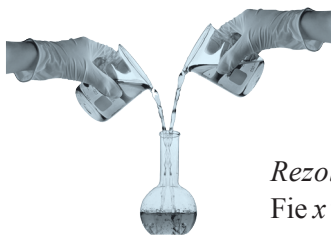
Soluțiile sistemului, deci și ale ecuației inițiale, sunt  $x_1 = 24$ ,  $x_2 = 4$ . (Verificați!)

Soluția  $x_2 = 4$  nu satisface condiția problemei. (Argumentați!)

*Răspuns:* Primul tractor va ara lotul de pământ în 24 de ore, iar al doilea – în 16 ore.



**Exercițiu** Rezolvați problema **2** cu ajutorul unui sistem de ecuații.



**3** O soluție de alcool cu concentrația de 85% s-a amestecat cu o altă soluție și s-au obținut 10 l de soluție de alcool cu concentrația de 79%.

Aflați câți litri de fiecare soluție s-au amestecat, dacă valoarea numerică a procentului concentrației de alcool din cea de-a doua soluție este cu 66 mai mare decât valoarea numerică a volumului acestei soluții.

*Rezolvare:*

Fie  $x$  volumul în litri al primei soluții. Atunci  $(10-x)$  l este volumul celei de-a doua soluții.

Prima soluție conține  $\frac{x \cdot 85}{100}$  litri de alcool, iar a doua are concentrația de alcool  $(10-x+66)\%$ .

Obținem ecuația  $\frac{(10-x)(76-x)}{100} + \frac{85x}{100} = \frac{10 \cdot 79}{100} \Leftrightarrow x^2 - x - 30 = 0$ , cu soluțiile  $x_2 = -5$ ,  $x_2 = 6$ . (Verificați!) Constatăm că valoarea  $x_2 = -5$  nu satisface condiția problemei.


*Răspuns:* S-au amestecat 6 l de soluție de alcool cu concentrația de 85% cu 4 l de altă soluție.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

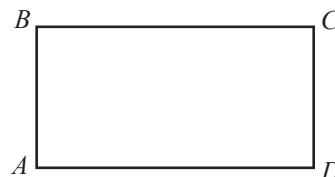
Rezolvați problemele 1–4 cu ajutorul ecuației.

1. Suma a două numere naturale este 12, iar produsul lor este 11. Aflați aceste numere.

2.  **Investigați!** Diferența a două numere întregi este 15, iar suma pătratelor lor este 725. Aflați aceste numere. Găsiți toate soluțiile.

3. Determinați lungimea și lățimea unui dreptunghi, știind că perimetrul lui este de 30 m, iar aria – de  $44 \text{ m}^2$ .


4. Una dintre laturile dreptunghiului este cu 3 cm mai mare decât cealaltă. Aflați lungimea laturilor dreptunghiului, dacă aria lui este de  $1720 \text{ cm}^2$ .



Rezolvați problemele 5–6:


a) cu ajutorul ecuației;                      b) cu ajutorul sistemului de ecuații.

5. Cu 6400 de lei s-au cumpărat două bucăți de stofă de aceeași lungime, dar de calități diferite. 1 m de stofă de calitate întâi și 1 m de stofă de calitate a doua costă în total 320 de lei, iar 4 m de stofă de calitate întâi costă cât 6 m de stofă de calitate a doua. Determinați cât costă 1 m de stofă de fiecare calitate și câți metri de stofă s-au cumpărat.

6.  **Lucrați în perechi!** Distanța dintre două orașe este de 280 km. Din aceste orașe s-au pornit concomitent, unul spre celălalt, două trenuri: unul cu viteza de 80 km/h, celălalt cu viteza egală cu  $\frac{3}{4}$  din viteza primului tren. Aflați câți kilometri a parcurs fiecare tren până s-au întâlnit.


### Formăm abilitățile și aplicăm

Rezolvați problemele 7–13 cu ajutorul ecuației.

7.  **Lucrați în grup!** Suma pătratelor cifrelor unui număr de două cifre este 52. Dacă din acest număr vom scădea 18, vom obține răsturnatul acestui număr. Aflați numărul.
8. Conform planului, o uzină trebuia să producă 360 de piese. În primele opt zile, uzina a depășit planul zilnic cu 20%, iar în restul zilelor – cu 25%. În consecință, uzina a produs cu 82 de piese mai multe decât prevedea planul. În câte zile uzina trebuia să realizeze planul?
9. Aria unui triunghi dreptunghic este de  $24 \text{ cm}^2$ . Dacă una dintre catetele lui se micșorează cu 1 cm, iar cealaltă se mărește cu 3 cm, atunci se obține un triunghi cu aria de  $27,5 \text{ cm}^2$ . Determinați lungimile catetelor triunghiului inițial.




10. Doi muncitori au executat împreună o lucrare în 12 ore. Dacă primul muncitor ar fi executat singur o jumătate din această lucrare, apoi al doilea muncitor – a doua jumătate, atunci toată lucrarea ar fi fost terminată în 25 de ore. Aflați în câte ore ar executa lucrarea fiecare muncitor.
11. Un vapor parcurge distanța pe un râu de la A la B în 3 ore, iar distanța de la B la A – în 4 ore. În câte ore va parcurge distanța de la A la B o plută?

12.  **Lucrați în perechi!** Suma a două numere este 8, iar suma inverselor acestor numere este 6. Aflați aceste numere.
13. Fie 736 ml de soluție de iod cu concentrația de 16%. Aflați câți mililitri de alcool trebuie adăugați pentru a obține o soluție de iod cu concentrația de 10%.

Rezolvați problemele 14–15:

a) cu ajutorul ecuației;

b) cu ajutorul sistemului de ecuații.

14. Suma a două numere este egală cu 122, iar raportul lor este  $\frac{3}{7}$ . Aflați numerele.
15.  **Lucrați în grup!** 50 de maiouri și 75 de tricouri costă în total 4200 de lei. După reducerea cu 10% a prețului maiourilor și cu 20% a prețului tricourilor, pentru acestea s-ar plăti 3487,5 lei. Aflați prețul inițial al maiourilor și al tricourilor.
16. (EG, 2019) Testul pentru un concurs la matematică conține itemi de 4 puncte și itemi de 5 puncte. Un elev a rezolvat complet 12 itemi și a acumulat în total 53 de puncte. Determinați câți itemi de fiecare tip a rezolvat elevul.

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

17. Câte triunghiuri dreptunghice există, știind că lungimile laturilor lor sunt numere naturale, iar lungimea unei catete este de 15 cm?
18. Aflați două numere naturale, știind că diferența pătratelor lor este 45. Găsiți toate soluțiile.

19. Pentru a transporta 60 t de marfă, e necesar un număr de camioane. Din motiv că drumul era deteriorat, în fiecare camion s-au încărcat cu 0,5 t mai puține decât se stabilise inițial și, în consecință, au fost repartizate suplimentar 4 camioane. Determinați câte camioane au fost planificate inițial.



20. Un agricultor are două feluri de îngrășăminte chimice de azot: cu concentrația de 15 % și de 21 %. Aflați ce cantitate de îngrășăminte de fiecare fel trebuie să amestece pentru a obține 1 t de îngrășământ de azot cu concentrația de 18 %.



### Problemă pentru campioni



21. Un câine, fiind în punctul A, urmărește o vulpe, care este în avans cu 30 m față de el. Lungimea saltului câinelui este de 2 m, iar al vulpii – de 1 m. La ce distanță de la punctul A câinele va ajunge vulpea, dacă în timp ce câinele face două salturi, vulpea face trei?



## Exerciții și probleme recapitulative

### Fixăm cunoștințele

1. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $2x - 3,5(x - 4) = 6;$

b)  $0,5(x - 2) + 2,3x = 5x - 4;$

c)  $\frac{4}{5}(x + 3) - \frac{2}{3} = \frac{5}{7}x + 4;$

d)  $2,4(x - 3) - 4x = 1 - x.$

2. Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  ecuația:

a)  $5x^2 - 4x - 1 = 0;$

b)  $-1,2x^2 - 7x = 0;$

c)  $16x^2 - 1 = 0;$

d)  $36x^2 - 12x + 1 = 0.$

3.  **Lucrați în perechi!** Folosind teorema lui Viète, rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $x^2 - x - 30 = 0;$

b)  $x^2 + x - 30 = 0;$

c)  $x^2 - 2x - 120 = 0.$

4. Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  ecuația:

a)  $\frac{5x}{x-1} - \frac{2}{x+2} = 3;$

b)  $\frac{2x-1}{x+1} - \frac{5x}{x-1} = -3;$

c)  $4 - \frac{2}{x^2-4} = \frac{3x}{x-2};$

d)  $\frac{5x}{x^2-9} - 3 = \frac{1}{x+3}.$

5. Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul de ecuații:

a)  $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 5x - 2y = -1; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2y - 3x = 6, \\ 8y - 2x = -3; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ \frac{1}{4} + \frac{2}{3}y = 4; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 3x - y = -2, \\ 0,5(x - 2) + y = 8. \end{cases}$

6. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:

a)  $(2x^2 - 5x)(7x + 1) = 0;$

b)  $\left(\frac{x}{1-x} - 2\right)\left(\frac{1}{x} - x\right) = 0;$

c)  $(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 16) = 0.$



7. Într-un bloc sunt 64 de apartamente – cu 2 camere și cu 4 camere. Știind că blocul are în total 160 de camere, aflați câte apartamente sunt cu 2 camere și câte cu 4 camere.

8. Diferența a două numere este egală cu 84, iar raportul lor este  $\frac{2}{5}$ . Aflați numerele.

9. S-au amestecat 6 kg de bomboane de 33 de lei kilogramul cu 12 kg de bomboane de 30 de lei kilogramul. Determinați cât costă 1 kg de bomboane asortate.

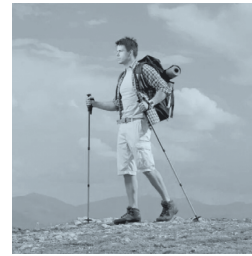


Formăm abilitățile și aplicăm

10.  **Lucrați în grup!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:
- a)  $\frac{3x^2}{x^2-2x+1} - \frac{5x}{x-1} + 2 = 0$ ;      b)  $-\frac{5t^2}{(t+2)^2} + \frac{t}{t+2} + 4 = 0$ ;      c)  $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$ ;
- d)  $4x^2 + 5x + 1 = 0$ ;      e)  $\frac{2x}{x^2-16} - \frac{3}{x+4} = \frac{5-x}{x-4}$ ;      f)  $\frac{3}{2x-1} - \frac{4x}{x+2} = 5$ .
11. Fără a rezolva ecuația, determinați semnele soluțiilor ei:
- a)  $x^2 - 8x + 3 = 0$ ;      b)  $x^2 + 12x + 8 = 0$ ;      c)  $x^2 - 14x - \sqrt{7} = 0$ .
12.  **Lucrați în perechi!** Fără a rezolva ecuația  $x^2 - 8x + 12 = 0$ , aflați:
- a)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ;      b)  $x_1^2 + x_2^2$ ;      c)  $x_1^3 + x_2^3$ ;      d)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ,
- unde  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației date.
13. Descompuneți în factori expresia:
- a)  $x^{12} - 2x^6 + 1$ ;      b)  $(2x-1)^4 - 3(2x-1)^2 + 2$ ;      c)  $3(2-x)^4 - 2(x-2)^2 - 1$ ;      d)  $t^4 - 4t^2 + 4$ .
14. Fie  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 - 8x + 6 = 0$ . Scrieți o ecuație de gradul II cu soluțiile:
- a)  $t_1 = 2x_1$  și  $t_2 = 2x_2$ ;      b)  $t_1 = \frac{x_1}{x_2}$  și  $t_2 = \frac{x_2}{x_1}$ .
15. Rezolvați în  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  sistemul de ecuații:
- a)  $\begin{cases} 3(x-1) + 4 = 5y, \\ x - 8(y+0,5) = 2; \end{cases}$       b)  $\begin{cases} -(x+y) + 4y = 3, \\ 5x - 4(0,2-y) = -2; \end{cases}$       c)  $\begin{cases} x^2 - 4(y+2) = (x-5)^2, \\ 3x - y = 0. \end{cases}$
16. Rezolvați, prin metoda grafică, sistemul de ecuații:
- a)  $\begin{cases} 2x + 5y = 0, \\ x - y = -7; \end{cases}$       b)  $\begin{cases} \frac{1}{2}y = x + 1, \\ y - 2x = -2; \end{cases}$       c)  $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3(x-1) = 2 + y. \end{cases}$
17. Pe o distanță de 210 km, un tren s-a deplasat la început cu viteza de 60 km/h, apoi, din cauza căii ferate deteriorate, și-a micșorat viteza până la 20 km/h. Toată distanța a fost parcursă în 6 ore. Aflați lungimea căii ferate deteriorate.
18. Se amestecă 2 l de soluție de apă cu sare având concentrația de 20% cu 8 l de soluție de apă cu sare având concentrația de 30%. Determinați concentrația amestecului.
19. Suma pătratelor a două numere este 36. Împărțind cele două numere, se obține câtul 5 și restul 3. Aflați numerele. Găsiți toate soluțiile.
20. Aflați zerourile funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- a)  $f(x) = -3x^2 - x - 4$ ;      b)  $f(x) = -3x^2 + x + 4$ ;      c)  $f(x) = x^4 - x^2 - 20$ .
21. Doi cicliști s-au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Peste 1 oră, ei s-au întâlnit și, fără să se oprească, și-au continuat drumul. Ciclistul care a pornit din A a ajuns în B cu 35 de minute mai devreme decât celălalt a ajuns în A. Determinați vitezele cicliștilor, dacă distanța dintre A și B este de 28 km.



22. Doi turiști au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Fiecare se deplasa cu o viteză constantă și, ajungând în punctul respectiv, s-a întors imediat spre punctul de pornire. Când s-au reîntâlnit, s-a constatat că un turist a parcurs cu 4 km mai mulți decât celălalt și a ajuns în A peste 1 oră după reîntâlnire. Celălalt turist a ajuns în B peste 2 ore și 30 de minute după reîntâlnire. Care este viteza de deplasare a fiecărui turist?



23. (EG, 2022) Determinați cea mai mare soluție reală a ecuației  $6x^2 + 7x + 2 = 0$ .
24. (EG, 2016) Fie  $A$  mulțimea soluțiilor reale ale ecuației  $4x^2 + 3x - 10 = 0$ . Determinați mulțimea  $A \cup \{-2; 0\}$ .
25. (EG, 2016) Într-o vază sunt trandafiri albi și roșii, în total 21. Numărul de trandafiri roșii este cu 3 mai mare decât dublul numărului de trandafiri albi. Determinați numărul trandafirilor de fiecare culoare.
26. (EG, 2015) Suma a două numere este egală cu 55, iar raportul lor este egal cu  $\frac{2}{9}$ . Determinați aceste numere.
27. (EG, 2018) Determinați modulul diferenței soluțiilor reale ale ecuației  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .
28. Dana și Paula au împreună 90 de bomboane. Dacă 40% din bomboanele Danei sunt cu 15 mai multe decât 30% din bomboanele Paulei, câte bomboane are fiecare fată?

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

29. a) Reprezentați punctele  $A(0; 3)$  și  $B(1; -2)$  în sistemul de coordonate  $xOy$ .  
b) Trasați dreapta  $AB$ .  
c) Determinați formula funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx + n$ , știind că graficul funcției  $f$  este dreapta  $AB$ .
30. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația: a)  $|2x^2 - x - 2| = 1$ ; b)  $|x^2 + x - 2| = 1 - x$ ; c)  $|-x^2 + 5x - 6| = x^2$ .
31. Mama, tatăl și fiul au împreună 84 de ani. Fiul împreună cu mama au 45 de ani, iar fiul împreună cu tatăl au 52 de ani. Aflați vârsta fiecăruia.
32. Compuneți o problemă care să se rezolve cu ajutorul:  
a) ecuației  $2x^2 - 3x - 5 = 0$ ; b) sistemului de ecuații  $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

33.  **Lucrați în grup!**  **Proiect.** Aplicații ale ecuațiilor de gradul II în diverse domenii.

## Test sumativ



Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

### Varianta I

1. Fie ecuația  $3t^2 - \blacksquare t + 4 = 0$ .  
a) Completați cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente.  
b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația obținută la a).  
c) Scrieți ecuația de gradul doi ale cărei soluții sunt opusele soluțiilor obținute la b).
2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații. Raportul dintre numărul de băieți și numărul de fete din clasa a IX-a este  $\frac{3}{5}$ .  
a) Aflați câte fete sunt în clasă, dacă se știe că băieții sunt cu 6 mai puțini decât fete.  
b) Aflați câți elevi învață în clasa a IX-a.
3. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
a) Determinați valorile  $a$  și  $b$  pentru care punctele  $A(1; 4)$  și  $B(-2; 8)$  aparțin graficului funcției  $f$ .  
b) Rezolvați pentru  $a = 2$  și  $b = 3$  în  $\mathbb{N}$  ecuația  $\frac{f(x)}{x-1} - x = 5$ .

### Varianta II

1. Fie ecuația  $2z^2 + \blacksquare z - 5 = 0$ .  
a) Completați cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente.  
b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația obținută la a).  
c) Scrieți ecuația de gradul doi ale cărei soluții sunt opusele soluțiilor obținute la b).
2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații. Raportul dintre numărul de manuale și numărul de cărți de literatură artistică din biblioteca școlii este  $\frac{2}{3}$ .  
a) Aflați câte manuale sunt în bibliotecă, dacă se știe că manuale sunt cu 350 mai puține decât cărți de literatură artistică.  
b) Aflați câte cărți sunt în total în biblioteca școlii.
3. Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = mx + n$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ .  
a) Determinați valorile  $m$  și  $n$  pentru care punctele  $A(-2; 1)$  și  $B(3; 11)$  aparțin graficului funcției  $g$ .  
b) Rezolvați pentru  $m = 3$  și  $n = -1$  în  $\mathbb{N}$  ecuația  $\frac{x^2 + 7}{g(x)} - x = 3$ .

# Inecuații. Sisteme de inecuații

Învățătura este cea mai bună avuție.  
Proverb

## § 1. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută. Recapitulare și completări

### 1.1. Noțiunea de inecuație cu o necunoscută



**Investigăm**

**1** Două firme confecționează carnete de elev la comandă. Firma „BMR” cere 200 de lei pentru comandă și câte 10 lei pentru fiecare carnet, iar firma „CAR” cere 50 de lei pentru comandă și câte 15 lei pentru fiecare carnet. Aflați numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR”.

*Rezolvare:*

Fie  $x$  numărul de carnete care trebuie confecționate. Conform condiției problemei, firma „BMR” va executa comanda pentru  $(200 + 10x)$  lei, iar firma „CAR” – pentru  $(50 + 15x)$  lei.

Pentru a răspunde la întrebarea problemei, trebuie să rezolvăm în mulțimea  $\mathbb{N}$  inecuația  $200 + 10x < 50 + 15x$  și să determinăm din mulțimea soluțiilor ei soluția cea mai mică.

Inecuația  $200 + 10x < 50 + 15x$  este un exemplu de inecuație cu o necunoscută.



#### Definiție

Numărul  $a$  se numește **soluție** a inecuației cu o necunoscută dacă el transformă inecuația într-o inegalitate adevărată.



**Rețineți!**

- ⇒ **A rezolva o inecuație** înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.
- ⇒ Mulțimea soluțiilor inecuației se notează cu  $S$ .

#### Definiție

Două inecuații cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.










Între două inecuații echivalente se scrie simbolul „ $\Leftrightarrow$ ”.

Aplicând următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de inegalitate a numerelor reale, obținem inecuații echivalente:

		<i>Exemple</i>
1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x)$	– dacă permutăm membrii unei inecuații, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu prima:	$x + 3 > 2x \Leftrightarrow 2x < x + 3$
2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + a > g(x) + a$	– dacă la ambii membri ai unei inecuații adunăm același număr real, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$2x + 5 > 7 \Leftrightarrow 2x > 7 - 5$
3. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R}, a > 0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real pozitiv, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$3x > 27 \Leftrightarrow x > 27 : 3$
4. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R}, a < 0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real negativ, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu cea inițială:	$-3x < 81 \Leftrightarrow x > 81 : (-3)$

## 1.2. Intervale de numere reale

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $a < b$ .

Mulțimea	Intervalul de numere reale	
	Se notează	Reprezentarea pe axă
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a; b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a; b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$(a; b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	$(a; b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$(a; +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	$[a; +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < b\}$	$(-\infty; b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$	$(-\infty; b]$	
$\mathbb{R}$	$(-\infty; +\infty)$	

## 1.3. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ( $\leq, >, <$ ), $a, b \in \mathbb{R}$



**Ne amintim**

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Inecuația  $ax + b \geq 0$  cu necunoscuta  $x \in \mathbb{R}$  poate fi rezolvată astfel:

$$ax + b \geq 0 \Leftrightarrow ax \geq -b.$$

Să examinăm cazurile  $a \neq 0$  și  $a = 0$ .

1) Cazul  $a \neq 0$

a) Dacă  $a > 0$ , atunci  $ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$ . Deci,  $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ .

b) Dacă  $a < 0$ , atunci  $ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$ . Deci,  $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$ .

2) Cazul  $a = 0$

a) Dacă  $a = 0$  și  $b > 0$ , atunci  $S = \mathbb{R}$ .

b) Dacă  $a = 0$  și  $b = 0$ , atunci  $S = \mathbb{R}$ .

c) Dacă  $a = 0$  și  $b < 0$ , atunci  $S = \emptyset$ .



**Exercițiu**

Rezolvați în mod analog inecuațiile de forma  $ax + b \leq 0$ ,  $ax + b > 0$ ,  $ax + b < 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Definiție**

Inecuațiile de forma  $ax + b < 0$ ,  $ax + b > 0$ ,  $ax + b \leq 0$ ,  $ax + b \geq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

Să rezolvăm inecuația problemei **1**:

$$200 + 10x < 50 + 15x \Leftrightarrow 15x - 10x > 200 - 50 \Leftrightarrow 5x > 150 \Leftrightarrow x > 30.$$

*Răspuns:* Numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR” este 31.



**Exercițiu**

Precizați proprietățile inegalităților numerelor reale folosite la rezolvarea acestei inecuații.

**Aplicăm**

• Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $x - 5 \leq 15x - 2(x + 3)$ ;

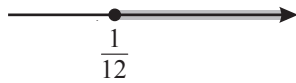
b)  $\frac{12x - 1}{3} < 4x + 3$ ;

c)  $\frac{2 - 3x}{3} > \frac{5 - 2x}{2}$ ;

d)  $|2x - 1| < 3$ ;

e)  $|x - 4| \geq 1$ .

*Rezolvare:*

a)  $x - 5 \leq 15x - 2(x + 3) \Leftrightarrow x - 5 \leq 15x - 2x - 6 \Leftrightarrow x - 15x + 2x \leq -6 + 5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -12x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{12}$ . Deci, 

*Răspuns:*  $S = \left[\frac{1}{12}; +\infty\right)$ .

b)  $\frac{12x - 1}{3} < 4x + 3 \Leftrightarrow 12x - 1 < 12x + 9 \Leftrightarrow 12x - 12x < 9 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x < 10$ .

*Răspuns:*  $S = \mathbb{R}$ .

c)  $\frac{2 - 3x}{3} > \frac{5 - 2x}{2} \Leftrightarrow 4 - 6x > 15 - 6x \Leftrightarrow 6x - 6x > 15 - 4 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 11$ .

Inecuația nu are soluții.

*Răspuns:*  $S = \emptyset$ .

d)  $|2x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 2x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 2$ .

*Răspuns:*  $S = ]-1; 2[$ .

e)  $|x - 4| \geq 1 \Leftrightarrow x - 4 \geq 1$  sau  $x - 4 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 5$  sau  $x \leq 3$ .

*Răspuns:*  $S = (-\infty; 3] \cup [5; +\infty)$ .

**Observație**

Inecuațiile de gradul I pot fi rezolvate studiindu-se semnul funcției respective.

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $2x + 8 < 0$ .

Rezolvare:

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 8$ .

Aflăm zeroul funcției  $f$ :  $2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ .

Tabelul de variație a semnului funcției  $f$  este:

$x$	$-\infty$	$-4$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$0$	$+$

Deci,  $f(x) < 0$  pentru  $x \in (-\infty; -4)$  (fig. 1).

Răspuns:  $S = (-\infty; -4)$ .

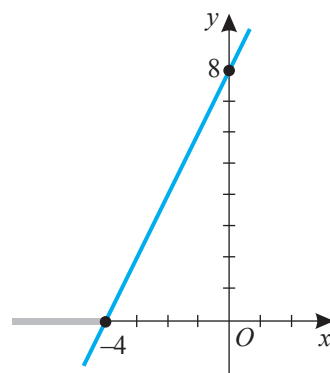


Fig. 1

### 1.4. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută

- 2** Pentru a prepara la cantina școlii 20 de porții de felul întâi, sunt necesare 0,5 kg de carne și 1 kg de orez, iar pentru a prepara o porție de felul doi, este nevoie de 0,1 kg de carne și 0,15 kg de orez. Pentru câți elevi a fost pregătită masa, dacă se știe că s-au folosit mai mult de 11 kg de carne și mai puțin de 18 kg de orez?



Rezolvare:

Fie  $x$  numărul de elevi pentru care au fost pregătite bucatele. Astfel, s-au folosit  $\left(\frac{0,5x}{20} + 0,1x\right)$  kg de carne și  $\left(\frac{x}{20} + 0,15x\right)$  kg de orez. Conform condiției problemei, obținem inecuațiile  $\frac{0,5x}{20} + 0,1x > 11$  și  $\frac{x}{20} + 0,15x < 18$ . Astfel, se cere să se afle în mulțimea  $\mathbb{N}$  soluțiile comune ale inecuației întâi și ale inecuației a doua. În acest caz, se spune că trebuie să rezolvăm un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută:

$$\begin{cases} \frac{0,5x}{20} + 0,1x > 11, \\ \frac{x}{20} + 0,15x < 18, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4x > 440, \\ x + 3x < 360, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 440, \\ 4x < 360, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 88, \\ x < 90. \end{cases}$$

În mulțimea  $\mathbb{N}$  acest sistem de inecuații are soluția unică 89.

Răspuns: Au fost pregătite bucate pentru 89 de elevi.



#### Ne amintim

În caz general, **un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută** se notează:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 \geq 0, & a_1 \in \mathbb{R}^*, & b_1 \in \mathbb{R}, \\ a_2x + b_2 \geq 0, & a_2 \in \mathbb{R}^*, & b_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

#### Definiție

Se numește **soluție** a unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută orice valoare a necunoscutei care transformă **fiecare** inecuație a sistemului într-o inegalitate adevărată.

#### Observație

1. Un sistem de inecuații poate fi format din inecuații cu oricare dintre semnele „<”, „≤”, „>”, „≥”.
2. Există sisteme de două, de trei sau de mai multe inecuații.



**Rețineți!**

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.  
**Mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații** (notată cu  $S$ ) este **intersecția** mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem.

**Definiție**

Două sisteme de inecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Între sistemele de inecuații echivalente se scrie simbolul „ $\Leftrightarrow$ ”.

**Observație**

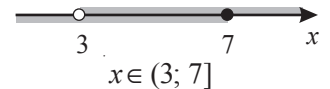
Sistemele echivalente de inecuații ce se rezolvă pe o mulțime se numesc **echivalente în această mulțime**.

**Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul de inecuații  $\begin{cases} 3(x-1) \leq 2(x+2), \\ 2x-1 > 5. \end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases} 3(x-1) \leq 2(x+2), \\ 2x-1 > 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 \leq 2x+4, \\ 2x > 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7, \\ x > 3. \end{cases}$$



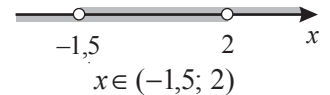
Răspuns:  $S = (3; 7]$ .

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația dublă  $-2 < 2x+1 < 5$ .

Rezolvare:

Inecuația poate fi scrisă sub formă de sistem de inecuații:

$$-2 < 2x+1 < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > -2, \\ 2x+1 < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -3, \\ 2x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1,5, \\ x < 2. \end{cases}$$

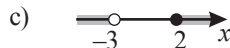
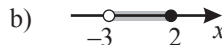


Răspuns:  $S = (-1,5; 2)$ .

**Exerciții și probleme**

**Fixăm cunoștințele**

1. Precizați care desen este reprezentarea pe axă a intervalului  $(-3; 2]$ :



2. Reprezentați pe axa numerelor și scrieți sub formă de interval de numere reale mulțimea soluțiilor inecuației:

- a)  $-3 \leq x < -2$ ;    b)  $6,5 \leq x \leq 11,5$ ;    c)  $2 < x < 4$ ;    d)  $x > -2$ ;    e)  $x \leq 6$ .

3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

- a)  $7x-5,3 < 8,7$ ;    b)  $1-3x > 7$ ;    c)  $30+5x \leq 18-7x$ ;  
 d)  $5(x-1)+7 \geq 1-3(x+2)$ ;    e)  $x - \frac{2x+3}{2} \leq \frac{x-1}{4}$ ;    f)  $0,5-3 \geq 2+5(1-x)$ .


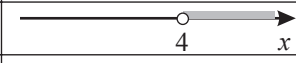
4. Rezolvați în  $\mathbb{N}$  inecuația:

- a)  $5,6(x-3)-3,2(2-x) < 20,8$ ;    b)  $4,8(x-4)-3,7(2-x) < 24,4$ ;    c)  $2,85(x+1) \geq 3-2(x-0,5)$ .



5. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul de inecuații:

- a)  $\begin{cases} 2x+1 > 0, \\ x-3 < 0; \end{cases}$     b)  $\begin{cases} 1-x \leq 0, \\ 3x+2 < 0; \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x-0,5 \geq 0, \\ 2x-5 \geq 0; \end{cases}$     d)  $\begin{cases} 1,2x-6 \leq 0, \\ 4x-3 \leq 0. \end{cases}$

6.  **Lucrați în perechi!** Completați tabelul folosind modelul din linia 1:

1	$x$ mai mic sau egal cu șapte	$x \leq 7$	$(-\infty; 7]$	
2	$x$ mai mare sau egal cu doi			
3		$-3 < x < 5$		
4	$x$ mai mic decât 5,4			
5				
6			$(-\sqrt{3}; +\infty)$	

### Formăm abilitățile și aplicăm

7.  **Investigați!** Aflați ce costă mai mult: 7 pixuri sau 10 blocnotesuri, dacă se știe că 2 pixuri costă mai mult decât 3 blocnotesuri.
8. Câte numere naturale  $n$  există, astfel încât  $6n + 15 \leq 70$ ?
9. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x - 1$ . Aflați intervalele în care:  
a)  $f(x) \geq 0$ ;      b)  $f(x) < 0$ .
10. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x + 1$ .  
a) Stabiliți dacă punctul  $A(-1; 0)$  aparține graficului funcției  $f$ .  
b) Determinați intervalele în care  $f(x) > 0$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) \leq 0$ .  
c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $f(1) + |f(x) - x| \leq f(0)$ .
11. Ana și Maria țin un regim de slăbire. Ana, care avea între 60 și 65 kg, a slăbit între 3 și 4 kg. Maria, care avea între 60 și 67 kg, a slăbit între 4 și 5 kg. Determinați ce va arăta cântarul dacă Ana și Maria se cântăresc împreună la sfârșitul regimului de slăbire.
12. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul de inecuații:  
a)  $\begin{cases} 17x - 2 > 12x - 1, \\ 3 - 9x < 1 - x; \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x - 5 \leq 15 - 3x, \\ 1 - 4x > 22 - 3x; \end{cases}$   
c)  $\begin{cases} 4 - x \geq \frac{x-1}{3}, \\ \frac{7x-1}{8} \geq 6; \end{cases}$       d)  $\begin{cases} 5(x+1) \geq 3(x+3) + 1, \\ 2(2x-1) < 7(x+1). \end{cases}$
13.  **Lucrați în perechi!** Determinați domeniul de definiție al funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :  
a)  $f(x) = \sqrt{24x - 48}$ ;      b)  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{4 - 5x}}$ ;  
c)  $f(x) = \sqrt{10 - x} + \frac{1}{\sqrt{2x - 6}}$ .
14. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația dublă:  
a)  $-5 < 3 - 2x < 1$ ;      b)  $1 < 3x - 2 < 7$ ;  
c)  $-2 \leq 4 - 3x \leq 10$ ;      d)  $3x - 2 < 4x + 1 < 3x + 5$ .
15. Pe un raft sunt cu 5 cărți mai multe decât pe altul. Se știe că pe raftul al doilea sunt mai puțin de 11 cărți, iar pe ambele rafturi sunt nu mai puțin de 25 de cărți. Câte cărți sunt pe ambele rafturi?
16. Segmentele de lungimi 5, 8 și  $x$  sunt laturile unui triunghi. Aflați valorile posibile ale necunoscutei  $x$ .
17. Un autobuz a făcut într-o zi 8 curse și a transportat mai mult de 187 de pasageri, astfel încât toate locurile au fost ocupate și numai într-o cursă 2 pasageri au călătorit în picioare. În ziua următoare, același autobuz a făcut 15 curse și a transportat mai puțin de 367 de pasageri. În total, în această zi, numai 3 locuri n-au fost ocupate. Aflați câte locuri are autobuzul.
18. (EG, 2019) Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -4x + 2$ ,  $g(x) = 2x + 9$ . Determinați valorile reale ale lui  $x$ , pentru care valoarea expresiei  $f(x) - g(x)$  este nenegativă.
19. (EG, 2021) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x + 5$ . Determinați valorile reale ale lui  $x$ , pentru care valorile respective ale funcției  $f$  nu sunt mai mari decât 2.

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

20. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:      a)  $|3x + 2| > 1$ ;      b)  $|6 - 9x| \geq 18$ ;      c)  $|3x + 7| < 5$ .
21. Aflați valorile parametrului real  $a$  pentru care sistemul de inecuații are cel puțin o soluție reală:  
a)  $\begin{cases} x < 2, \\ x > a; \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x \leq 3, \\ x > a; \end{cases}$       c)  $\begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq a; \end{cases}$       d)  $\begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq a. \end{cases}$
22. Determinați valorile parametrului real  $a$ , astfel încât sistemul de inecuații să nu aibă soluții:  
a)  $\begin{cases} x < 3, \\ x > a; \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x \leq 2, \\ x > a; \end{cases}$       c)  $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq a; \end{cases}$       d)  $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq a. \end{cases}$

## § 2. Inecuații de gradul II cu o necunoscută. Metoda intervalelor

### 2.1. Inecuații de gradul II cu o necunoscută



- Trasați în diferite sisteme de coordonate graficele funcțiilor:  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3;$   $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + 4x + 4;$   
 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = -x^2 + 2x - 5.$
- Aflați semnele fiecărei funcții  $f, g, h.$
- Comparați și comentați rezultatele.



**Investigăm** • Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $x^2 - x - 6 > 0.$

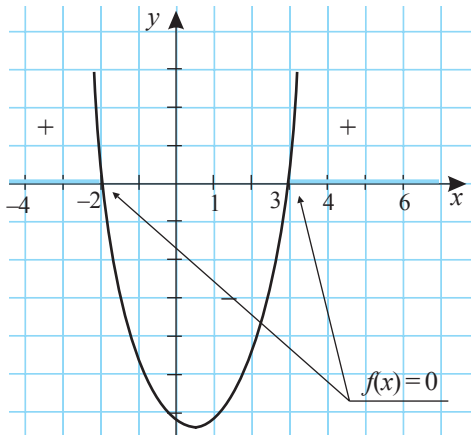


Fig. 2

*Rezolvare:*

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 6.$

Aflăm zerourile funcției  $f:$

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ sau } x = 3.$$

Reprezentăm schematic graficul funcției  $f$  (parabola) într-un sistem de axe ortogonale (fig. 2).

Folosind graficul, determinăm valorile lui  $x$  pentru care  $f(x) > 0.$

Obținem  $x < -2$  sau  $x > 3.$

$$\text{Răspuns: } S = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty).$$

#### Definiție

Inecuațiile de forma  $ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \leq 0,$   $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$  se numesc **inecuații de gradul II cu o necunoscută.**



#### Rețineți!

- Numărul  $m$  este **o soluție** a unei inecuații cu o necunoscută, dacă prin substituirea necunoscutei cu  $m$  în această inecuație se obține o propoziție adevărată.

Inecuații echivalente se obțin aplicând proprietăți ale inegalităților numerelor reale.

#### Algoritmul de rezolvare a inecuației de gradul II

- Prin transformări echivalente, reprezentăm inecuația sub forma  
 $ax^2 + bx + c > 0$  ( $ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c \leq 0$ ),  $a \neq 0.$
- Examinăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$
- Aflăm zerourile funcției  $f$  prin rezolvarea ecuației  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$
- Trasăm schematic graficul funcției  $f.$
- Determinăm valorile lui  $x$  pentru care  $f(x) > 0$  ( $f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$ ).
- Scriem răspunsul sub formă de interval numeric.

**Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$ .

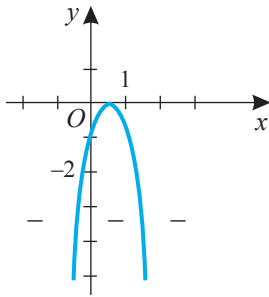


Fig. 3

*Rezolvare:*

Cercetăm funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ .

Aflăm zerourile funcției  $f$ :  $-4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale graficul funcției  $f$  (fig. 3).

Cu ajutorul acestui grafic, stabilim că  $f(x) \geq 0$  numai pentru  $x = \frac{1}{2}$ .

*Răspuns:*  $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ .

Acest mod de rezolvare a inecuațiilor de gradul II cu o necunoscută se bazează pe proprietăți ale funcției de gradul II.

**Studiul inecuațiilor  $ax^2 + bx + c > 0$ ,  $a \neq 0$ , și  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $a \neq 0$**

Valorile lui		Semnele funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ , $a \neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c > 0$ , $a \neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2 + bx + c \geq 0$ , $a \neq 0$
$a$	$\Delta$			
$a > 0$	$\Delta > 0$		$S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$S = (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
	$\Delta = 0$		$S = \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$	$S = \mathbb{R}$
	$\Delta < 0$		$S = \mathbb{R}$	$S = \mathbb{R}$
$a < 0$	$\Delta > 0$		$S = (x_1; x_2)$	$S = [x_1; x_2]$
	$\Delta = 0$		$S = \emptyset$	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$		$S = \emptyset$	$S = \emptyset$



**Rețineți!**

Inecuațiile de forma  $ax^2 + bx + c < 0$ ,  $ax^2 + bx + c \leq 0$ ,  $a \neq 0$ , se reduc, prin înmulțirea coeficienților lor cu  $-1$ , la inecuații de forma celor prezentate în tabel.

## 2.2. Metoda intervalelor



### Investigăm

• Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $x^2 - 2x - 15 < 0$ .

*Rezolvare:*

Descompunem în factori membrul stâng al inecuației:  $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$ .

Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 5$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 3$ . Alcătuiți tabelul de variație a semnelor funcțiilor  $f$  și  $g$ :

$x$	$-\infty$	$-3$		$5$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f(x) \cdot g(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Din tabel rezultă că pe fiecare dintre intervalele  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 5)$  și  $(5; +\infty)$  funcția  $f \cdot g$  își păstrează semnul. Se spune că funcția  $f \cdot g$ , trecând prin punctele  $-3$  și  $5$ , își schimbă semnul, și anume:



Astfel, am obținut că  $x^2 - 2x - 15 < 0$  pentru  $x \in (-3; 5)$ .

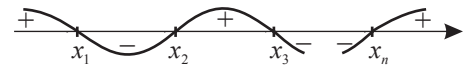
*Răspuns:*  $S = (-3; 5)$ .

### Generalizăm

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ , unde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt numere reale distincte.

Zerourile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ale funcției  $f$  împart domeniul ei de definiție în intervale, astfel încât pe fiecare dintre aceste intervale funcția  $f$  își păstrează semnul, iar trecând prin punctele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , această funcție își schimbă semnul.

Schimbarea semnelui funcției  $f$  se reprezintă grafic prin „curba semnelor”:



Această reprezentare se interpretează astfel: pe intervalele unde „curba semnelor” e situată deasupra axei numerelor este adevărată inegalitatea  $f(x) > 0$ , iar pe intervalele unde „curba semnelor” e situată sub axa numerelor este adevărată inegalitatea  $f(x) < 0$ .

Această metodă de rezolvare a inecuațiilor este numită **metoda intervalelor**.

### Aplicăm

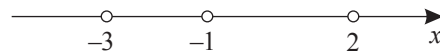
1 Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $(x - 2)(x + 1)(x + 3) > 0$ .

*Rezolvare:*

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$ .

Aflăm zerourile funcției  $f$ :  $f(x) = 0$  pentru  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 2$ .

Reprezentăm pe axa numerelor zerourile funcției  $f$ :

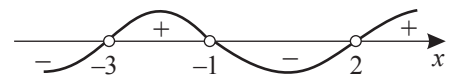


Determinăm semnul funcției  $f$  pe  $(2; +\infty)$ . Pentru aceasta, luăm un punct arbitrar din intervalul dat și aflăm semnul funcției  $f$  în punctul ales:

$$4 \in (2; +\infty), f(4) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 > 0.$$

Prin urmare,  $f(x) > 0$  pentru  $x \in (2; +\infty)$ .

Procedăm similar pentru celelalte intervale și construim „curba semnelor”:



Așadar,  $f(x) > 0$  pentru  $x \in (-3; -1) \cup (2; +\infty)$ .

*Răspuns:*  $S = (-3; -1) \cup (2; +\infty)$ .

**2** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $x(6-x)(x+2) \leq 0$ .

*Rezolvare:*

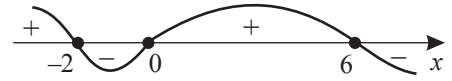
Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(6-x)(x+2)$ . Aflăm zerourile funcției  $f$ :

$f(x) = 0$  pentru  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 6$ .

Construim „curba semnelor”:

Așadar,  $f(x) \leq 0$  pentru  $x \in [-2; 0] \cup [6; +\infty)$ .

*Răspuns:*  $S = [-2; 0] \cup [6; +\infty)$ .



## 2.3. Inecuații raționale



### Investigăm

• Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $\frac{2x+6}{x-1} < 0$ .

*Rezolvare:*

$$\frac{2x+6}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x+6)(x-1) < 0.$$

Fie funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (2x+6)(x-1)$ .

Avem  $g(x) = 0$  pentru  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 1$ .

Construim „curba semnelor”:

Obținem  $g(x) < 0$  pentru  $x \in (-3; 1)$ .

*Răspuns:*  $S = (-3; 1)$ .



### Definiție

Inecuațiile de forma  $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ,  $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ ,  $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ ,  $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ , unde  $P(x)$ ,  $Q(x)$  sunt expresii algebrice raționale, se numesc **inecuații raționale cu o necunoscută**.

### Observație

Inecuația  $\frac{2x+6}{x-1} < 0$  poate fi rezolvată și fără a fi înlocuită cu inecuația  $(2x+6)(x-1) < 0$ , echivalentă ei. Pentru aceasta, cercetăm funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$ , aflăm zerourile ei (zerourile numărătorului) și zerourile numitorului fracției corespunzătoare și le reprezentăm pe axa numerelor. Apoi construim „curba semnelor” și selectăm intervalele respective.

La rezolvarea prin metoda intervalelor a inecuațiilor raționale cu o necunoscută la numitor poate fi aplicat următorul **algoritm**:

- ① Efectuăm transformările necesare și scriem inecuația sub forma  $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$  ( $\geq, <, \leq$ ), unde  $P(x)$  și  $Q(x)$  sunt expresii algebrice raționale.
- ② Aflăm mulțimea  $D$  care se obține excluzând din  $\mathbb{R}$  soluțiile ecuației  $Q(x) = 0$ .
- ③ Definim funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ .
- ④ Aflăm zerourile funcției, adică zerourile numărătorului, rezolvând ecuația  $P(x) = 0$ .
- ⑤ Reprezentăm pe axa numerelor domeniul  $D$  și zerourile funcției  $f$ .
- ⑥ Construim „curba semnelor”.
- ⑦ Selectăm intervalele corespunzătoare semnului funcției  $f$ .
- ⑧ Scriem răspunsul.

**Aplicăm**

- Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $\frac{5-x}{2x+2} \geq 0$ .  
Rezolvare:

$$2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1. \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

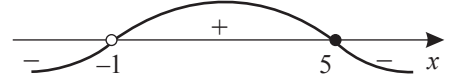
Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{5-x}{2x+2}$ . Avem  $f(x)=0$  pentru  $x=5$ .

Ținem cont că 5 este soluție, iar -1 nu este soluție a inecuației.

Construim „curba semnelor”:

Așadar,  $f(x) \geq 0$  pentru  $x \in (-1; 5]$ .

Răspuns:  $S = (-1; 5]$ .



**Rețineți!**

1. Valorile pentru care funcția  $f$  nu este definită (zerourile numitorului) nu se includ în mulțimea soluțiilor inecuației inițiale (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cerceulețe necolorate).
2. Zerourile funcției  $f$  (zerourile numărătorului) nu aparțin mulțimii soluțiilor inecuației date, dacă această inecuație conține semnul „>” sau „<”. Zerourile funcției  $f$  aparțin mulțimii soluțiilor, dacă inecuația inițială conține semnul „≥” sau „≤” (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cerceulețe colorate) și aparțin  $D(f)$ .

## Exerciții și probleme

**Fixăm cunoștințele**

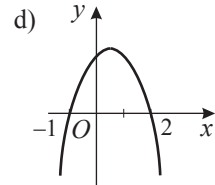
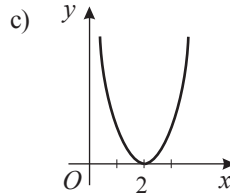
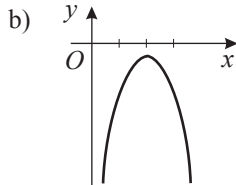
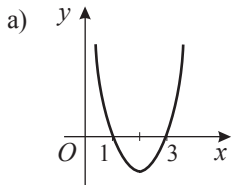
1. Precizați dacă sunt echivalente inecuațiile:

a)  $x^2 \leq 1$  și  $x \leq 1$ ;

b)  $x^2 > 4$  și  $x > 2$ ;

c)  $(x+3)^2 \geq 0$  și  $(x+5)^2 \geq 0$ .

2. **Investigați!** Funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , este definită de graficul ei. Determinați, cu ajutorul graficului, mulțimile soluțiilor inecuațiilor  $f(x) > 0$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) \leq 0$ .



3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $6x^2 - 7x + 2 > 0$ ;

b)  $-x^2 - 2x + 48 < 0$ ;

c)  $8x^2 + 10x - 3 \leq 0$ ;

d)  $25x^2 - 10x + 1 > 0$ ;

e)  $49x^2 - 28x + 4 \leq 0$ ;

f)  $4x^2 - 4x + 15 > 0$ ;

g)  $7x < x^2$ ;

h)  $4x^2 - x < 5$ .

4. Folosind metoda intervalelor, rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $(x+8)(x-5) > 0$ ;

b)  $x(x+2) \leq 0$ ;

c)  $\frac{x-5}{x+6} < 0$ ;

d)  $\frac{x+1}{x+4} \geq 0$ ;

e)  $\frac{2x-1}{1-3x} \geq 0$ .

**Formăm abilitățile și aplicăm**

5. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $x(x+5) - 2 > 4x$ ;

b)  $(x+4)(x+5) - x \leq 5$ ;

c)  $(5x+1)(3x-1) > (4x-1)(x+2)$ ;

d)  $2x(3x-1) \geq 4x^2 + 5x + 9$ .

6. **Lucrați în perechi!** Compuneți o inecuație de gradul II cu mulțimea soluțiilor:

a)  $S = \mathbb{R}$ ;

b)  $S = \emptyset$ ;

c)  $S = [-2; 3]$ ;

d)  $S = (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$ ;

e)  $S = \{3\}$ .

7. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $3x^2 + 4 \leq 10 - x(x-2)$ ;

b)  $(3x-2)^2 \geq 3x(x-1)$ ;

c)  $\frac{-3}{x^2+x-20} \geq 0$ ;

d)  $\frac{1}{x^2+5x+7} < 0$ .

8.  **Lucrați în perechi!** Determinați domeniul de definiție al funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \sqrt{1-x-2x^2}$ ;

b)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x^2+12x}}$ .

9.  **Lucrați în grup!** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $x(x+2)(x-3) < 0$ ;

b)  $(2x+1)(3-x)(x+5) \geq 0$ ;

c)  $(x-1)(x^2-5x+6) \leq 0$ ;

d)  $\frac{x^2-x-6}{x-1} \geq 0$ .

**Dezvoltăm abilitățile și creăm**

10. Poate fi decupat dintr-o foaie de hârtie cu dimensiunile de 10 cm și 3 cm un dreptunghi care are lățimea cu 4 cm mai mică decât lungimea și aria mai mare de 21 cm<sup>2</sup>?

11. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $\frac{4x-2}{3x+5} + 4 \leq 0$ ;

b)  $3-x \geq \frac{1}{2-x}$ ;

c)  $x + \frac{2}{x} > 3$ ;

d)  $\frac{7x-5}{x+1} > x$ .

12. Determinați domeniul de definiție al funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \sqrt{-x^2+x+30} + \frac{1}{x-1}$ ;

b)  $f(x) = \sqrt{x^2-x-42} + \sqrt{100-x^2}$ .

13. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația dublă:

a)  $-4 \leq x^2 - 5x + 2 \leq -2$ ;

b)  $-1 < x^2 + 2x < 3$ .

14. Aflați valorile parametrului real  $m$ , astfel încât inecuația să fie adevărată pentru orice  $x$  real:

a)  $5x^2 - x + m > 0$ ;

b)  $mx^2 - 10x - 5 < 0$ .

15. Determinați valorile parametrului real  $a$  pentru care inecuația nu are soluții:

a)  $x^2 + ax + 1 < 0$ ;

b)  $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$ .


**Exerciții și probleme recapitulative**

**Fixăm cunoștințele**

1. Determinați cea mai mare soluție întreagă a inecuației:

a)  $x + 2 \geq 2,5x - 1$ ;

b)  $x - \frac{x+4}{4} + \frac{3x-1}{2} < 3$ .

2.  **Investigați!** Aflați cel mai mic număr natural ce aparține mulțimii soluțiilor inecuației  $3x - 2 < 1,5x + 4$ .

3. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $x^2 + 3x + 2 > 0$ ;

b)  $2x < x^2$ ;

c)  $4x^2 < 1$ ;

d)  $(x-3)(x+7) \geq 0$ ;

e)  $x^2 - x + 3 > 0$ ;

f)  $\frac{x-5}{3x+3} \leq 0$ .

**Formăm abilitățile și aplicăm**

4. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul de inecuații:

a)  $\begin{cases} x-4 > 5-2x, \\ 3-2x < 7+x; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 10x-2 > 4x+1, \\ 2x-\frac{2}{3} > \frac{3x}{2}-\frac{1}{2}. \end{cases}$

5.  **Investigați!** Aflați cel mai mic număr întreg care aparține domeniului de definiție al funcției definite prin formula

$f(x) = \sqrt{4+x+\frac{3}{x}}$ .


6. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația:

a)  $(x-4)^2 + 12 \geq (3x-2)^2$ ;

b)  $3x(x+\sqrt{3}) \leq (x+\sqrt{3})^2$ ;

c)  $\frac{(x-2)(x^2+4)}{3x+1} \leq 0$ ;

d)  $\frac{7x}{3x-4} \geq 1$ .

7.  **Lucrați în perechi!** Pentru care valori ale lui  $x$  valoarea funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x^2 - 14x + 20$ , este mai mare decât valorile corespunzătoare ale funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 - 2x - 16$ ?

8. (EG, 2021) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3x + 5$ . Determinați valorile reale ale lui  $x$ , pentru care valorile respective ale funcției  $f$  nu sunt mai mari decât 2.
9. (EG, 2023) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 4$ . Determinați valorile reale ale lui  $x$ , pentru care  $f(3) \cdot f(x) < 3x$ .

**Dezvoltăm abilitățile și creștem**

10. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul de inecuații: a)  $\begin{cases} x-2 > 5x - \frac{x-3}{2}, \\ |3x+2| < 10; \end{cases}$  b)  $\begin{cases} |x-2| \geq 6, \\ |x-5| \leq 3. \end{cases}$
11. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația dublă  $1 < \frac{7x-2}{2x+1} < 3$ .
12. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $\frac{|x+1|}{x^2+4x-12} \geq 0$ .
13. Aflați valorile parametrului real  $a$  pentru care inecuația  $ax^2 - 8ax + 3a + 7 \geq 0$  nu are soluții în  $\mathbb{R}$ .
14. Determinați valorile parametrului real  $a$ , astfel încât orice  $x \in \mathbb{R}$  să fie soluție a inecuației  $(a^2 - 1)x^2 + 2(1 - a)x + 2 \geq 0$ .
15. Rezolvați în mulțimea  $\mathbb{Z}$  ecuația  $28x + 30y + 31z = 365$ .  
*Indicație.* Una dintre soluțiile ecuației reprezintă lunile anului.

16.  **Lucrați în grup!**  **Proiect.** Ecuații, inecuații, sisteme în chimie și în fizică.

## Test sumativ



*Timp efectiv de lucru:*  
45 de minute

### Varianta I

1. Fie expresiile  $E_1 = \frac{2x-5}{3}$  și  $E_2 = -\frac{4x+1}{5}$ .
- a) Aflați valorile reale ale lui  $x$ , astfel încât  $E_1 < E_2$ .
- b) Aflați valorile reale ale lui  $x$  pentru care suma expresiilor  $E_1$  și  $E_2$  este un număr nenegativ.
- c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul  $\begin{cases} E_1 > 0, \\ E_2 \leq 0. \end{cases}$
2. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $x(x-5) - 8 \geq 2x$ .
3. Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x^2 + x - 3$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + 5$ .
- a) Indicați litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă este falsă:  
 „Funcția  $g$  ia valori pozitive pentru  $x \in (5; +\infty)$ ”.
- A                      F
- b) Aflați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ .
4. La o piscină, costul este de 20 de lei pe oră, iar consumația minimă este de 40 de lei. La o altă piscină, costul este de 15 lei pe oră, iar consumația minimă este de 60 de lei. Determinați după câte ore oferta celei de-a doua piscine este mai avantajoasă decât oferta primei piscine.

### Varianta II

1. Fie expresiile  $M_1 = \frac{1-3x}{2}$  și  $M_2 = \frac{2x+3}{7}$ .
- a) Aflați valorile reale ale lui  $x$ , astfel încât  $M_1 < M_2$ .
- b) Aflați valorile reale ale lui  $x$  pentru care diferența  $M_1 - M_2$  este un număr nenegativ.
- c) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  sistemul  $\begin{cases} M_1 \leq 0, \\ M_2 > 0. \end{cases}$
2. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $x(x-3) - 6 \leq 2x$ .
3. Fie funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x + 6$ , și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3x^2 - 8x - 3$ .
- a) Indicați litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă este falsă:  
 „Funcția  $f$  ia valori negative pentru  $x \in (6; +\infty)$ ”.
- A                      F
- b) Aflați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ .
4. Compania „Moldnet” propune conectarea la internet la prețul de 240 de lei pentru instalare și taxa lunară de 150 de lei. Compania „Supernet”, oferind aceeași viteză a internetului, propune conectarea la prețul de 300 de lei pentru instalare și taxa lunară de 140 de lei. Determinați după câte luni oferta companiei „Supernet” devine mai convenabilă.

# Elemente de teoria probabilităților și de statistică matematică. Elemente de calcul financiar

*Omul fără învățătură e ca pământul fără udătură.*

Proverb

Deseori în viață folosim termenii: *eveniment*, *întâmplător*, *aleator*, *posibil*, *probabil*, *sigur*, *șansă*, *probabilitate*. Ce înseamnă acești termeni? De ce trebuie să-i cunoaștem? Când și cum îi putem utiliza?

Răspunsurile la întrebările de mai sus le vom găsi în acest capitol.

## § 1. Noțiunea de eveniment

### ■ Cercetăm

1. Se aruncă un zar. Ce rezultat vom obține în urma experimentului „Aruncarea zarului”?
2. Daniela a cumpărat un bilet de loterie. Acest bilet poate fi câștigător sau nu. Există oare alte cazuri posibile?
3. Fie experimentul „Aruncarea unei mingi de baschet la coș”. Care sunt rezultatele posibile ale acestui experiment?



*Rezolvare:*

1. Nu putem prevedea care dintre fețele marcate cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte va apărea. Deci, se va obține întâmplător (aleatoriu) una dintre fețe.
2. Desigur, biletul poate fi câștigător sau nu. Alte cazuri posibile nu există.
3. În urma experimentului „Aruncarea unei mingi de baschet la coș” pot fi atestate două rezultate: marcare sau nu.  
Aruncarea zarului, cumpărarea biletului de loterie, aruncarea mingii de baschet la coș sunt exemple de experimente.

### ■ Definiții

- ◆ Realizarea unui experiment se numește **probă**.
- ◆ Rezultatul unui experiment se numește **eveniment**.

De exemplu, „Apariția feței marcate cu 5 puncte” este un eveniment al experimentului „Aruncarea zarului”; „Biletul nu este câștigător” este un eveniment al experimentului „Participarea la loterie”.

Există multe evenimente despre care nu putem spune cu certitudine dacă se vor realiza sau nu. De exemplu, evenimentele „Apariția feței cu 3 puncte la aruncarea zarului”, „Marcarea mingii la aruncarea acesteia la coș” nu pot fi anticipate cu siguranță. Acestea depind de mulți factori întâmplători și sunt numite *evenimente aleatoare*.

### ■ Definiție

**Eveniment aleator** se numește evenimentul care, în urma efectuării experimentului, se poate realiza, dar poate și să nu se realizeze.

Evenimentul „Apariția uneia dintre fețele cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte la aruncarea zarului” este un eveniment sigur, iar evenimentul „Extragerea a două creioane de culoare verde din cutia cu creioane de culoare albastră sau roșie” este un eveniment imposibil. Evenimentul „O pisică vorbește”, de asemenea, este un eveniment imposibil.

## Definiție

- ◆ **Eveniment imposibil** se numește evenimentul care nu se realizează niciodată. Evenimentul imposibil se notează cu  $\emptyset$ .
- ◆ **Eveniment sigur** se numește evenimentul care se realizează în urma oricărei probe. Evenimentul sigur se notează, de regulă, cu  $E$ .

De exemplu, evenimentul „După marți urmează duminică” este un eveniment imposibil, iar evenimentul „După iunie urmează luna iulie” este un eveniment sigur.



## Rețineți!

- Evenimentele pot fi clasificate în: *sigure*, *imposibile* și *aleatoare*.
- Evenimentele se notează, de regulă, cu litere majuscule:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  etc.
- Orice eveniment este legat de un experiment.

**Atenție!** În cadrul unui experiment există un număr de cazuri posibile și un număr de cazuri favorabile pentru evenimentul dat, din numărul de cazuri posibile.

## Exemple

- La aruncarea unei monede sunt două posibilități: {apariția stemei, apariția valorii}. Deci, avem două evenimente aleatoare:  $A = \{\text{apariția feței cu stema}\}$ ;  $B = \{\text{apariția feței cu valoarea}\}$ .

Atât evenimentul  $A$ , cât și evenimentul  $B$  au câte un singur caz favorabil din două cazuri posibile.



- La aruncarea unui zar poate apărea una dintre fețele marcate cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte. Prin urmare, există șase posibilități:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

## Observație

La aruncarea unui zar pot fi definite și alte evenimente, nu numai apariția feței cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte. Astfel de evenimente vor fi cercetate în continuare.

Există evenimente care au șanse egale de realizare. De exemplu, dacă într-o cutie sunt tot atâtea creioane albastre câte roșii, atunci evenimentul  $B = \{\text{creionul extras este albastru}\}$  și evenimentul  $C = \{\text{creionul extras este roșu}\}$  au aceeași șansă de realizare. În cazul în care numărul creionelor roșii din cutie este mai mare decât numărul creionelor albastre, evenimentul  $C$  are o probabilitate mai mare de realizare decât evenimentul  $B$ .

## Aplicăm

La aruncarea unui zar examinăm evenimentele:

- $A_1 = \{\text{apariția feței cu 1 punct}\}$ ;
- $A_2 = \{\text{apariția feței cu 3 sau 4 puncte}\}$ ;
- $A_3 = \{\text{apariția feței cu 7 puncte}\}$ ;
- $A_4 = \{\text{apariția feței cu un număr par de puncte}\}$ ;
- $A_5 = \{\text{apariția feței cu un număr impar de puncte}\}$ ;
- $A_6 = \{\text{apariția feței cu un număr de puncte mai mic decât 5}\}$ ;
- $A_7 = \{\text{apariția uneia dintre fețele cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte}\}$ .



1) Corelați termenii *eveniment sigur*, *eveniment posibil*, *eveniment mai posibil decât*, *eveniment imposibil*, *evenimente egal posibile* cu evenimentele  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ .

2) Determinați numărul de cazuri favorabile pentru fiecare dintre evenimentele  $A_1-A_7$ .  
*Rezolvare:*

1) Evenimentele  $A_1, A_2, A_4, A_5, A_6$  sunt posibile; evenimentul  $A_3$  este imposibil; evenimentul  $A_7$  este sigur; evenimentul  $A_2$  este mai mult posibil decât evenimentul  $A_1$ ; evenimentul  $A_6$  este mai mult posibil decât evenimentul  $A_2$ ; evenimentele  $A_4$  și  $A_5$  sunt egal posibile. (Propuneți și alte relații.)

2) Evenimentul  $A_1$  are un singur caz favorabil;  $A_2$  are 2 cazuri favorabile;  $A_3$  nu are cazuri favorabile;  $A_4$  are 3 cazuri favorabile;  $A_5$  are 3 cazuri favorabile;  $A_6$  are 4 cazuri favorabile;  $A_7$  are 6 cazuri favorabile din 6 cazuri posibile.



### Rețineți!

Elementele mulțimii evenimentelor posibile ale unui experiment aleator se numesc **evenimente elementare**.

### Exemple

- La aruncarea unui zar evenimentul  $A_1$  este elementar. Evenimentul „Apariția unui număr impar” nu este elementar.
- La aruncarea unei monede sunt două evenimente elementare: {apariția stemei}, {apariția valorii}.



### Rețineți!

Evenimentele unui experiment aleator se consideră **egal posibile**, dacă se poate afirma cu certitudine că fiecare are aceeași șansă de realizare.

### Exemple

- Evenimentele  $A_4$  și  $A_5$ , la aruncarea zarului, sunt egal posibile.
- La aruncarea zarului avem 6 evenimente egal posibile, referitoare la apariția feței cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte.

### Observație

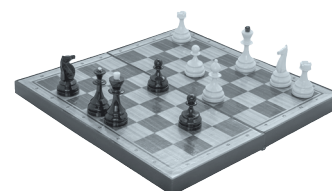
Noțiunea de evenimente egal posibile ne permite să comparăm două evenimente aleatoare din punctul de vedere al șansei de realizare. De fapt, trăim în lumea experimentelor și evenimentelor aleatoare (întâmplătoare). De aceea este important să știm dacă putem găsi unele legități în lumea evenimentelor aleatoare. Putem oare determina șansa realizării evenimentului aleator care ne interesează?

Răspunsuri la astfel de întrebări ne dă un compartiment important al matematicii care se numește **Teoria probabilităților**.


## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

- Indicați câteva evenimente pentru experimentul:
  - Se ia la întâmplare un număr din mulțimea  $\{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100\}$ .
  - Se aruncă o monedă de trei ori.
  - Se încălzește apa până la temperatura de  $100^\circ\text{C}$ .
  - Se joacă o partidă de șah.




2. Determinați și scrieți evenimentele elementare ale experimentului:
  - a) Se alege o zi a săptămânii.
  - b) Se alege șeful clasei din două candidaturi.
  - c) Se extrage la întâmplare o bilă dintr-o urnă ce conține 10 bile albe numerotate cu 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10.
  - d) Se extrage o bilă dintr-o urnă cu bile albe și negre.

3.  **Lucrați în perechi!** Determinați care dintre evenimente este sigur, imposibil, aleator:

- a) În anul 2029 populația Terrei va depăși 8 miliarde de locuitori.
- b) În anul 2030 în Republica Moldova se vor naște 25 000 de băieți.
- c) După miercuri urmează marți.
- d) Ziua de naștere a unui prieten este pe 30 februarie.
- e) După sâmbătă urmează duminică.
- f) După octombrie urmează decembrie.

### Formăm abilitățile și aplicăm

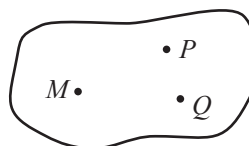
4.  **Investigați!** Comparați șansa de producere a evenimentelor  $A$  și  $B$  utilizând termenii „e mai posibil decât”, „e mai puțin posibil decât”, „sunt egal posibil”.

- a) Dimineața în care te trezești este a unei zile:  
 $A = \{\text{obișnuite (de lucru)}\}$ ;  $B = \{\text{de odihnă (de sărbătoare)}\}$ .
- b) Echipa de fotbal a Republicii Moldova joacă cu echipa de fotbal a Braziliei:  
 $A = \{\text{învinge echipa Republicii Moldova}\}$ ;  $B = \{\text{învinge echipa Braziliei}\}$ .
- c) Se aruncă un zar:  
 $A = \{\text{apare fața cu 6 puncte}\}$ ;  $B = \{\text{apare o față care nu are 6 puncte}\}$ .
- d) S-a dat testul la matematică:  
 $A = \{\text{toți elevii au luat nota 10}\}$ ;  $B = \{\text{unii elevi au luat nota 10}\}$ .



5.  **Investigați!** Se unesc la întâmplare trei puncte necoliniare.

Ce figuri geometrice se pot obține?  
 Care este șansa să obținem un triunghi?



6. Se aruncă simultan două zaruri și se scrie suma punctelor obținute.  
 Ținând cont de rezultatele posibile, dați câte două exemple de:
  - a) evenimente sigure;
  - b) evenimente imposibile;
  - c) evenimente aleatoare.
7. Formulați exemple de evenimente sigure, imposibile și aleatoare din diverse discipline școlare.

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

8. Dați câte trei exemple de evenimente sigure, imposibile și aleatoare ale experimentelor din diverse domenii.
9. Într-o urnă sunt 5 bile albe, 8 bile negre și 10 bile roșii. Aflați numărul minim de bile ce trebuie extrase simultan la întâmplare, astfel încât printre ele să fie:
  - a) două bile roșii;
  - b) trei bile negre;
  - c) o bilă albă;
  - d) două bile de culori diferite;
  - e) trei bile de culori diferite.
10. Se aruncă simultan două zaruri. Determinați mulțimea ale cărei elemente reprezintă evenimentul „Obținerea sumei 6”.
11. Într-o secție lucrează 8 bărbați și 4 femei. Au fost alese la întâmplare 2 persoane. Care este șansa ca aceste persoane să fie bărbați?







**Rețineți!**

Probabilitatea evenimentului  $A$  se notează  $P(A)$ .  
Conform definiției,

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

Formula (1) reprezintă **definiția clasică a probabilității**.

**Exemple**

1. Probabilitatea apariției „stemei” la aruncarea monedei este  $P(s) = 0,5$ , iar probabilitatea apariției „valorii” este  $P(v) = 0,5$ , deoarece  $m = 1$ , iar  $n = 2$ .

2. Probabilitatea apariției feței cu 4 puncte la aruncarea unui zar este  $P(4) = \frac{1}{6}$ , deoarece  $m = 1$ , iar  $n = 6$ .

Uneori, probabilitatea se exprimă în procente.



Astfel, pentru evenimentul „Apariția stemei”,  $P(s) = 50\%$ ; pentru evenimentul „Apariția valorii”,  $P(v) = 50\%$ .

Probabilitatea se aplică pe larg în viață, în știință, în economie, în sociologie etc. De exemplu, dacă la prognoza meteo s-a anunțat că „probabilitatea de a ploua mâine este de 70%”, aceasta nu înseamnă că obligatoriu va ploua, dar șansele sunt destul de mari. Ieșind din casă, ar fi bine de luat umbrela.

**2.2. Proprietățile probabilității**



**Rețineți!**

Din definiția probabilității rezultă **proprietățile probabilității**:

1° Probabilitatea evenimentului sigur  $E$  este 1. Deci,  $P(E) = 1$ .

Într-adevăr, deoarece  $m = n$ , conform (1), obținem  $P(E) = \frac{n}{n} = 1$ .

2° Probabilitatea evenimentului imposibil este 0. Deci,  $P(\emptyset) = 0$ .

Într-adevăr, deoarece  $m = 0$ , conform (1), obținem  $P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0$ .

3° Probabilitatea unui eveniment aleator este un număr cuprins între 0 și 1.

Într-adevăr, numărul  $m$  al cazurilor favorabile evenimentului aleator  $A$  satisface dubla inegalitate  $0 < m < n$ , de unde  $0 < \frac{m}{n} < 1$ . Prin urmare,  $0 < P(A) < 1$ .

**Generalizăm**

1. Probabilitatea oricărui eveniment  $A$  satisface dubla inegalitate  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

2. Cu cât probabilitatea este mai mare, cu atât mai des se realizează evenimentul aleator în cadrul probelor efectuate ale experimentului respectiv.

**Aplicăm**

1. Calculați probabilitatea evenimentului:

- a)  $A = \{\text{apariția, la aruncarea zarului, a uneia dintre fețele cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte}\}$ ;
- b)  $B = \{\text{apariția a 9 puncte la aruncarea zarului}\}$ ;
- c)  $C = \{\text{extragerea la întâmplare a bilei albe dintr-o urnă ce conține 3 bile albe și 7 bile negre}\}$ .

**2** Ordonăți crescător probabilitățile obținute.

*Rezolvare:*

1. a) Deoarece pentru evenimentul  $A$  numărul cazurilor favorabile este  $m = 6$ , iar numărul cazurilor posibile este  $n = 6$ , obținem  $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{6} = 1$ .

Așadar, evenimentul  $A$  este un eveniment sigur și probabilitatea lui este 1.

b) Evenimentul  $B$  este un eveniment imposibil și probabilitatea lui  $P(B)$  este 0.

c) Deoarece în urnă sunt în total  $3 + 7 = 10$  (bile), numărul cazurilor favorabile evenimentului  $C$  este  $m = 3$ , iar numărul de cazuri posibile este  $n = 10$ . Atunci,  $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{3}{10} = \frac{\square}{\square} = \square$ .

Evenimentul  $C$  este un eveniment aleator, a cărui probabilitate este  $\square$ .

2. Ordonând crescător probabilitățile calculate, obținem  $0 < 0,3 < 1$  sau

$$P(B) < P(C) < P(A).$$



**Rețineți!**

Evenimentele egal posibile se mai numesc **evenimente echiprobabile**. Probabilitatea fiecăruia dintre evenimentele echiprobabile este una și aceeași.



De exemplu, evenimentele „Apariția stemei” și „Apariția valorii” sunt echiprobabile la aruncarea unei monede perfecte. Dacă însă vom arunca o monedă deformată, aceste evenimente nu mai sunt echiprobabile și probabilitatea fiecăruia poate fi calculată numai prin probe.

Putem calcula probabilitatea evenimentelor fără a efectua experimente numai dacă știm cu certitudine că toate rezultatele posibile ale experimentului sunt evenimente echiprobabile.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

- Investigați!** Care este șansa ca la aruncarea unui zar să apară fața cu numărul de puncte:

a) 6;      b) 0;      c) 10;      d) 3?
- Într-un set de 20 de pătrate, numărul pătratelor roșii este egal cu numărul pătratelor albastre. Care este șansa de a extrage un pătrat roșu? Dar un pătrat albastru?
- Lucrați în perechi!** Calculați șansa ca la aruncarea unui zar să apară o față:

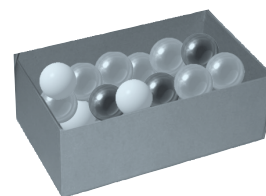
a) cu un număr mai mic decât 2;      b) cu un număr mai mare decât 2;

c) cu un număr mai mic decât 3;      d) cu un număr mai mic decât 6;


e) cu un număr mai mare decât 10.
- Aflați probabilitatea extragerii unei bile albe dintr-o urnă ce conține 15 bile albe.
- Calculați probabilitatea obținerii, la aruncarea zarului, a unui număr de puncte:

a) multiplu al lui 2;      b) multiplu al lui 3;      c) multiplu al lui 4;      d) multiplu al lui 1.
- Care este probabilitatea că după duminică urmează luni?

7. Într-o urnă sunt 4 bile albe, 5 bile negre și 11 bile roșii.  
Calculați probabilitatea ca bila extrasă la întâmplare să fie:  
a) albă;                      b) neagră;                      c) roșie.

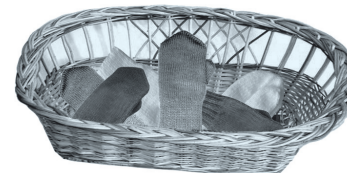


8. Care este probabilitatea ca un pește să vorbească?

9.  **Investigați!** Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul mai mic decât 91, luat la întâmplare, să fie:  
a) prim;                      b) par;                      c) impar.

### Formăm abilitățile și aplicăm

10. Într-un coș sunt 3 perechi de mănuși de diferite culori. Se iau la întâmplare două mănuși. Care este probabilitatea de a avea o pereche de mănuși de aceeași culoare?
11. O urnă conține 5 bile albe, 6 bile roșii și 7 bile verzi. Se extrage la întâmplare o bilă. Care este probabilitatea că bila extrasă nu va fi albă.



12. În clasa a IX-a învață 14 băieți și 17 fete. Pentru a fi de serviciu în clasă, se alege la întâmplare o persoană. Care este probabilitatea ca această persoană să fie:  
a) băiat;                      b) fată?

13. Într-o urnă sunt 6 bile albe, 5 bile galbene și 13 bile verzi. Aflați numărul minim de bile ce trebuie extrase simultan, la întâmplare, astfel încât printre ele să se afle:  
a) două bile verzi;    b) două bile albe;    c) două bile galbene;    d) două bile de culori diferite.
14. Într-o urnă sunt 30 de bile numerotate: 1, 2, 3, ..., 30. Ordonăți probabilitățile de realizare a evenimentelor:  
 $A = \{\text{extragerea unei bile, al cărei număr împărțit la 5 dă restul } 1\}$ ;  
 $B = \{\text{extragerea unei bile cu numărul un pătrat perfect}\}$ .

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

15. Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul mai mic decât 501, luat la întâmplare, să aibă suma cifrelor egală cu 13.
16. Într-o urnă sunt 50 de jetoane numerotate: 1, 2, 3, ..., 50. Ordonăți probabilitățile de producere a evenimentelor:  
 $A = \{\text{extragerea unui număr prim cu } 15\}$ ;  
 $B = \{\text{extragerea unui număr prim cu } 25\}$ ;  
 $C = \{\text{extragerea unui număr prim cu } 30\}$ .
17. 1) Propuneți 3 experimente cu:  
a) evenimente echiprobabile;  
b) evenimente care nu sunt echiprobabile.  
2) Calculați probabilitățile evenimentelor de la punctul a).
18. Formulați și rezolvați câte un exercițiu asemănător cu exercițiile 6, 7, 8, 10, 14.

19.  **Lucrați în grup!**  **Proiect.** Aplicații ale probabilităților în diverse domenii.

### § 3. Elemente de statistică matematică



#### Investigăm

- Elevii clasei a IX-a au obținut la testul de matematică următoarele rezultate: două note de 3, o notă de 4, șapte note de 5, patru note de 6, cinci note de 7, trei note de 8, patru note de 9 și două note de 10. Înregistrați aceste date într-un tabel.



*Rezolvare:*

Tabelul alăturat conține rezultatele obținute de elevii clasei a IX-a la testul de matematică.

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	0	0	2	1	7	4	5	3	4	2

Spunem că am realizat o analiză statistică, am colectat și am înregistrat date.

Fig. 1



#### Rețineți!

**Statistica matematică** este știința care se ocupă de colectarea, înregistrarea, prelucrarea, analiza și interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen (din activitatea economică și viața socială, din fizică, biologie, meteorologie, agricultură etc.).

#### Definiții

- Orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice se numește **populație statistică**. Numărul elementelor populației statistice se numește **volumul populației**.
- Fiecare element al populației statistice este numit **unitate statistică** (sau **individ**).
- Trăsătura comună a tuturor unităților statistice (individizilor) este numită **caracteristică statistică**.
- Caracteristica ce poate fi măsurată (nota, vârsta, înălțimea, volumul etc.) se numește **caracteristică cantitativă (numerică)**.
- Caracteristica ce nu poate fi măsurată (culoarea ochilor, preferințele etc.) se numește **caracteristică calitativă**.
- Caracteristica ce poate lua numai valori izolate dintr-o mulțime de valori se numește **caracteristică discretă** (nota, numărul de elevi și eleve în clasă etc.).
- Caracteristica ce poate lua orice valoare dintr-un interval numeric se numește **caracteristică continuă** (înălțimea, volumul, aria etc.).

#### Exemple

Populația	Elevii unei clase	Elevii unei clase	Autovehiculele dintr-o întreprindere	Colaboratorii unei firme	Colaboratorii unei firme
Caracteristica	Nota la testul de matematică	Culoarea ochilor	Durata de funcționare	Vârsta	Greutatea

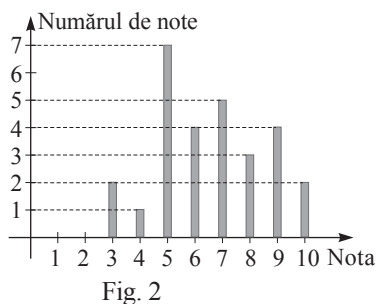
Caracteristicile *nota la testul de matematică*, *durata de funcționare*, *vârsta*, *greutatea* sunt de natură cantitativă, iar caracteristica *culoarea ochilor* este de natură calitativă.



- 1 Identificați în problema rezolvată de mai sus: a) populația statistică;  
b) unitățile statistice;  
c) caracteristica și tipul caracteristicii.

*Rezolvare:*

- Populația statistică este mulțimea elevilor din clasă.
- Fiecare elev al clasei este o unitate statistică.
- Caracteristica este nota obținută la test și este o caracteristică discretă.



2 Reprezențați printr-un grafic cu bare rezultatele obținute la testul de matematică din exemplul precedent.

Rezolvare:

Reprezentarea grafică este dată în figura 2.

Rezultatele obținute la o analiză statistică pot fi reprezentate într-un tabel (*tabelul de date statistice* – fig. 1) sau cu ajutorul graficelor și diagramei (*grafice cu bare, diagrame prin cercuri, diagrame prin pătrate, diagrame structurale [cerc de structură, pătrat] etc.*).

De exemplu, în figura 3 (cerc de structură) este reprezentată structura unei suprafețe, ca mod de folosire a terenului dintr-o asociație agricolă.

Figura 4 (diagramă prin pătrate) ilustrează modificarea numărului de cărți dintr-o bibliotecă într-o perioadă de timp.

Producția semestrială (anuală, lunară, săptămânală, zilnică) a unei întreprinderi poate fi reprezentată sub forma unui grafic, numit **graficul producției** (fig. 5).

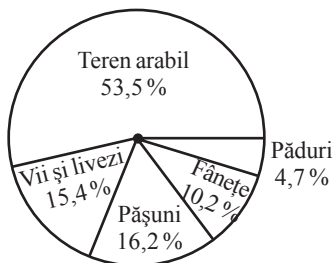


Fig. 3

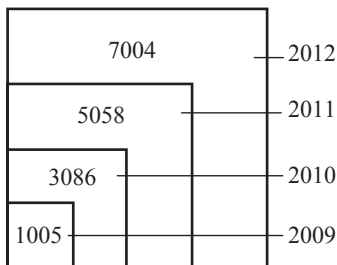


Fig. 4

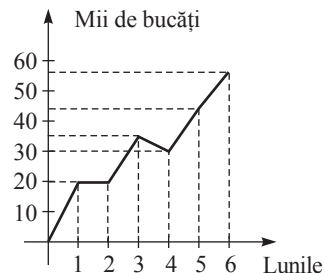


Fig. 5



**Rețineți!**

O problemă importantă a trasării graficelor la o analiză statistică este păstrarea proporțiilor, prezentarea corectă a tuturor datelor.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

- S-a efectuat o analiză statistică a situației frecvențării lecțiilor de către elevii claselor V–IX în luna noiembrie și s-au obținut următoarele rezultate: în clasa a V-a „A” – 10 absențe, în a V-a „B” – 8 absențe, în a VI-a „A” – 4 absențe, în a VI-a „B” – 2 absențe, în a VII-a – 14 absențe, în a VIII-a – 7 absențe, în a IX-a „A” – 8 absențe, în a IX-a „B” – 3 absențe.
  - Identificați: populația statistică, unitățile statistice, caracteristica și tipul caracteristicii.
  - Reprezențați rezultatele obținute:
    - într-un tabel;
    - printr-un grafic cu bare.



**Investigați!**

- Înregistrați datele statistice referitoare la înălțimea elevilor din clasă.
  - Precizați care este: populația statistică, unitățile statistice (indivizii) și caracteristica statistică.
  - Reprezențați prin tabelul de date statistice și prin graficul cu bare rezultatele obținute.



### Formăm abilitățile și aplicăm

- Reprezențați cu ajutorul unui cerc de structură numărul băieților și numărul fetelor din clasă.
- Reprezențați cu ajutorul unei diagrame prin pătrate suprafața continentelor (găsiți datele în manualul de geografie).



5. Reprezentați printr-un grafic cu bare mulțimea elevilor și elevilor din școală repartizați pe clase.
6. **Miniproiect.** Înregistrați temperatura aerului în cursul zilei de duminică, din oră în oră. Treceți datele obținute într-un grafic.

### Dezvoltăm abilitățile și creăm

7.  **Investigați!** Realizați o analiză statistică a unor evenimente (experimente) sociale, economice etc. Colectați, înregistrați și reprezentați datele printr-un tabel, grafic sau diagramă.
8.  **Lucrați individual! Investigație.** Evenimente din viața mea.

## §4. Elemente de calcul financiar

În diverse situații se discută despre situația financiară în familie, în stat, la firmă etc. Se utilizează termenii: *procente*, *dobândă*, *TVA*, *preț*, *credit*, *buget*. Ce înseamnă acești termeni, când și cum îi putem utiliza?

Procent – *pro centum*  
(lat.) – împărțit la o sută.

### 4.1. Procente



#### Ne amintim

- Raportul de forma  $\frac{p}{100}$  (se mai scrie  $p\%$ ) se numește **raport procentual**.
  - Un procent ( $1\%$ ) este o sutime (a suta parte) dintr-o mărime inițială.
  - $1 = 100\% = \frac{100}{100}$ .
- $$p\% = \frac{p}{100}; \quad 1\% = \frac{1}{100}, \quad 25\% = \frac{25}{100}$$



#### Rețineți!

1. Pentru a afla câte procente ( $p$ ) reprezintă un număr  $n$  dintr-un alt număr  $m$ , înmulțim valoarea raportului  $\frac{n}{m}$  cu  $100\%$ :  $p\% = \frac{n}{m} \cdot 100\%$  (1)

2. Pentru a afla  $p\%$  dintr-un număr dat  $n$  calculăm numărul:

$$m = \frac{p}{100} \cdot n \quad (2)$$

3. Pentru a afla numărul  $n$ , știind că  $m$  reprezintă  $p\%$  din el, calculăm numărul:

$$n = \frac{100}{p} \cdot m \quad (3)$$

#### Observație

Procentele se utilizează, de regulă, în business, operații bancare, financiare etc.

Promilele se utilizează în domeniile unde sunt necesare calcule cu exactitate sporită. De exemplu, în industria farmaceutică.

$0,1\% = 1\text{‰} = \frac{1}{1000}$  –  
se citește „o promilă”.

#### Aplicăm



În clasa a IX-a învață 12 fete, ceea ce constituie  $48\%$  din numărul total de elevi ai acestei clase. Aflați câți elevi învață în clasa a IX-a.

*Rezolvare:*

Aplicăm formula (3) și obținem:  $n = \frac{100}{48} \cdot 12 = 25$ .

*Răspuns:* 25 de elevi.

- 2 Prețul unui produs a scăzut cu 10%, iar după o lună prețul nou s-a micșorat cu 20%. După cele două modificări de preț produsul costă 207 lei. Aflați prețul inițial al produsului.

Rezolvare:

Fie  $x$  – prețul inițial. După prima modificare prețul va fi  $x - \frac{10}{100} \cdot x = 0,9x$  (lei). Iar după a doua modificare prețul va fi  $0,9x - 0,2 \cdot (0,9x) = 0,9x(1 - 0,2) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot x = 0,72x$  (lei).

Conform condiției, după cele două modificări vom avea:  $0,72x = 207$ .

Deci  $x = 207 : 0,72 = 287,5$  (lei).

Răspuns: 287,5 lei.

## 4.2. Dobânzi

Procentele au o aplicare extinsă în domeniul financiar, inclusiv pentru determinarea mărimii dobânzii.



### Rețineți!

- **Dobânda** este suma de bani care trebuie achitată pentru folosirea unei sume de bani (numită și *capital*) împrumutate sau depuse la bancă.
- **Rata dobânzii** este raportul procentual dintre dobândă (de regulă, obținută timp de 1 an) și suma (capitalul) împrumutată sau depusă la bancă.

### Exemplu

Dacă 1 000 000 de lei, depuși pentru un an, generează o dobândă de 125 000 de lei, atunci **rata anuală** a dobânzii este 12,5%. Acesteia îi corespunde o **rată lunară** a dobânzii de  $\frac{12,5}{12}$  %, adică 1,04%.



### Rețineți!

- Relația dintre dobândă, timpul de plasament și rata dobânzii depinde de tipul de plasament ales.
- Există **plasamente cu dobândă simplă** și **plasamente cu dobândă compusă**.

### Aplicăm

- O persoană depune la bancă suma de 15 000 de lei, în plasament cu dobândă simplă, cu o rată anuală de 11%. Ce sumă va avea persoana peste 3 ani?

Rezolvare:

Suma depusă (capitalul) este  $S_0 = 15\ 000$  de lei, iar rata anuală a dobânzii este  $p = 11\%$ . Atunci dobânda este  $D = S_0 \cdot \frac{p}{100} = 15\ 000 \cdot \frac{11}{100} = 1\ 650$  (lei). Deci, peste un an, suma va fi  $S_1 = S_0 + D = S_0 + S_0 \cdot \frac{p}{100} = 15\ 000 + 1\ 650 = 16\ 650$  (lei).

Peste doi ani, suma va fi  $S_2 = S_0 + D + D = S_0 + 2D = S_0 + 2S_0 \cdot \frac{p}{100} = 18\ 300$  (lei). Iar peste trei ani  $S_3 = S_0 + D + D + D = S_0 + 3D = S_0 + 3S_0 \cdot \frac{p}{100} = 19\ 950$  (lei).

Răspuns: 19 950 de lei.

### Generalizăm

În cazul plasării sumei  $S_0$  cu dobândă simplă, având rata anuală  $p\%$ , după  $n$  ani dobânda

va fi  $D_n = n \cdot D = S_0 \cdot n \cdot \frac{p}{100}$ , iar suma obținută –  $S_n = S_0 \left( 1 + n \cdot \frac{p}{100} \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .



### Rețineți!

- O sumă de bani este plasată în regim de **dobândă compusă** atunci când, la sfârșitul primei perioade a plasamentului, dobânda simplă generată de sumă este adăugată la suma inițială pentru a produce la rândul ei dobândă în perioada următoare. **În astfel de cazuri se mai spune că depunerea se realizează cu capitalizare.**

Fie  $S_0$  suma inițială plasată cu dobândă compusă pe o perioadă de  $n$  ani, iar  $p\%$  – aceeași rată a dobânzii pentru fiecare perioadă. Deci, după un an, dobânda obținută este  $D_1 = S_0 \cdot \frac{p}{100}$ . Această dobândă se adaugă la suma inițială  $S_0$ , astfel că suma  $S_1 = S_0 + D_1 = S_0 + S_0 \cdot \frac{p}{100} = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$  devine suma (capitalul) care va produce dobândă în al doilea an.

Dobânda obținută după doi ani este  $D_2 = S_1 \cdot \frac{p}{100} = S_0 \cdot \frac{p}{100} \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ , care se adaugă la capitalul existent  $S_1$ , astfel încât suma

$$S_2 = S_1 + D_2 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) + S_0 \cdot \frac{p}{100} \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

devine capitalul care va produce dobândă în al treilea an.

După  $n$  ani dobânda obținută va fi  $D_n = S_0 \cdot \frac{p}{100} \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1}$ , iar suma totală va fi  $S_n = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ .

### Atenție!

În formulă,  $D_n$  semnifică dobânda corespunzătoare fiecărei perioade (fiecărui an) de plasament, adică dobânda obținută la ultima perioadă (ultimul an) de plasament, deci la anul al  $n$ -lea. Nu se va confunda cu dobânda obținută pe întreaga durată a plasamentului, care se calculează aplicând formula  $D_t = S_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]$ .

### Aplicăm

Calculați dobânda și suma obținută după doi ani prin plasarea cu dobândă compusă a 200 000 de lei, cu rata anuală de 9%. Aflați dobânda obținută pe întreaga durată a plasamentului.

*Rezolvare:*

Avem  $S_0 = 200\,000$ ,  $n = 2$ ,  $p = 9\%$ .

Atunci  $D_2 = S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2-1} = 200\,000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \left(\frac{100+9}{100}\right) = 180 \cdot 109 = 19\,620$  (lei).

Suma totală va fi  $S_2 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 200\,000 \cdot \left(1 + \frac{9}{100}\right)^2 = 200\,000 \cdot \frac{11\,881}{10\,000} = 237\,620$  (lei).

Deci,  $D_2^* = S_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - 1\right] = 200\,000 \cdot \left[\left(1 + \frac{9}{100}\right)^2 - 1\right] = 37\,620$  (lei).

*Răspuns:* Dobânda după doi ani – 19 620 de lei; suma totală – 237 620 de lei.

Dobânda obținută pe întreaga durată a plasamentului – 37 620 de lei.

### 4.3. TVA, prețuri

La procurarea produselor, bunurilor etc. ne interesează atât calitatea acestora, cât și prețurile de vânzare.



#### Rețineți!

- **Prețul de producție (de cost)** este prețul care reflectă totalitatea cheltuielilor pentru producerea unui produs (bun): cheltuielile legate de forța de muncă, mijloacele de producție (materie primă, energie, utilaj, închirierea spațiului etc.), cheltuielile de desfacere.
- **TVA-ul**, sau **taxa pe valoarea adăugată**, reprezintă un venit (impozit) la bugetul de stat, plătit de consumatorii de bunuri și servicii. În bugetul statului se transferă

- taxele pentru valorile adăugate de fiecare proprietar/consumator. Aceste taxe se adaugă de fiecare dată la prețul de vânzare și sunt achitate de consumatori. TVA-ul se calculează din mărimea venitului pe care vrea să-l încaseze proprietarul bunului (produsului).
- **Cota de impozitare (procentul TVA)** este fixă și unică pe o anumită perioadă stabilită de stat. De exemplu, în Republica Moldova cota standard este de 20%, iar cota impozitului pe venit este de 12% din venitul anual impozabil, dar poate varia în funcție de anumite categorii de venituri în conformitate cu prevederile Codului fiscal.
- **Prețul de vânzare = prețul de producție + TVA-ul.** (În unele cazuri prețul de vânzare mai include *adaosul comercial* și *profitul producătorului*.)

**Aplicăm**

Prețul de vânzare al unui produs este de 640,5 lei. Știind că procentul TVA este de 20%, determinați prețul de producție al produsului.

Rezolvare:

Fie  $x$  lei – prețul inițial. Atunci  $x + \frac{20}{100}x = 640,5$ . Deci  $1,2x = 640,5$ , iar  $x = 533,75$ .

Răspuns: 533,75 lei.

**4.4. Buget, credite**



**Rețineți!**

Bugetul reprezintă o evidență a veniturilor și cheltuielilor unei țări, firme, familii sau persoane etc.

Pentru a evita problemele financiare referitoare la lipsa de bani, se recomandă ca fiecare familie, fiecare persoană să țină evidența banilor, să-și planifice cheltuielile și posibilele venituri.

- **Bugetul familiei** (sau **bugetul personal**) este un plan (proiect) privind veniturile și cheltuielile familiei (sau personale) pentru o perioadă de timp (de regulă, un an sau o lună).

Bugetul trebuie să fie elaborat astfel încât să prevadă cheltuielile obligatorii (alimente, îmbrăcăminte, transport, taxe etc.) și acumulări pentru cheltuieli neprevăzute.



**Rețineți!**

**Sfaturi utile pentru a cheltui inteligent**

- Planificați cumpărăturile.
- Fiți atenți la calitate.
- Comparați prețurile și magazinele.
- Urmăriți și utilizați reducerile.
- Negociați prețul, dacă este posibil.
- Citiți și analizați anunțurile publicitare.
- Luați în considerare garanția și posibilitățile de reparație.
- Căutați lucruri reciclabile.

**Exemple**

1. Dinu este student. El și-a elaborat următorul buget pentru luna aprilie:

Venituri		
1.	Bursă	800 lei
2.	Rezervă	500 lei
3.	Ajutor de la părinți	1 400 lei
Total		2 700 lei

Cheltuieli		
1.	Transport	100 lei
2.	Chirie	700 lei
3.	Internet	300 lei
4.	Produse alimentare	1 300 lei
5.	Divertisment	250 lei
Total		2 650 lei

2. Familia Lucescu are următorul buget lunar:

Venituri		
1.	Salarii	18 400 lei
2.	Pensii	7 250 lei
3.	Dobânda din depozite	300 lei
Total		25 950 lei

Cheltuieli		
1.	Întreținere apartament	2 360 lei
2.	Abonament TV, internet	270 lei
3.	Produse alimentare	8 400 lei
4.	Produse nealimentare	2 500 lei
5.	Transport/carburanți	2 600 lei
6.	Divertisment (cinema, teatru, excursii etc.)	1 000 lei
7.	Cheltuieli neprevăzute	2 200 lei
Total		19 330 lei



### Rețineți!

Orice eveniment cultural, familial, religios etc. se organizează și se desfășoară având la bază un buget format rațional.

O sursă de majorare temporară a veniturilor, în caz de necesitate, este *creditul* (*împrumutul*). Prin *credit* se înțelege o sumă de bani luată cu împrumut, care urmează a fi restituită însoțită de o dobândă. Acțiunea de acordare a unui credit se numește *creditare*.

Persoana (agentul financiar) care acordă împrumut se numește *creditor*, suma împrumutată se numește *credit*, iar persoana (agentul economic) care ia creditul se numește *debitor*.

Restituirea creditului se numește *rambursare*, iar termenul până la care trebuie de rambursat creditul se numește *scadență*.

Sunt diverse tipuri de credite: *credite bancare, comerciale, bugetare; credite pe termen scurt (până la 1 an), pe termen mediu (1–5 ani), pe termen lung (peste 5 ani); credite interne, credite internaționale* ș.a.

Rambursarea creditului se poate face printr-o singură tranșă sau eșalonat în câteva tranșe.

### Aplicăm

O bancă a acordat unui antreprenor un credit de 50 000 de lei pe o perioadă de 2 ani în regim de dobândă simplă, cu rata anuală a dobânzii de 15%. Aflați suma pe care o va restitui antreprenorul la sfârșitul termenului (scadență).

*Rezolvare:*

Conform condiției problemei, avem  $S_0 = 50\,000$  de lei,  $n = 2$ , iar  $p = 15\%$ .



Atunci, suma totală va fi  $S_2 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 50\,000 \cdot \frac{130}{100} = 65\,000$  (lei).

*Răspuns:* 65 000 de lei.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

- O firmă agricolă are de arat 720 ha. Într-o primă etapă s-au arat 144 ha. Câte procente din întreaga suprafață au fost arate?
- 22% din suma de bani constituie 1 650 de lei. Aflați suma inițială.
- La sfârșitul anului școlar, 26% din numărul de elevi ai unui gimnaziu sunt absolvenți. Determinați câți elevi a avut gimnaziul, dacă au mai rămas 370 de elevi.

4. Determinați ce dobândă simplă aduce un capital de 74 000 de lei pe o perioadă de 1 an, dacă rata dobânzii este de 16 %.
5. O persoană depune la bancă suma de 160 000 de lei în plasament cu dobânda simplă pe 2 ani și obține dobânda de 17 600 de lei. Aflați rata dobânzii.
6.  **Lucrați în perechi!** Se plasează în regim de dobândă compusă suma de 12 milioane de lei cu o rată anuală a dobânzii de 10 %. Calculați dobânda totală rezultată peste 5 ani.
7. Determinați care este rata anuală a dobânzii pentru ca o sumă plasată în regim de dobândă compusă să se majoreze cu 44 % în 2 ani.
8. Aflați prețul de vânzare al unei mărfi care costă 4 800 de lei fără TVA, dacă TVA-ul constituie 24 %.
9. Care este prețul de vânzare al unui televizor, dacă cheltuielile de producție sunt de 8 250 de lei, iar TVA-ul constituie 20 %.
10.  **Lucrați în grup!** Copiați și completați următorul tabel privind calculul taxei pe valoare adăugată .


Produsul	Preț cumpărare fără TVA	TVA (20%)	Preț cumpărare cu TVA
I	2 000		
II			8 000
III	12 300		



11. La magazin s-a eliberat bonul de plată. Determinați dacă s-a calculat corect în lei TVA-ul.
12. Bugetul lunar al familiei Pâslaru este:



Venituri		
1.	Salarii	9 350 lei
2.	Pensii	3 400 lei
Total		12 750 lei

Cheltuieli		
1.	Întreținere apartament	30 % din venituri
2.	Abonament TV, internet	200 lei
3.	Produse alimentare	45 % din venituri
4.	Transport/carburanți	700 lei
5.	Rechizite școlare	350 lei
Total		? lei

- a) Determinați suma totală a cheltuielilor.
- b) Este suficientă suma veniturilor pentru a acoperi cheltuielile necesare?
13. Elaborați bugetul personal pentru luna martie.
14.  **Investigați!** Discutați cu părinții și elaborați bugetul familiei pentru o lună de iarnă.
15. O persoană ia un credit în sumă de 1 000 u.m. (unități monetare) în regim de dobândă simplă pe un termen de 2 ani cu rata anuală a dobânzii de 10 %. Aflați ce sumă trebuie să restituie debitorul.
16. O bancă a acordat unui antreprenor un credit de 12 000 u.m. pe o perioadă de 2,5 ani în regim de dobândă simplă, cu rata anuală a dobânzii de 15 %. Determinați ce sumă va primi banca la sfârșitul acestui termen.


### Formăm abilitățile și aplicăm

17. În biblioteca școlară sunt 16 400 de cărți, dintre care 7 380 sunt manuale, iar 25 % din rest sunt culegeri de poezii.
  - a) Câte procente reprezintă manualele?
  - b) Câte culegeri de poezii sunt?
  - c) Câte procente din totalul cărților reprezintă celelalte cărți?

18.  **Lucrați în perechi!** O familie preconizează să procure un frigider la prețul de 9 500 de lei. Cu ocazia evenimentului „Vinerea neagră” magazinul oferă reduceri de 11 %.
- a) Ce sumă a economisit familia?      b) La ce preț a cumpărat frigiderul?
19.  **Lucrați în grup!** O bancă comercială are afișată oferta de dobânzi (în %) la expirarea termenului în următorul tabel:

Termene \ Valuta	Lei	USD (\$)	Euro	Lei, sume mai mari de 25 de milioane
1 lună	12,50	2,20	3,20	15,00
3 luni	13,50	2,25	3,30	16,00
6 luni	14,50	2,30	3,40	16,50
1 an	14,75	2,50	4,00	17,50

Calculați dobânzile aferente sumelor:

- 1) 2 500 de dolari;    2) 300 de euro;    3) 5 milioane de lei;    4) 35 de milioane de lei pe termenul:
- a) 1 lună;    b) 3 luni;    c) 6 luni;    d) 1 an.
20. O sumă de 100 de milioane de lei e depusă la bancă pe un termen de 3 ani în regim de dobândă compusă cu o rată anuală a dobânzii de 14,5 %.
- a) Care va fi suma depozitului la termenul scadent?      b) Ce dobândă totală va genera acest depozit?
21. Un capital de 2,5 milioane de lei este plasat în regim de dobândă simplă pe o perioadă de 2 ani cu rata anuală a dobânzii de 12 %.
- a) Ce dobândă va genera acest depozit la finalul plasamentului?    b) Care va fi suma depozitului la finalul plasamentului?
22.  **Lucrați în perechi!** Într-un magazin, o mașină de spălat are afișat prețul de 8 240 de lei și lângă acest preț e scris TVA = 1 648 lei.
- a) Determinați câte procente constituie TVA-ul.      b) Aflați care este prețul de cost (de producție).
23. Prețul de vânzare al unui produs este de 5 280 de lei. Acest preț este format din prețul de producție, adaosul comercial și TVA-ul. Se știe că adaosul comercial reprezintă 14 % din prețul de producție, iar TVA-ul constituie 18 % din prețul de producție. Determinați prețul de producție.
24. Unei firme i se acordă un credit de 20 de milioane de lei pe un termen de 2 ani în regim de dobândă compusă. Creditul și dobânda totalizează la sfârșitul celor 2 ani 23 328 000 de lei. Determinați ce procent de dobândă s-a aplicat.
25. Suma de 100 000 de lei este împrumutată de către un fermier în regim de dobândă simplă astfel: 2 ani cu rata anuală a dobânzii de 12 %, 3 luni cu 15 % și 9 zile cu 20 %. Aflați suma finală care trebuie să fie rambursată de către debitor.
- Observație:* Anul financiar este considerat de 360 de zile.
26. O familie elaborează bugetul pentru Revelion. Suma preconizată este de 6 500 de lei.
- a) Utilizând datele din imagine, completați tabelul astfel încât cheltuielile să se încadreze în suma preconizată.

Cheltuieli		
1.	Cadouri copiilor	
2.	Produse alimentare	
3.	Băuturi	
4.	Produse de patiserie	
5.	Artificii	
Total		



- b) Elaborați un buget similar pentru sărbătoarea de Revelion.

## Dezvoltăm abilitățile și creăm


27. În urmă cu 2 ani și 3 luni o persoană a împrumutat 10 000 de lei în regim de dobândă compusă calculată anual. În cei 3 ani, ratele anuale ale dobânzilor au fost de 15%, 17% și 20%. Determinați ce sumă trebuie acum să plătească persoana și care a fost dobânda aferentă.
28. O persoană fizică își propune ca peste 5 ani să dispună de un depozit la bancă de 210 milioane de lei. Determinați ce sumă trebuie să depună persoana în prezent pentru ca în condițiile unei dobânzi compuse cu rata anuală de 20% să dispună peste 5 ani de suma dorită.

29.  **Lucrați în grup!**  **Proiect.** *Finanțele în viața noastră.*


30.  **Lucrați individual!**  **Proiect.** *Bugetul familial și bugetul personal.*

## Exerciții și probleme recapitulative


### Fixăm cunoștințele

1.  **Investigați!** Într-o cutie sunt bomboane roșii, galbene și verzi: jumătate sunt de culoare roșie, o treime – de culoare galbenă, iar celelalte – de culoare verde. Care dintre aceste culori este mai puțin probabilă la extragerea la întâmplare a unei bomboane din cutie?




2. Fie o urnă cu 12 jetoane de aceeași formă numerotate cu 1, 2, 3, ..., 12 și experiența aleatoare care constă în extragerea unui jeton. Enumerați evenimentele elementare ale acestui experiment.
3. Într-un pachet sunt 7 mere verzi și 14 mere roșii. Care este probabilitatea ca, extrăgând un măr la întâmplare, acesta să fie: a) verde; b) roșu?
4. Fețele unui cub sunt colorate în roșu și galben. Probabilitatea apariției feței galbene la aruncarea cubului este  $\frac{1}{6}$ , iar a feței roșii –  $\frac{5}{6}$ . Câte fețe galbene și câte fețe roșii are cubul?
5.  **Lucrați în perechi!** Fie o urnă cu 10 bile numerotate cu 1, 2, 3, ..., 10 și experimentul aleator care constă în extragerea unei bile. Aflați probabilitatea extragerii unei bile cu un număr:
- a) prim; b) par;  
c) impar; d) mai mare decât 4;  
e) mai mic decât 7; f) mai mare decât 11;  
g) mai mic decât 11; h) care se divide cu 3.
6. Un capital de 25 de milioane de lei este plasat în regim de dobândă simplă pe o perioadă de: 1) 1 an; 2) 3 ani, cu rata anuală a dobânzii de 20%.
- a) Aflați ce dobândă generează acest capital pe perioada plasamentului.  
b) Cât ar trebui să fie rata dobânzii pentru ca acest capital să aducă în 2 ani o dobândă egală cu cea obținută după 3 ani.
7. Ce procent de dobândă are o operațiune bancară, dacă un capital inițial de 60 000 u.m. va determina un capital final de 67 200 u.m. după un an?
8. Într-un magazin, un frigider are afișat prețul de 14 400 de lei, inclusiv TVA-ul de 20%. Aflați prețul de producție al acestui frigider.

## Formăm abilitățile și aplicăm

9. Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul, mai mic decât 151, luat la întâmplare, să fie:
- a) o putere cu exponent natural mai mare decât 1;      b) un pătrat perfect.
10. Într-o ladă sunt 150 de piese. Se știe că 2% dintre ele sunt defectate. Aflați probabilitatea că o piesă extrasă la întâmplare nu va fi defectată.
11. Dintr-un pachet de 36 de cărți de joc se extrage la întâmplare o carte. Aflați probabilitatea că s-a extras un as.
12. Aflați probabilitatea ca un număr natural mai mic decât 121, luat la întâmplare, să aibă suma cifrelor egală cu 9.
13. Într-un pachet sunt 6 mere roșii și 12 mere verzi. Ce număr minim de mere trebuie extrase din pachet pentru a fi siguri că cel puțin un măr este roșu?
14.  **Lucrați în perechi!** Determinați dacă sunt echiprobabile evenimentele:
- a)  $A = \{\text{din 30 de bilete numerotate } (1, 2, 3, \dots, 30), \text{ se extrage la întâmplare biletul cu numărul } 2\}$ ;  
 $B = \{\text{din 30 de bilete numerotate } (1, 2, 3, \dots, 30), \text{ se extrage la întâmplare biletul cu numărul } 20\}$ ;  
 b)  $A = \{\text{se câștigă la loterie}\}$ ;       $B = \{\text{nu se câștigă la loterie}\}$ .
15. Creditul de 100 de milioane de lei este plasat în regim de dobândă simplă, cu o rată anuală a dobânzii de 10%. Determinați pe ce perioadă de timp este făcut plasamentul, dacă la termenul scadent se obține o dobândă de 5 milioane de lei.
16. Ce procent de dobândă are o operațiune bancară, dacă un capital inițial de 200 de milioane de lei va determina un capital final de 216 milioane de lei?
17. Prețul de vânzare al unui produs este de 6 600 de lei. Acest preț este format din prețul de producție, adaosul comercial și TVA-ul. Se știe că adaosul comercial reprezintă 12% din prețul de producție, iar TVA-ul – 20% din prețul de producție. Determinați prețul de producție.
18. Suma de 2 000 u.m. este împrumutată în regim de dobândă simplă astfel: 1 an cu rata de 20%, 5 luni cu rata de 15% și 15 zile cu rata de 25%. Aflați dobânda aferentă și suma finală.
19. O persoană fizică contractează un credit în sumă de 8 000 u.m. pe un termen de 2 ani. Determinați ce sumă va restitui debitorul, dacă:
- a) rata anuală a dobânzii simple este de 16%;      b) rata anuală a dobânzii compuse, cu capitalizare anuală este de 14%.



## Dezvoltăm abilitățile și creăm

20.  **Investigați!** Doru câștigă la un joc dacă bila extrasă din urnă este albă. Determinați ce urnă este mai convenabil să aleagă Doru pentru ca probabilitatea câștigului să fie mai mare:
- a) cea cu 12 bile albe din 38;      b) cea cu 45 de bile albe din 105;  
 c) cea cu 18 bile albe și 54 roșii;      d) cea cu același număr de bile albe, roșii și negre.
21. Într-o urnă se află bile pe care sunt scrise numere de trei cifre formate cu cifrele 5, 6 și 7. Aflați probabilitatea extragerii unei bile pe care să fie scris un număr care începe cu cifra 5.
22. Se aruncă o monedă de 3 ori. Care este probabilitatea ca:
- a) stema să apară de două ori;      b) stema să apară cel puțin o dată?
23. Un investitor poate plasa un capital de 10 milioane de lei într-o bancă la 40% pe an sau poate investi într-o producție cu o eficiență așteptată de 150%. Pierderile de producție sunt descrise printr-o funcție pătratică definită prin formula  $f(x) = 0,05x^2$ , unde  $x$  este valoarea capitalului investit în lei. Profitul este impozitat la  $p\%$ . Aflați pentru care valori ale lui  $p$  investiția în producție va fi o alocare mai profitabilă a capitalului.

24.  **Lucrați individual!**



**Proiect.** *Statistica în profesiile părinților.*

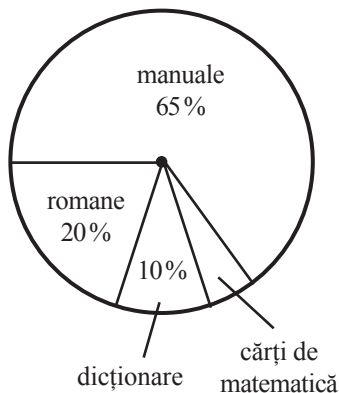
## Test sumativ



Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

### Varianta I

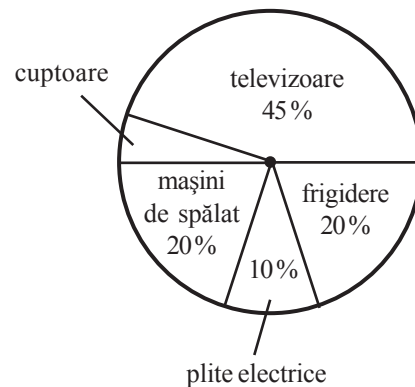
- Într-un coș sunt 3 mere roșii și 1 măr galben.  
Fie evenimentele:  
 $A_1 = \{\text{extragerea unui măr roșu}\}$ ,  
 $A_2 = \{\text{extragerea unui măr galben}\}$ .  
Completați casetele:  
a)  $P(A_1) = \square$ ;    b)  $P(A_2) = \square$ .
- La o loterie sunt 20 de bilete câștigătoare și 360 de bilete necâștigătoare. Laura a cumpărat un bilet de loterie. Care este probabilitatea ca biletul să fie câștigător?
- Fețele unui cub au fost colorate în albastru și galben. Probabilitatea apariției feței albastre la aruncarea cubului este  $\frac{1}{3}$ , iar a feței galbene  $-\frac{2}{3}$ . Câte fețe albastre și câte fețe galbene are cubul?
- Prețul de vânzare al unui produs este de 2 400 de lei și este obținut prin aplicarea TVA-ului de 20% la prețul de producție. Determinați prețul de producție.
- O persoană a depus la bancă suma de 4 000 de lei în regim de dobândă simplă. Ce sumă a primit după 2 ani, știind că rata anuală a dobânzii a fost de 8%?
- În cercul de structură este reprezentată structura reparării cărților într-o bibliotecă școlară:



- Câte procente din numărul total reprezintă cărțile de matematică?
- Câte cărți sunt în bibliotecă, știind că erau 240 de cărți de matematică?

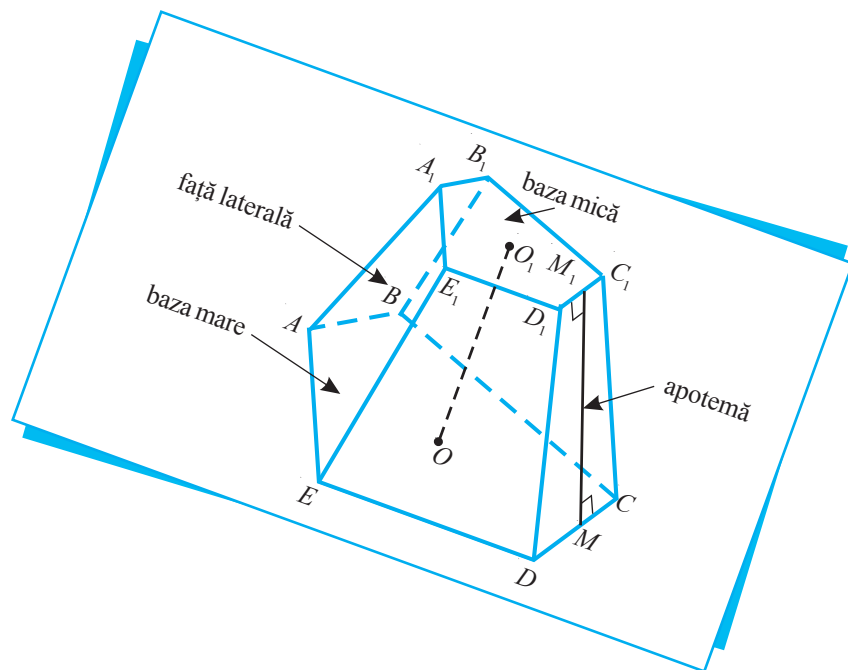
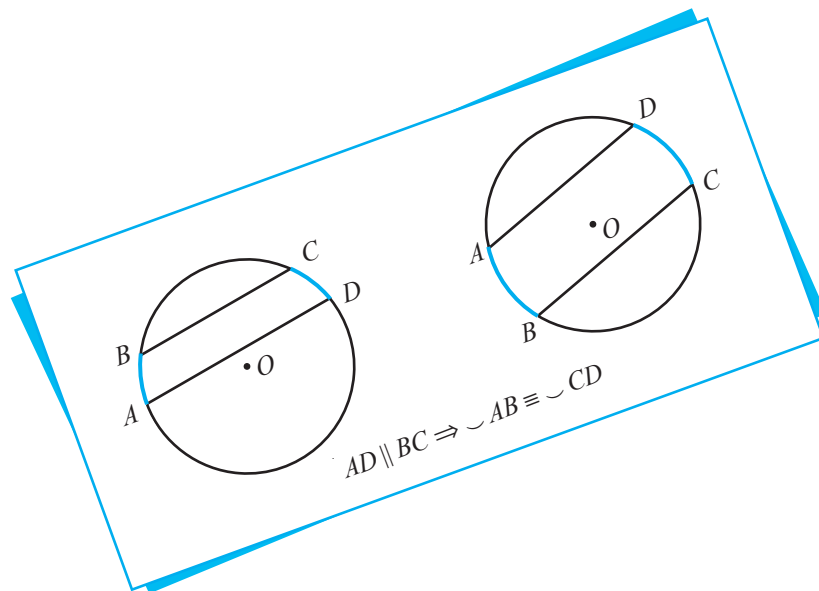
### Varianta II

- Într-o urnă se află o bilă albă și două bile roșii.  
Fie evenimentele:  
 $A_1 = \{\text{extragerea unei bile albe}\}$ ,  
 $A_2 = \{\text{extragerea unei bile roșii}\}$ .  
Completați casetele:  
a)  $P(A_1) = \square$ ;    b)  $P(A_2) = \square$ .
- La o loterie sunt 200 de bilete, dintre care 15 câștigătoare. Care este probabilitatea ca biletul cumpărat de Nicu să nu fie câștigător?
- Fețele unui cub au fost colorate în maro și verde. Probabilitatea apariției feței maro la aruncarea cubului este  $\frac{2}{3}$ , iar a feței verzi  $-\frac{1}{3}$ . Câte fețe maro și câte fețe verzi are cubul?
- Prețul de vânzare al unui produs este de 1 800 de lei și este obținut prin aplicarea TVA-ului de 20%. Determinați prețul de producție.
- O persoană a depus la bancă suma de 6 000 de lei în regim de dobândă simplă. Ce sumă a primit după 2 ani, știind că rata anuală a dobânzii a fost de 10%?
- În cercul de structură este reprezentată structura reparării mărfii într-un depozit:



- Câte procente din numărul total reprezintă cuptoarele?
- Câte unități de marfă sunt în depozit, știind că sunt 150 de cuptoare?

# GEOMETRIE



*Geometria este cea mai frumoasă formă a matematicii.*

Proclus

## § 1. Recapitulare și completări

### 1.1. Elementele cercului. Proprietăți de bază

**Ne amintim** 1 Stabiliți ce figură definește mulțimea:

- punctelor egal depărtate de extremitățile unui segment dat;
- punctelor situate la distanța de 5 cm de un punct dat.

#### Definiții

◆ Fie  $r$  un număr real pozitiv și  $O$  un punct din plan. **Cercul de centru  $O$  și rază  $r$**  este mulțimea punctelor din plan situate la distanța  $r$  de punctul  $O$  (fig. 1).

Notăm:  $\mathcal{C}(O, r)$ .

- Fie  $A \in \mathcal{C}(O, r)$ . De asemenea, numim **rază** segmentul ce unește centrul cercului cu un punct al lui.
- Segmentul ale cărui extremități sunt puncte ale cercului se numește **coardă**. Coarda care conține centrul cercului se numește **diametru** al cercului.
- Punctele  $A$  și  $B$  se numesc **diametral opuse**, dacă  $[AB]$  este diametru.

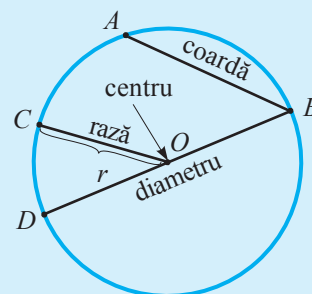


Fig. 1

- Amintiți-vă definiția figurilor congruente și stabiliți care dintre următoarele cercuri sunt congruente:  $\mathcal{C}_1(A, r = 3 \text{ cm})$ ,  $\mathcal{C}_2(B, r = 4 \text{ cm})$ ,  $\mathcal{C}_3(A, r = 4 \text{ cm})$ ,  $\mathcal{C}_4(B, r = 3 \text{ cm})$ .

**2** Examinați desenul (fig. 2,  $O$  este centrul cercului) și numiți punctele situate de centrul cercului la distanța:

- egală cu raza cercului;
- mai mică decât raza cercului;
- mai mare decât raza cercului.

Care dintre aceste puncte aparțin interiorului cercului?

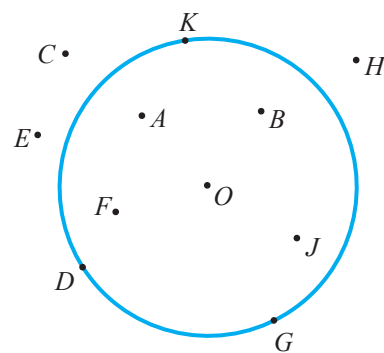


Fig. 2

**Definiții**

- ♦ Fie  $\mathcal{C}(O, r)$ . Mulțimea punctelor  $M$  din plan pentru care  $OM < r$  se numește **interiorul cercului**. *Notăm:*  $\text{Int } \mathcal{C}(O, r)$ .
- ♦ Mulțimea punctelor  $N$  din plan pentru care  $ON > r$  se numește **exteriorul cercului**. *Notăm:*  $\text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$ .
- ♦ Reuniunea  $\mathcal{C}(O, r)$  și a interiorului lui este **discul de centru  $O$  și rază  $r$** . *Notăm:*  $\mathcal{D}(O, r)$ .  
Prin urmare,  $\mathcal{D}(O, r) = \mathcal{C}(O, r) \cup \text{Int } \mathcal{C}(O, r) = \{M \mid OM \leq r\}$ .

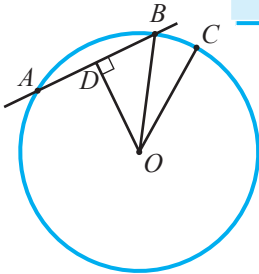


Fig. 3

**3** \*Examinați desenul (fig. 3) și demonstrați că **orice 3 puncte diferite ale unui cerc sunt necoliniare**.

*Indicație.* Demonstrați prin metoda reducerii la absurd că  $C \notin AB$ , unde  $A, B, C$  sunt trei puncte arbitrare diferite de pe cerc. Presupunând că  $C \in AB$ , cercetați triunghiurile dreptunghice  $ODB$  și  $ODC$ .

- Câte puncte comune, cel mult, pot avea o dreaptă și un cerc?



**Investigăm**

**4** Examinați desenul (fig. 4,  $O$  este centrul cercului).

Ce se poate spune despre segmentul  $OM$  și triunghiul  $AOB$ , dacă:

- a)  $OM \perp AB$ ;
- b)  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ ?

Trageți concluzia.

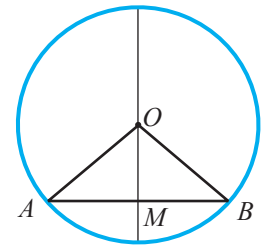


Fig. 4

**Teorema 1**

Dacă diametrul cercului conține mijlocul unei coarde, atunci el este perpendicular pe ea.

- Formulați reciproca teoremei 1, care de asemenea este teoremă.
- Demonstrați teorema 1 și reciproca ei.

**Teorema 2**

Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci ele sunt egal depărtate de centrul cercului.

\*Să demonstrăm teorema 2.

*Ipoteză:*  $\{A, B, C, D\} \subset \mathcal{C}(O, r)$ ,  $[AB] \equiv [CD]$ .

*Concluzie:*  $d(O, [AB]) = d(O, [CD])$ .

*Demonstrație:*

- ①  $\triangle AOB \equiv \triangle COD$  (Criteriul LLL). Fie  $M$  și  $N$  mijloacele segmentelor  $AB$ , respectiv  $CD$  (fig. 5).
- ②  $[OM]$  și  $[ON]$  sunt mediane și înălțimi ale triunghiurilor  $AOB$ , respectiv  $COD$ .  
Conform ①,  $[OM] \equiv [ON]$ .
- ③  $d(O, [AB]) = OM = ON = d(O, [CD])$ , c.c.t.d. ▶

- Reciproca teoremei 2 de asemenea este teoremă. Formulați și demonstrați reciproca teoremei 2.
- Reformulați într-o singură teoremă de forma „Ipoteza dacă și numai dacă Concluzia”:  
a) teorema 1 și reciproca ei;                      b) teorema 2 și reciproca ei.
- Aplicând teorema 1, explicați cum poate fi găsit centrul necunoscut al unui cerc dat.

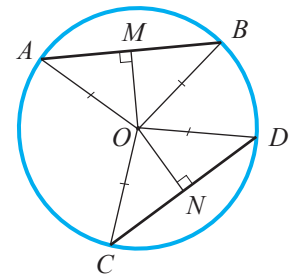


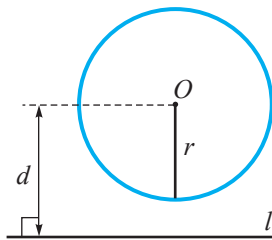
Fig. 5

\* Opțional

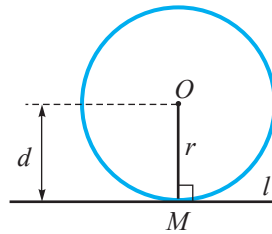
## 1.2. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

**Ne amintim** 1 Examinați desenele (fig. 6,  $O$  este centrul cercului).

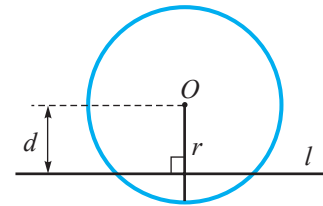
Observați cum se numește dreapta  $l$  în fiecare caz.



dreaptă **exterioară** cercului



dreaptă **tangentă** la cerc;  
 $M$  – punct de tangență



dreaptă **secantă** la cerc

Fig. 6

- Fie  $d$  distanța de la centrul cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  la dreapta  $l$ . Completați adecvat:
  - a) Dreapta  $l$  este  cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  dacă și numai dacă  $d > r$ .
  - b) Dreapta  $l$  este tangentă la cerc dacă și numai dacă .
  - c) Dreapta  $l$  este  dacă și numai dacă  $d < \text{■}$ .

### Teorema 3

Dacă o dreaptă este tangentă la un cerc, atunci ea este perpendiculară pe raza dusă în punctul de tangență.

\*Să demonstrăm teorema 3.

*Ipoteză:*  $\mathcal{C}(O, r) \cap l = \{M\}$ .

*Concluzie:*  $OM \perp l$ .

*Demonstrație:*

Aplicăm metoda reducerii la absurd.

① Presupunem contrariul:  $OM \not\perp l$ .

Fie că perpendiculara pe  $l$  construită din punctul  $O$  intersectează  $l$  în punctul  $A$  (fig. 7).

② Fie  $B \in l$ , astfel încât  $[AB] \equiv [AM]$ .

③  $\triangle OAB \equiv \triangle OAM$  (Criteriul CC).

④ Conform ③,  $[OB] \equiv [OM]$ , adică  $[OB]$  este rază. Prin urmare,  $B \in \mathcal{C}(O, r)$ .

Am obținut că dreapta  $l$  are două puncte comune ( $M$  și  $B$ ) cu cercul – contradicție.

Deci, presupunerea că  $OM$  nu este perpendiculară pe dreapta  $l$  este greșită, adică  $OM \perp l$ . ►

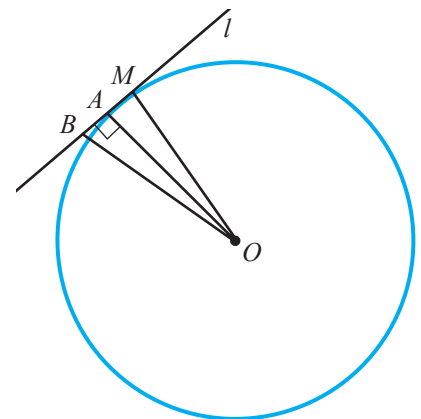


Fig. 7

Reciproca teoremei 3 de asemenea este teoremă.

- Formulați și demonstrați reciproca teoremei 3.

\* Opțional



**Problemă de construcție** (opțional)

Fie  $M$  un punct al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$  (fig. 8).  
Să construim o dreaptă tangentă la cerc, astfel încât  $M$  să fie punctul de tangență.

*Rezolvare:*

- ① Construim raza  $OM$  (fig. 9).
- ② Construim perpendiculara  $AB$  pe dreapta  $OM$ :  
- construim  $O_1 \in OM$ , astfel încât  $[O_1M] \equiv [OM]$ ;  
- construim  $\mathcal{C}_1(O, r_1)$  și  $\mathcal{C}_2(O_1, r_1)$ , unde  $r_1 > r$ ;  
-  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$ .
- ③ Conform reciprocei teoremei 3, deoarece  $AB \perp OM$  și  $M \in \mathcal{C}(O, r)$ , rezultă că  $AB$  este tangentă la cerc în punctul  $M$ .

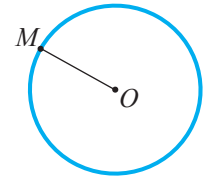


Fig. 8

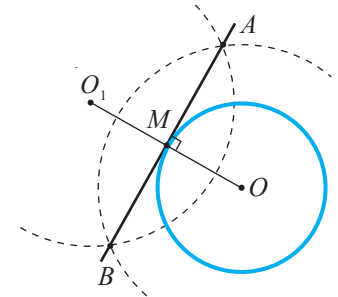


Fig. 9

Prin orice punct al cercului se poate construi o unică dreaptă tangentă la cerc în acest punct.



**Problemă** Examinați desenul (fig. 10) și demonstrați că:

- a)  $[AM] \equiv [BM]$ ;
- b)  $[MO]$  este bisectoarea unghiului  $AMB$ .

- Două tangente la același cerc, duse dintr-un punct exterior cercului, determină cu punctele de tangență două segmente congruente.
- Semidreapta cu originea într-un punct exterior și care conține centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangentele din acest punct la cerc.

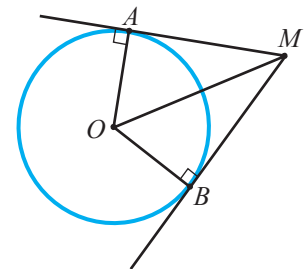
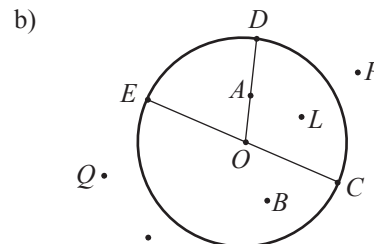
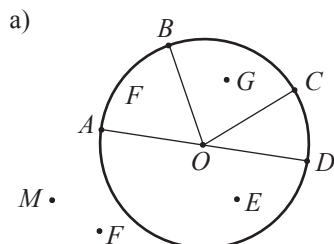


Fig. 10

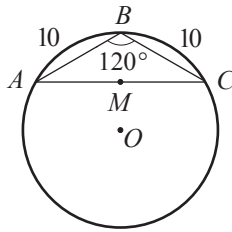
## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele


1. Construiți și notați un cerc:
  - a) cu centrul  $A$  și raza de 4 cm;
  - b) cu centrul  $B$  și raza de 6 cm.
2. **Lucrați în perechi!** Examinați desenul ( $O$  este centrul cercului) și numiți: razele; coardele; diametrele; punctele interioare cercului; punctele exterioare cercului; punctele diametral opuse.




3. Stabiliți poziția punctului  $A$  față de  $\mathcal{C}(O, r = 6\text{ cm})$ , dacă distanța de la  $A$  la  $O$  este de:  
 a) 6 cm; b)  $3\sqrt{5}$  cm; c) 6,(6) cm; d)  $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$  cm.
4. Coardele  $AB$  și  $CD$  ale unui cerc sunt situate la aceeași distanță de la centrul cercului. Aflați  $AB$ , dacă:  
 a)  $CD = 8$  cm; b)  $AB + CD = 14$  cm;  
 c)  $AB + 2CD = 6\sqrt{10}$  cm; d)  $5AB + CD = 12$  cm.
5. Diametrul  $AB$  intersectează coarda  $MN$  a aceluiași cerc de rază  $r$  sub un unghi drept în punctul  $E$ . Aflați distanța de la centrul cercului la  $MN$ , dacă:  
 a)  $ME = 9$  cm,  $r = 15$  cm;  
 b)  $ME = 12$  cm,  $r = 13$  cm;  
 c)  $4NE = 2r - 2$  cm = 32 cm.
6. Fie  $d$  distanța dintre dreapta  $l$  și centrul cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ . Determinați poziția dreptei  $l$  față de cerc, dacă:  
 a)  $d = 3$  cm,  $r = 4$  cm; b)  $d = 6,3$  cm,  $r = 3\sqrt{5}$  cm;  
 c)  $d = r = 2,7$  cm; d)  $d = 0$  cm,  $r = \frac{4}{9}$  cm;  
 e)  $d = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$  cm,  $r = \frac{2}{3 - \sqrt{5}}$  cm.




7. Aflați raza cercului și lungimea segmentelor  $AC$  și  $BM$  din desen, unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AC$ .
8. Din punctul  $M$  exterior cercului au fost duse tangentele la cerc. Fie  $A$  și  $B$  punctele de tangență. Aflați  $BM$ , dacă:  
 a)  $AM = 13,7$  cm;  
 b)  $AM - 2BM = -3, (4)$  cm;  
 c)  $AB = 8$  cm,  $m(\angle AMB) = 60^\circ$ .

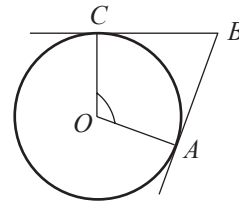
9. Mediatoarea segmentului nenul  $AB$  trece prin centrul cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ . Stabiliți poziția dreptei  $AB$  față de cerc, dacă:  
 a)  $OA = 5$  cm,  $r = 6$  cm;  
 b)  $OA = r = \frac{3}{4}$  cm;  
 c)  $OA = 14$  cm,  $r = 12\frac{1}{5}$  cm și  $AB = 12$  cm;  
 d)  $OA = 15$  cm,  $r = 12$  cm și  $AB = 18$  cm.
10. Fie  $\mathcal{C}(O, r)$ . Aflați distanța de la centrul cercului la coarda  $AB$ , dacă:  
 a)  $AB = 8$  cm,  $r = 5$  cm; b)  $AB = 24$  cm,  $r = 13$  cm;  
 c)  $AB = a$ ,  $r = b$ .
11. Fie  $[AB]$  o coardă a cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , iar  $d$  – distanța de la centrul cercului până la această coardă. Determinați  $r$ , dacă:  
 a)  $AB = 12$  cm,  $d = 8$  cm; b)  $AB = d = \sqrt{3}$  cm.
12. Care este măsura unghiului format de tangentele la un cerc, duse dintr-un punct aflat la o distanță de cerc egală cu raza cercului?
13.  **Lucrați în grup!** Construiți un cerc, știind că orice coardă a lui are cel mult 10 cm.
14. Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r = 8$  cm) și  $AB$  o coardă a lui. Folosind doar echerul, construiți mijlocul lui  $[AB]$ .
15. Distanța dintre centrul  $O$  al cercului și o coardă  $AB$  este de două ori mai mică decât raza. Determinați  $m(\angle ABO)$ .
16. Într-un cerc, la distanța de 6 cm de centru, este dusă o coardă de  $12\sqrt{3}$  cm. Aflați raza cercului.
17. Stabiliți poziția punctului  $M$  față de  $\mathcal{C}(O, r)$ , dacă:  
 a)  $OM = \frac{1}{2} r$ ; b)  $OM = |2 - \sqrt{5}| r$ ; c)  $OM = \frac{2}{r}$ .

### Formăm capacitățile și aplicăm

18. Din punctul  $A$ , aflat la distanța de 29 cm de la centrul cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , a fost dusă tangenta  $AB$  la cerc ( $B$  este punctul de tangență). Determinați raza cercului, dacă  $AB = 21$  cm.
19. Fie  $A \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r = 5$  cm) și  $C \in \mathcal{C}(O, r)$ , astfel încât  $AC$  este tangentă la cerc. Aflați  $OA$ , dacă  $m(\angle OAC) = 30^\circ$ .
20. Fie  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r = 3,5$  cm) și  $A \in \mathcal{C}(O, r)$ , astfel încât  $AM$  este tangentă la cerc. Aflați  $OM$ , dacă  $m(\angle AMO) = 30^\circ$ .
21. Fie  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r)$  și  $A \in \mathcal{C}(O, r)$ , astfel încât  $AM$  este tangentă la cerc. Aflați raza cercului, dacă  $m(\angle AMO) = 45^\circ$  și  $AM = 7,5$  cm.
22. Fie  $M \in \text{Ext } \mathcal{C}(O, r = \sqrt{15}$  cm) și  $A \in \mathcal{C}(O, r)$ , astfel încât  $AM$  este tangentă la cerc. Fie  $N$  mijlocul segmentului  $OM$ . Determinați  $AN$ , dacă  $m(\angle AOM) = 60^\circ$ .
23.  **Lucrați în perechi! Matematica în viață.** Mihai a construit un cerc și a șters centrul. Cum construim centrul cu ajutorul riglei și al compasului? *Indicație.* Folosiți teorema 1 (p. 119) și proprietatea mediatoarei unui segment.

24. Fie  $AM$  tangenta la  $\mathcal{C}(O, r)$  în punctul  $A$ . Aflați distanța de la punctul  $O$  la punctul  $M$ , dacă:
- $AM = 0,8, r = 0,6$ ;
  - $AM = 24, r = 18$ ;
  - $AM = x, r = y$ .
25.  **Investigați!** Demonstrați că mijloacele coardelor de aceeași lungime ale unui cerc sunt puncte conciclice (aparțin aceluiași cerc).  
*Indicație.* Utilizați teorema 2 (p. 119).
26. Cercurile  $\mathcal{C}(O, r)$  și  $\mathcal{C}(O_1, r)$  se intersectează în punctele  $M$  și  $N$ . Aflați  $OO_1$ , dacă  $MO = 13$  cm,  $MO_1 = 6$  cm,  $MN = 10$  cm.
27. Construiți un cerc de rază  $r$  ce trece prin punctele  $A$  și  $B$  date, dacă:
- $AB = 5$  cm,  $r = 6$  cm;
  - $AB = \sqrt{15}$  cm,  $r = 5$  cm.
- Indicație.* Pentru a construi  $[AB]$  folosiți teorema înălțimii și relația  $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$ .

28. Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r = 8$  cm). Construiți un triunghi  $ABC$  înscris în acest cerc, astfel încât  $AB = 2BC = 10$  cm.
29. Utilizând doar rigla și compasul, construiți un unghi de: a)  $45^\circ$ ; b)  $22^\circ 30'$ ; c)  $157^\circ 30'$ .
30. Într-un cerc cu centrul  $O$  și raza de 6 cm, coarda  $AB$  este congruentă cu raza. Determinați distanța de la punctul  $O$  la coarda  $AB$ .
31. În desenul de mai jos, dreptele  $BA$  și  $BC$  sunt tangente la cercul cu centrul  $O$  în punctele  $A$  și  $C$ . Aflați măsura unghiului  $ABC$ , dacă se cunoaște că  $m(\angle AOC) = 110^\circ$ .



### Dezvoltăm capacitățile și creăm

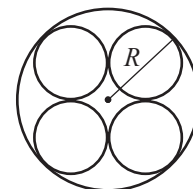
32.  $\mathcal{C}(O_1, R)$  și  $\mathcal{C}(O_2, r)$  sunt exterioare, adică  $O_1O_2 > R + r$ . Dreapta  $l$  este tangentă ambelor cercuri în punctele  $A$  și  $B$ . Calculați  $O_1O_2$ , dacă  $m(\angle AO_1O_2) = 60^\circ$ ,  $R = 15$  cm,  $r = 5$  cm. Cercetați toate cazurile posibile.
33. Într-un triunghi dreptunghic, un punct de tangență al cercului înscris în acest triunghi împarte ipotenuza în segmente cu lungimile de 5 cm și 12 cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.
34. Într-un cerc cu raza de 25 cm sunt duse, de aceeași parte a centrului, două coarde paralele, cu lungimile de 40 cm și 30 cm. Determinați distanța dintre aceste coarde.
35. Fie dreapta  $l$  și punctele  $M$  și  $N$ . Construiți un cerc care conține punctele  $M$  și  $N$  și al cărui centru aparține dreptei  $l$ . În ce situație problema:
- are o singură soluție;
  - are o infinitate de soluții;
  - nu are nicio soluție?
39. Patru borcane cilindrice identice au fost dispuse pe fundul circular al unei cratițe, ca în desen. Aflați raza  $R$  a bazei cratiței, dacă raza bazei unui borcan este egală cu 4 cm.

36. Fie cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și punctul  $M$  exterior cercului. Construiți prin  $M$  o dreaptă care taie cercul după o coardă de lungime  $x$ , unde:
- $r = 10$  cm,  $MO = 15$  cm,  $x = 8$  cm;
  - $r = 8$  cm,  $MO = 12$  cm,  $x = 10$  cm.
- Indicație.* Utilizați teorema: Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă și numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.



### Matematică distractivă

37. Împărțiți cu ajutorul a doar trei tăieturi rectilinii un disc în:
- 4 părți;
  - 5 părți;
  - 6 părți;
  - 7 părți.
38. Dintr-un punct al cercului este coborâtă o perpendiculară pe o rază a lui, astfel încât această rază este împărțită în două segmente proporționale cu 8 și 9, considerând de la centru. Aflați lungimea perpendicularei, dacă raza cercului este de 68 cm.



## § 2. Unghiuri înscrise în cerc

### 2.1. Unghi la centru. Arce de cerc

**Ne amintim 1** Care este măsura unghiului descris de minutarul unui ceas timp de 10 minute?

#### Definiții

- ◆ Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**.
- ◆ Intersecția cercului cu interiorul unghiului la centru se numește **arc mic** al cercului. *Notăm:*  $\frown AB$ , unde  $A$  și  $B$  sunt punctele de intersecție a unghiului la centru cu cercul.
- ◆ Intersecția cercului cu exteriorul unghiului la centru se numește **arc mare** al cercului. *Notăm:*  $\smile ACB$ , unde  $C$  aparține cercului, dar nu aparține arcului mic.
- ◆ Punctele  $A$  și  $B$  se numesc **capetele arcelor**. Arcele  $AB$  și  $ACB$  se numesc **arce complementare**. În afară de faptul că punctele  $A$  și  $B$  determină două arce, ele mai determină coarda  $AB$ . Se spune „coarda  $AB$  subîntinde arcul  $AB$ ”.
- ◆ **Măsura unui arc mic** este măsura unghiului la centru corespunzător arcului.
- ◆ **Măsura unui arc mare** este egală cu  $360^\circ$  minus măsura arcului complementar lui.
- ◆ Două **arce** ale aceluiași cerc (sau a două cercuri congruente) sunt **congruente** dacă au măsuri egale. Notăția  $\frown AB \equiv \frown CD$  se citește: arcele  $AB$  și  $CD$  sunt congruente.
- ◆ Capetele unui diametru determină două arce congruente, numite **semicercuri**, fiecare cu măsura de  $180^\circ$ .
- ◆ Se numește **unghi înscris în cerc** unghiul cu vârful pe cerc și ale cărui laturi intersecțiază cercul.

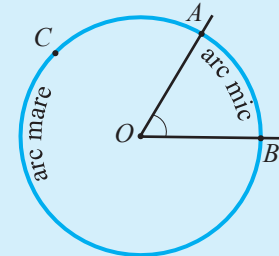


Fig. 12



#### Investigăm

- 2** Examinați desenul (fig. 13,  $O$  este centrul cercului). Utilizând datele din desen și luând în considerare că  $\angle AOB \equiv \angle COD$  și  $[AG] \equiv [EF]$ , determinați:
- a)  $CD$ ;    b)  $m(\angle FOE)$ .

*Rezolvare:*

$$\triangle AOB \equiv \triangle COD \text{ (Criteriul LUL).}$$

Prin urmare,  $CD = \square$  cm.

$$\triangle AOG \equiv \square \text{ (Criteriul LLL).}$$

$$m(\angle FOE) = m(\angle \square) = \square^\circ.$$

*Răspuns:*  $CD = \square$  cm,  $m(\angle FOE) = \square^\circ$ .

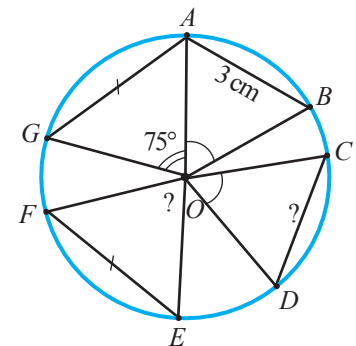


Fig. 13

#### Teorema 4

Dacă două coarde ale aceluiași cerc (sau a două cercuri congruente) sunt congruente, atunci arcele pe care le subîntind sunt congruente.

Reciproca teoremei 4 de asemenea este teoremă.

- Demonstrați teorema 4 și reciproca ei.



**Problemă de construcție** (opțional)

3 Cum se poate construi un cerc, știind că o coardă de 3 cm subîntinde în acest cerc un arc de  $70^\circ$ ?

Rezolvare:

① Pentru a construi cercul, trebuie să construim un segment de lungimea razei (fig. 14).

② Considerăm construcția realizată (vezi desenul).

③ Fie  $[OM]$  înălțime a triunghiului isoscel  $AOB$ .

$\triangle OMB$  este dreptunghic,  $m(\angle B) = 55^\circ$ ,

$BM = 1,5$  cm.

Prin urmare, conform criteriului CU, triunghiul  $OMB$  (în particular, ipotenuza  $OB$ ) poate fi construit în mod univoc.

④ Construcția poate fi realizată în următorul mod:

- construim segmentul  $AB$  de 3 cm;
- construim mediatoarea  $MM_1$  a segmentului  $AB$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ ;
- construim  $[BB_1]$ , astfel încât  $m(\angle MBB_1) = 55^\circ$ ;
- $[MM_1] \cap [BB_1] = \{O\}$ ;
- construim cercul  $\mathcal{C}(O, OB)$ .

• Utilizând proprietățile triunghiurilor și ale unghiurilor obținute la intersecția a două drepte paralele de o secantă, poate fi demonstrată următoarea teoremă:

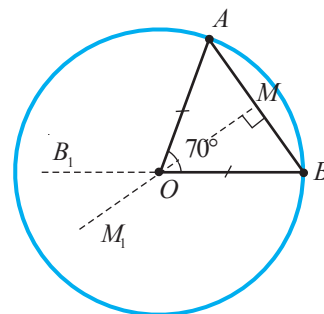
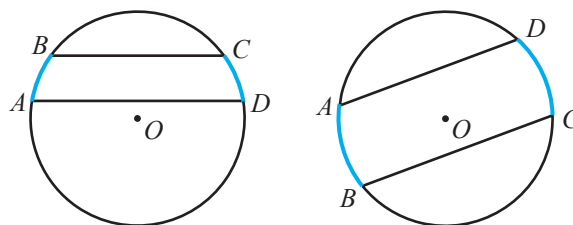


Fig. 14

**Teorema 5**

Două arce ale aceluiași cerc cuprinse între două coarde paralele sunt congruente (fig. 15).



$AD \parallel BC \Rightarrow \frown AB \cong \frown CD$

Fig. 15

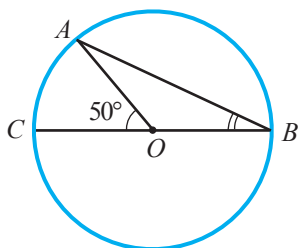
- Demonstrați că două coarde egal depărtate de centrul cercului sunt congruente.

**2.2. Unghiuri înscrise în cerc**

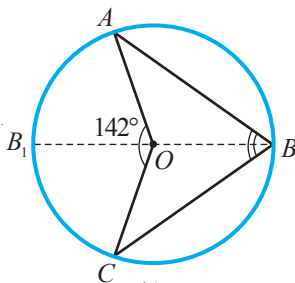


**Investigăm**

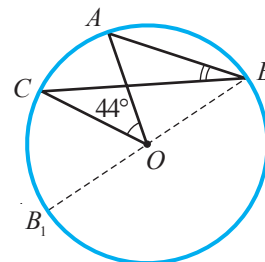
• Examinați desenele (fig. 16) și aflați  $m(\angle ABC)$ .



a)



b)



c)

Fig. 16

Rezolvare:

a) Examinăm  $\triangle AOB$ :  $[AO] \equiv [OB]$ , deci  $\angle B \equiv \angle A$ .

$\angle AOC$  este unghi exterior pentru  $\angle AOB$ , deci  $m(\angle AOC) = m(\angle A) + m(\angle B)$ .

$$m(\angle B) = \frac{1}{2}m(\angle \square) = \square^\circ.$$

b) Ca și în cazul a)  $m(\angle ABB_1) = \frac{1}{2}m(\angle AOB_1)$ , (1)

$$m(\angle B_1BC) = \frac{1}{2}m(\angle \square). \quad (2)$$

Adunând relațiile (1) și (2), obținem

$$m(\angle ABB_1) + m(\angle B_1BC) = m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\angle \square) = \square^\circ.$$

c) Similar cazurilor a) și b), obținem:

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2}m(\angle \square) = \square^\circ.$$

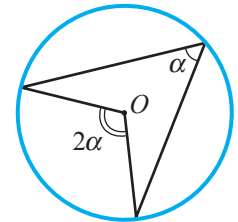


Fig. 17

### Teorema 6

Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile unghiului (fig. 17).

*Consecința 1*

Unghiurile înscrise în același arc de cerc sunt congruente (fig. 18).

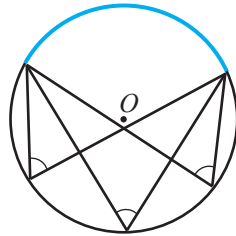


Fig. 18

*Consecința 2*

Unghiurile înscrise într-un semicerc sunt drepte (fig. 19).

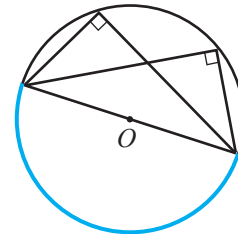


Fig. 19



### Exercițiu

Desenul din figura 20 sugerează un algoritm de construire a tangentelor la un cerc de centru  $O$  dintr-un punct  $M$  dat, exterior cercului. Luând în considerare consecința 2, explicați acest algoritm.

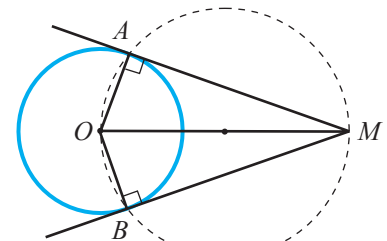


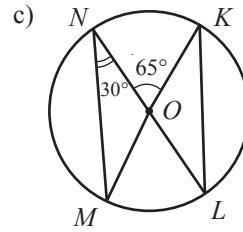
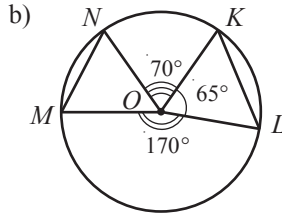
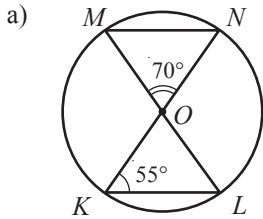
Fig. 20

## Exerciții și probleme

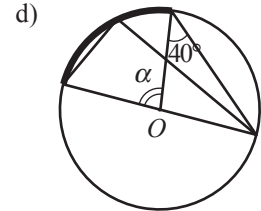
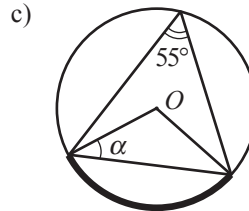
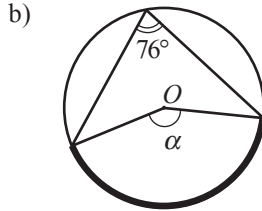
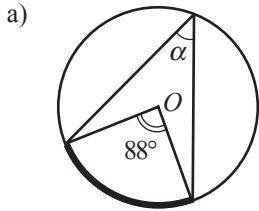
### Fixăm cunoștințele

- Desenați și notați un unghi la centru de măsură  $\alpha$  al cercului  $\mathcal{C}(O, r)$ , unde:
  - $\alpha = 60^\circ$ ,  $r = 4$  cm;
  - $\alpha = 90^\circ$ ,  $r = 6$  cm;
  - $\alpha = 120^\circ$ ,  $r = \sqrt{5}$  cm.
- Punctele  $A, B, C$  aparțin unui cerc și  $B \in \frown AC$ .
  - Aflați  $m(\frown BC)$ , dacă  $m(\frown AC) = 120^\circ$ ,  $m(\frown AB) = 75^\circ$ .
  - Aflați  $m(\frown AC)$ , dacă  $m(\frown AB) = 35^\circ$ ,  $m(\frown BC) = 55^\circ$ .
  - Aflați  $m(\frown AB)$ , dacă  $m(\frown AC) = 150^\circ$ ,  $m(\frown AC) + m(\frown BC) = 175^\circ$ .

3.  **Lucrați în perechi!** Comparați  $MN$  și  $KL$  din următoarele figuri ( $O$  este centrul cercului):




4. Calculați măsura unghiului  $\alpha$  ( $O$  este centrul cercului):



5. Câte grade are unghiul la centru corespunzător arcului:

- a) de  $\frac{1}{3}$  din cerc;                      b)  $\frac{1}{5}$  din cerc;  
c)  $\frac{1}{10}$  din cerc;                      d)  $\frac{1}{12}$  din cerc;  
e)  $\frac{1}{6}$  din semicerc;                      f)  $\frac{1}{12}$  din semicerc?

6.  **Lucrați în grup!** Construiți unghiul  $ABC$  format de secanta  $AC$  și tangenta  $AB$  ale aceluiași cerc, astfel încât:

- a)  $m(\angle ABC) = 40^\circ$ ;  
b)  $m(\angle ABC) = 75^\circ$ ;  
c)  $m(\angle ABC) = 350^\circ$ .

7. Construiți unghiul  $ABC$  cu vârful  $B$  în interiorul cercului, astfel încât:


- a)  $m(\angle ABC) = 25^\circ$ ;                      b)  $m(\angle ABC) = 115^\circ$ ;  
c)  $m(\angle ABC) = 210^\circ$ .

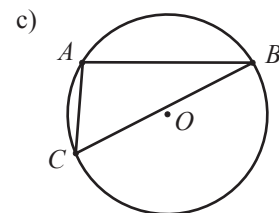
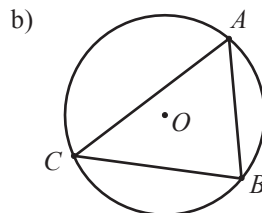
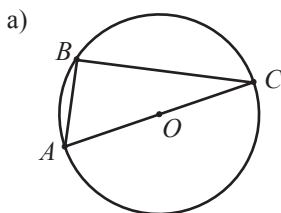
8. Construiți unghiul  $ABC$  cu vârful  $B$  în exteriorul cercului, astfel încât:

- a)  $m(\angle ABC) = 70^\circ$ ;                      b)  $m(\angle ABC) = 127^\circ$ ;  
c)  $m(\angle ABC) = 165^\circ$ .

9. Aflați diametrul cercului în care este înscris triunghiul  $ABC$  cu unghiul drept  $B$  și:

- a)  $AC = 8\text{ cm}$ ,  $BC = 4\text{ cm}$ ;    b)  $AB = 20\text{ cm}$ ,  $BC = 21\text{ cm}$ .

10.  **Investigați!** Fără a măsura, stabiliți tipul triunghiului  $ABC$  – ascuțitunghic, dreptunghic, obtuzunghic ( $O$  este centrul cercului).



11. Punctele  $A, B, C, D$  sunt situate, în această ordine, pe un cerc.  $[AC]$  și  $[BD]$  sunt diametre perpendiculare. Determinați tipul patrulaterului  $ABCD$ .

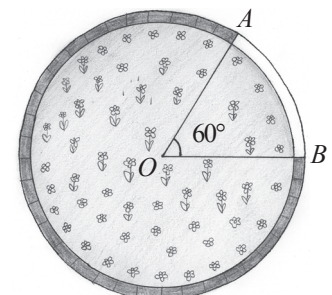
12. Punctele  $A, B, C, D$  sunt situate, în această ordine, pe un cerc.  $[AC]$  și  $[BD]$  sunt diametre neperpendiculare. Determinați tipul patrulaterului  $ABCD$ .

13. Punctele  $A, B, C, D$  sunt situate, în această ordine, pe un cerc de centru  $O$  și  $AB \parallel CD$ . Aflați:


- a)  $m(\angle AOD)$ , dacă  $m(\angle BOC) = 50^\circ$ ;  
b)  $m(\angle BOC)$ , dacă  $m(\angle DAO) = 70^\circ$ ;  
c)  $m(\angle ADO)$ , dacă  $m(\angle BCO) = 65^\circ$ .

14. Domnul Albu a vopsit o porțiune din bordura ce împrejmuiește un răzor de flori în 10 minute (vezi desenul). În câte minute va reuși să vopsească porțiunea rămasă a bordurii?

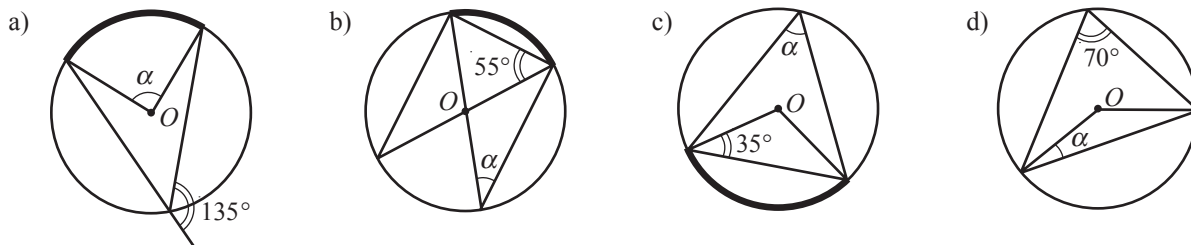
15. Fie  $ABC$  un unghi format de secanta  $AB$  și tangenta  $AC$  ( $A$  este punctul de tangență) la un cerc de centru  $O$ . Aflați  $m(\angle BAC)$ , dacă  $m(\angle AOB) = 80^\circ$ .



**Formăm capacitățile și aplicăm**

16. Punctele  $A, B, C, D, E$  sunt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor  $AB, BC, CD, DEA$ , dacă ele sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 2, 3.
17. Punctele  $A, B, C, D, E$  sunt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor  $AB, BC, CD, DEA$ , dacă ele sunt invers proporționale cu numerele 1, 2, 3, 6.
18. Dintr-un punct al cercului sunt duse două coarde perpendiculare cu lungimile de 35 cm și 12 cm. Determinați raza cercului.
19.  **Investigați!** Câte arce și câte coarde există cu capetele: a) în 3 puncte ale unui cerc; b) în 7 puncte ale unui cerc; c) în  $n$  puncte ale unui cerc?
20. Împărțiți un cerc în șase arce, astfel încât măsurile lor să fie proporționale cu numerele 1, 3, 6, 7, 8, 11.

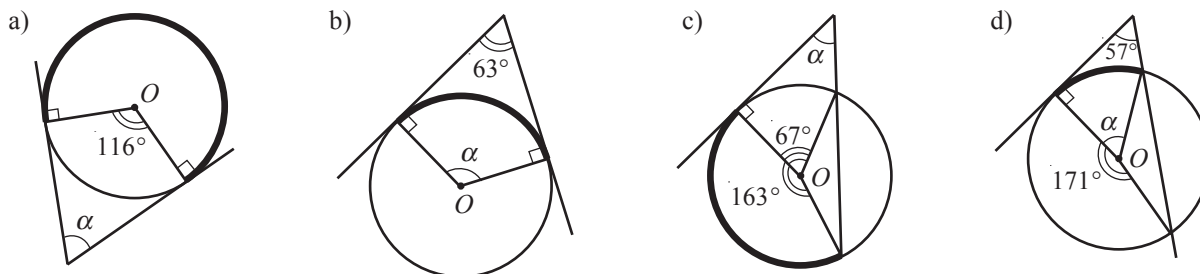
21. Calculați măsura unghiului  $\alpha$  ( $O$  este centrul cercului):



22. Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de: a) 20 de minute; b) 25 de minute; c) 4 minute; d) 35 de minute?
23. Punctele  $A$  și  $B$  aparțin unui cerc, astfel încât  $m(\text{arc } AB) = 120^\circ$ . Aflați raza cercului, dacă  $AB = 6\sqrt{3}$  cm.
24. Coardele  $AB$  și  $AC$  ale unui cerc au fiecare lungimea de 16 cm. Aflați raza cercului, dacă  $m(\text{arc } BC) = 120^\circ$ .
25. Fie  $AB$  o coardă a unui cerc. Prin punctul  $A$  se duce tangenta  $AC$  la cerc, iar prin punctul  $B$  – o coardă  $BD$ . Determinați  $m(\angle BAC)$ , dacă  $m(\angle BDA) = 80^\circ$ .

**Dezvoltăm capacitățile și creăm**

26. Laturile unui unghi de  $60^\circ$  sunt tangente la un cerc cu raza de 20 cm. Aflați distanța dintre punctele de tangență.
27. Laturile unui triunghi dreptunghic sunt tangente la un cerc. Unul dintre punctele de tangență împarte o catetă în segmente cu lungimile de 3 cm și 5 cm. Determinați lungimea ipotenuzei.
28. Calculați măsura unghiului  $\alpha$  ( $O$  este centrul cercului):





29. Folosind rigla și compasul, construiți un arc de: a)  $60^\circ$ ; b)  $30^\circ$ ; c)  $120^\circ$ ; d)  $15^\circ$ .
30. Se cunoaște un unghi de  $19^\circ$ . Construiți (doar cu rigla și compasul) un unghi de: a)  $9^\circ$ . *Indicație.*  $180^\circ = 19^\circ \cdot 9 + 9^\circ$ . b)  $5^\circ$ ; c)  $1^\circ$ .
31. Se dă un unghi de  $25^\circ$ . Construiți, folosind rigla și compasul, un unghi de: a)  $10^\circ$ . *Indicație.*  $100^\circ = 25^\circ \cdot 4 = 90^\circ + 10^\circ$ . b)  $5^\circ$ ; c)  $20^\circ$ .
32. Fie  $\mathcal{C}(O, r = 4 \text{ cm})$  și punctul  $A$  exterior lui. Construiți tangentele  $AM$  și  $AN$  ale cercului.


33. O coardă a unui cerc are lungimea de 30 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă cu lungimea de 36 cm, paralelă cu tangenta. Aflați raza cercului.
34. Într-un cerc cu raza de 2 cm este construită o coardă de 1 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă paralelă cu tangenta. Determinați lungimea acestei coarde.

## Exerciții și probleme recapitulative

### Fixăm cunoștințele

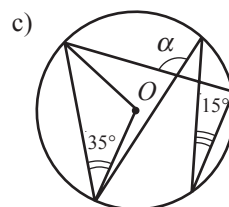
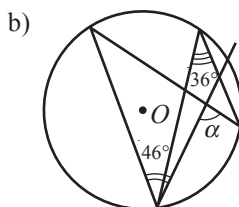
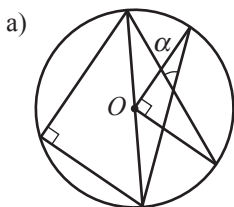
- Desenați un cerc cu raza de 5 cm. Construiți coardele  $AB$  de 5 cm,  $BC$  de 6 cm, diametrele  $MN$  și  $KL$ .
  - Măsurați unghiurile  $LMK$  și  $LNK$ .
-  **Investigați!** Stabiliți poziția punctului  $A$  față de  $\mathcal{C}(O, r = 7\sqrt{3} \text{ cm})$ , dacă:
  - $OA = \frac{19}{2\sqrt{3}} \text{ cm}$ ;
  - $OA = (4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) \text{ cm}$ ;
  - $OA = \frac{21}{\sqrt{3}} \text{ cm}$ ;
  - $OA = (7 + \sqrt{3}) \text{ cm}$ .
- Punctele  $A, B, C$  aparțin  $\mathcal{C}(O, r = 6,5 \text{ cm})$ , astfel încât  $[AB]$  este diametru. Aflați  $AC$ , dacă  $BC = 12 \text{ cm}$ .
- Fie  $\mathcal{C}(O, r = 8\sqrt{5} \text{ cm})$  și coardele  $AB$  și  $CD$  congruente. Aflați  $d(O, AB)$ , dacă  $d(O, CD) = 6 \text{ cm}$ .
- Fie  $\mathcal{C}(O, r = \sqrt{19} \text{ cm})$ . Determinați lungimea coardei  $AB$ , dacă  $d(O, AB) = \sqrt{6} \text{ cm}$ .
- Desenați și notați un unghi la centru de  $45^\circ$  al cercului  $\mathcal{C}(O, r = 6 \text{ cm})$ .
- Punctele  $M, N, K, L$  sunt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați:
  - $m(\sphericalangle MN)$ , dacă  $m(\sphericalangle ML) = 115^\circ$ ,  $m(\sphericalangle NL) = 55^\circ$ ;
  - $m(\sphericalangle NK)$ , dacă  $m(\sphericalangle MK) = 37^\circ$ ,  $m(\sphericalangle NL) = 65^\circ$ ,  $m(\sphericalangle ML) = 85^\circ$ ;
  - $m(\sphericalangle KL)$ , dacă  $m(\sphericalangle MN) = 39^\circ$ ,  $m(\sphericalangle MK) = 94^\circ$ ,  $m(\sphericalangle NL) = 122^\circ$ .
- Construiți în  $\mathcal{C}(O, r = 4,5 \text{ cm})$  un unghi înscris de:
  - $100^\circ$ ;
  - $160^\circ$ ;
  - $240^\circ$ ;
  - $180^\circ$ .
- Coardele  $AB$  și  $CD$  se intersectează în punctul  $M$  interior cercului. Aflați:
  - $AM$ , dacă  $CM = 18 \text{ cm}$ ,  $MD = 3 \text{ cm}$ ,  $MB = 9 \text{ cm}$ ;
  - $MB$ , dacă  $AM = \sqrt{7} \text{ cm}$ ,  $CM = 3,5 \text{ cm}$ ,  $MD = 8 \text{ cm}$ .
- Punctele  $A, B, C, D$  sunt situate, în această ordine, pe cerc și  $AB \cap CD = \{M\}$ . Aflați:
  - $CM$ , dacă  $AM = 24 \text{ cm}$ ,  $MB = 8 \text{ cm}$ ,  $MD = 16 \text{ cm}$ ;
  - $MD$ , dacă  $AM = \frac{2}{3} \text{ cm}$ ,  $MB = \frac{3}{4} \text{ cm}$ ,  $CM = 1 \text{ cm}$ .
- Punctele  $A, B, C$  sunt situate pe cercul de centru  $O$ . Aflați:
  - $m(\sphericalangle ABC)$ , dacă  $m(\sphericalangle AOC) = 104^\circ$ ;
  - $m(\sphericalangle AOC)$ , dacă  $m(\sphericalangle ABC) = 37^\circ$ ;
  - $m(\sphericalangle OAC)$ , dacă  $m(\sphericalangle AOC) = 88^\circ$ ;
  - $m(\sphericalangle ACO)$ , dacă  $m(\sphericalangle ABC) = 29^\circ$ .
-  **Lucrați în perechi!** Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de:
  - 5 minute;
  - 25 de minute;
  - 45 de minute?
- Într-un cerc cu raza de 6 cm, coarda formează cu diametrul un unghi de  $30^\circ$ . Determinați lungimea coardei.

### Formăm capacitățile și aplicăm

- Construiți cu rigla și compasul triunghiul  $ABC$  cu laturile de  $\sqrt{5} \text{ cm}$ ,  $2\sqrt{5} \text{ cm}$ ,  $3\sqrt{2} \text{ cm}$ .
- Punctele  $A, B, C$  aparțin  $\mathcal{C}(O, r = 2\sqrt{6} \text{ cm})$ , astfel încât  $[AB]$  este diametru. Determinați  $BC$ , dacă  $OM = 4 \text{ cm}$ , unde  $M$  este mijlocul segmentului  $BC$ .
- Folosind echerul și compasul, construiți un unghi de:
  - $135^\circ$ ;
  - $157^\circ 30'$ .
- Diametrul  $AB$  al cercului cu raza de  $2\sqrt{17} \text{ cm}$  intersectează coarda  $CD$  în mijlocul ei –  $M$ . Aflați  $AM$  și  $BD$ , dacă  $CM = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ .
- Mediatoarea coardei  $AB$  intersectează cercul în punctele  $C$  și  $D$ . Aflați raza cercului, dacă  $AB = 14 \text{ cm}$  și  $d(C, AB) = 4 \text{ cm}$ .
- Din punctul  $M$  s-au dus tangentele la  $\mathcal{C}(O, r = 6 \text{ cm})$ , punctele  $A$  și  $B$  fiind puncte de tangentă. Determinați  $OM$ , dacă  $AM = 9 \text{ cm}$ .
-  **Lucrați în perechi!** Aflați măsurile unghiurilor triunghiului  $ABC$  cu vârfurile pe același cerc, dacă:
  - $m(\sphericalangle AB) = 50^\circ$ ,  $m(\sphericalangle AC) = 80^\circ$ ;
  - $m(\sphericalangle AB) = 46^\circ$ ,  $m(\sphericalangle AC) = 74^\circ$ .

Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. Laturile trapezului isoscel  $ABCD$  cu baza mare  $AD$  sunt tangente la același cerc. Aflați raza cercului, dacă  $AB = 20\text{ cm}$ ,  $BC = 8\text{ cm}$ .
22. Calculați măsura unghiului  $\alpha$  ( $O$  este centrul cercului):



23. **Investigați!** Demonstrați că măsura unghiului cu vârful în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurii arcului cuprins între laturile sale și a arcului cuprins între prelungirile laturilor sale.

24. **Lucrați în grup!** **Proiect STEAM.** Cercul și discul în arhitectură.

Test sumativ



Varianta I

- a) Desenați un cerc cu centrul  $M$  și raza de 3 cm. Construiți diametrul  $BD$ , coardele  $DA$  și  $BA$ , precum și tangenta la cerc în punctul  $A$ .

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă  $MX = (\sqrt{3} + 2)$  cm, atunci punctul  $X$  este exterior cercului”. Justificați.

c) Știind că  $m(\angle AMB) = 50^\circ$ , aflați măsurile unghiurilor triunghiului  $ABD$ .

d) Știind că  $m(\angle AMB) = 50^\circ$ , aflați măsura unghiului format de tangenta construită și coarda  $DA$ .
- Fie cercul cu centrul  $O$  și raza de 13 cm. Diametrul  $AB$  este perpendicular pe coarda  $MN$  de 24 cm și o intersectează în punctul  $C$ .

a) Aflați distanța de la punctul  $O$  la coarda  $MN$ .

b) În ce raport punctul  $C$  împarte diametrul  $AB$ ?
- Laturile trapezului isoscel  $ABCD$  cu bazele  $BC$  de 9 cm și  $AD$  de 25 cm sunt tangente la un cerc cu centrul  $O$ .

a) Aflați lungimea laturii laterale a trapezului.

b) Determinați raza cercului.

c) Demonstrați că triunghiul  $AOB$  este dreptunghic.

Varianta II

- a) Desenați un cerc cu centrul  $N$  și raza de 2 cm. Construiți diametrul  $AB$ , coardele  $AC$  și  $BC$ , precum și tangenta la cerc în punctul  $A$ .

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă  $NY = (\sqrt{5} - 1)$  cm, atunci punctul  $Y$  este exterior cercului”. Justificați.

c) Știind că  $m(\angle CBA) = 40^\circ$ , aflați măsurile unghiurilor triunghiului  $ACN$ .

d) Știind că  $m(\angle CBA) = 40^\circ$ , aflați măsura unghiului format de tangenta construită și coarda  $AC$ .
- Coarda  $AB$  de 40 cm a cercului cu centrul  $O$  este perpendiculară pe diametrul  $DC$ , îl intersectează în punctul  $K$  și se află la 21 cm de centrul cercului.

a) Aflați raza cercului.

b) În ce raport punctul  $K$  împarte diametrul  $DC$ ?
- Laturile trapezului isoscel  $ABCD$  cu laturile laterale  $AB$  de 24 cm,  $CD$  de 25 cm sunt tangente la un cerc cu centrul  $Q$ .

a) Aflați raza cercului.

b) Determinați lungimea bazelor trapezului.

c) Demonstrați că triunghiul  $CDQ$  este dreptunghic.

*Natura vorbește în limba matematicii; literele acestei limbi sunt cercuri, triunghiuri și alte figuri geometrice.*

Galileo Galilei

## § 1. Noțiunea de arie

Am întâlnit noțiunea de arie în clasele anterioare, când am calculat aria pătratului, a dreptunghiului. De fapt, am calculat aria suprafeței mărginite de aceste poligoane.

Reuniunea poligonului convex și a interiorului său se numește **suprafață poligonală convexă**. Reuniunea unui număr finit de suprafețe poligonale convexe este o **suprafață poligonală**.

Aria este un număr ce caracterizează o suprafață poligonală. Totuși, prin tradiție, în loc de aria suprafeței poligonale vom spune aria poligonului. Notăm aria poligonului  $A_1A_2\dots A_n$  prin  $\mathcal{A}_{A_1A_2\dots A_n}$ .

Admitem ca fiind evidente următoarele proprietăți ale ariei:

- 1° Aria poligonului este un număr nenegativ.
- 2° Ariile poligoanelor congruente sunt egale.
- 3° Aria unui poligon este suma ariilor poligoanelor, cu interioarele disjuncte fiecare două, în care se descompune poligonul dat.
- 4° Aria pătratului cu laturile de lungime 1 este egală cu 1.

Deci, dacă laturile pătratului sunt de 1 m, atunci aria lui este egală cu un metru pătrat (se scrie  $m^2$ ); dacă latura pătratului este de 1 cm, atunci aria lui este egală cu un centimetru pătrat (se scrie  $cm^2$ ) etc.

Poligoanele cu ariile egale se numesc **poligoane echivalente**.

## § 2. Aria paralelogramelor

### 2.1. Aria pătratului, aria dreptunghiului, aria rombului

**Ne amintim** 1 Calculați aria pătratului cu laturile de 2,5 cm.

*Rezolvare:*

Aria pătratului cu laturile de lungime  $a$  se calculează cu formula  $\mathcal{A} = a^2$ . Deci,  $\mathcal{A} = 2,5^2 = 6,25$  ( $cm^2$ ).

2 Fie pătratul  $ABCD$  (fig. 1).

- a) Comparați ariile triunghiurilor  $ABC$  și  $ADC$ .
- b) Calculați aria triunghiului  $ABC$ , dacă laturile pătratului sunt de 3 cm.

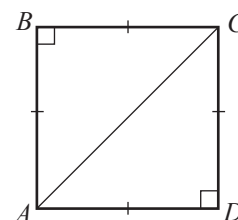


Fig. 1

Rezolvare:

- a)  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$  (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°,  $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$ .  
 b) Conform proprietății 3°,  $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = 4,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$

**Generalizăm**

Aria pătratului cu laturile de lungime  $a$  este  $a^2$ .

Aria triunghiului dreptunghic isoscel cu lungimile catetelor egale cu  $a$  este  $\frac{a^2}{2}$ .

- 3 Calculați aria dreptunghiului cu laturile de 7,2 cm și 1,1 cm.

Rezolvare:

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor  $a$  și  $b$  se calculează cu formula  $\mathcal{A} = a \cdot b$ .  
 Prin urmare,  $\mathcal{A} = 7,2 \cdot 1,1 = 7,92 \text{ (cm}^2\text{)}.$

- 4 Fie dreptunghiul  $ABCD$  (fig. 2).

- a) Comparați ariile triunghiurilor  $ABC$  și  $ADC$ .  
 b) Calculați aria triunghiului  $ABC$ , dacă laturile dreptunghiului sunt de 6 cm și 12 cm.

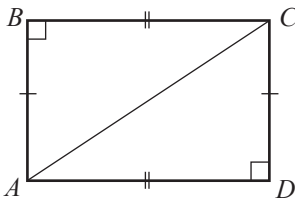


Fig. 2

Rezolvare:

- a)  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$  (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°,  $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$ .  
 b) Conform proprietății 3°,  $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36 \text{ (cm}^2\text{)}.$

**Generalizăm**

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor  $a$  și  $b$  este  $\mathcal{A} = a \cdot b$ .

Aria triunghiului dreptunghic cu lungimile catetelor  $a$  și  $b$  este  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot b$ .



**Investigăm**

- 5 Calculați aria rombului  $ABCD$  cu  $AC = 13,4$  cm și  $BD = 18$  cm.

Rezolvare:

Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor rombului. Diagonalele rombului sunt perpendiculare și punctul de intersecție le înjumătățește.

Triunghiurile dreptunghice  $AOB$ ,  $COB$ ,  $COD$ ,  $AOD$  sunt congruente. Prin urmare,  $\mathcal{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO =$   
 $= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 13,4 \cdot 18 = 120,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$

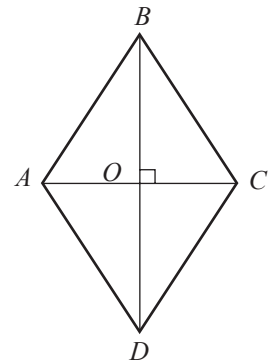


Fig. 3

**Generalizăm**

Aria rombului este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor.

$$\mathcal{A}_{\text{romb}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}, \text{ unde } d_1 \text{ și } d_2 \text{ sunt lungimile diagonalelor rombului.}$$

## 2.2. Aria paralelogramului oarecare



**Investigăm** 1 Fie paralelogramul  $ABCD$  și  $[BM]$ ,  $[CN]$  – înălțimi ale lui (fig. 4).

- Comparați ariile triunghiurilor  $ABM$  și  $DCN$ .
- Calculați aria paralelogramului  $ABCD$ , dacă  $MB = 8$  cm și  $AD = 11$  cm.

*Rezolvare:*

a)  $\triangle ABM \cong \triangle DCN$  (Criteriul CI). Deci, conform proprietății 2°,  $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{DCN}$ .

b) Conform proprietății 3°,  $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{DCN} = \mathcal{A}_{MBCN}$ .

$MBCN$  este dreptunghi și  $\mathcal{A}_{MBCN} = MB \cdot BC = MB \cdot AD = 8 \cdot 11 = 88$  (cm<sup>2</sup>).

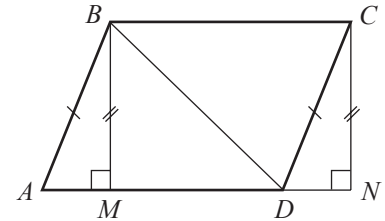


Fig. 4

### Generalizăm

**Aria paralelogramului** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

$$\mathcal{A}_{\text{par.}} = a \cdot h, \text{ unde } h \text{ este înălțimea corespunzătoare laturii de lungime } a.$$

## §3. Aria triunghiului



**Investigăm** 1 Calculați aria triunghiului  $ABC$  cu înălțimea  $BM$ , dacă  $AC = 16$  cm,  $BM = 8$  cm.

*Rezolvare:*

Triunghiurile  $AMB$  și  $BMC$  sunt dreptunghice (fig. 5).

Prin urmare,  $\mathcal{A}_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AM$ ,  $\mathcal{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$ .

Deci,  $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot AM + \frac{1}{2} BM \cdot MC =$   
 $= \frac{1}{2} BM (AM + MC) = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64$  (cm<sup>2</sup>).

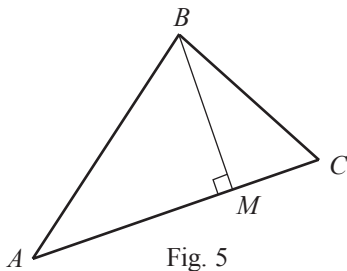
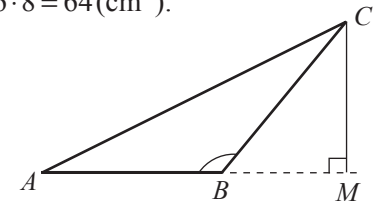


Fig. 5

- Examinați desenul și calculați aria triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 12$  cm, iar  $CM = 10$  cm.



### Generalizăm și aflăm

- Aria triunghiului** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot h, \text{ unde } h \text{ este înălțimea corespunzătoare laturii de lungime } a \text{ a triunghiului.}$$

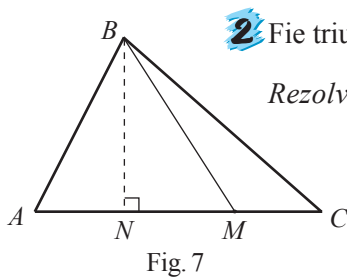
- Formula lui Herone:**

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ unde } a, b, c \text{ sunt lungimile laturilor triunghiului, iar}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ este semiperimetrul lui.}$$

### Teorema 1

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.



2 Fie triunghiul  $ABC$  și  $M \in (AC)$ , astfel încât  $\frac{AM}{MC} = 4$  (fig. 7). Calculați  $\frac{A_{ABM}}{A_{BMC}}$ .

Rezolvare:

Construim punctul  $N \in AC$ , astfel încât  $BN \perp AC$ .

Așadar,  $[BN]$  este înălțimea comună a triunghiurilor  $ABM$  și  $BMC$ .

$$\text{Avem } \frac{A_{ABM}}{A_{BMC}} = \frac{\frac{1}{2}BN \cdot AM}{\frac{1}{2}BN \cdot MC} = \frac{AM}{MC} = 4.$$

**Teorema 2**

Fie triunghiul  $ABC$  și  $M \in (AC)$ . Atunci  $\frac{A_{ABM}}{A_{BMC}} = \frac{AM}{MC}$ .

Consecință. O mediană a unui triunghi descompune triunghiul în două triunghiuri echivalente.

**§4. Aria trapezului**

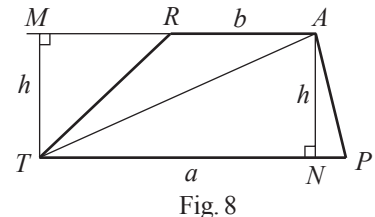


Investigăm 1 Fie trapezul  $TRAP$  cu baza mare  $TP$  de lungime  $a$ , baza mică  $RA$  de lungime  $b$  și înălțimea  $h$ . Calculați aria trapezului.

Rezolvare:

Construim punctele  $M \in RA$  și  $N \in TP$ , astfel încât  $TM \perp RA$ ,  $AN \perp TP$  (fig. 8). Evident,  $TM = AN = h$ .

$$\text{Atunci } A_{TRAP} = A_{TRA} + A_{TAP} = \frac{1}{2}TM \cdot RA + \frac{1}{2}AN \cdot TP = \frac{1}{2}h \cdot b + \frac{1}{2}h \cdot a = \frac{1}{2}h(a + b).$$



**Generalizăm**

Aria trapezului cu bazele de lungimile  $a$ ,  $b$  și înălțimea  $h$  se calculează cu formula

$$A = \frac{1}{2}h(a + b) = h \cdot m, \text{ unde } m \text{ este lungimea liniei mijlocii a trapezului.}$$

2 Fie trapezul  $ABCD$  cu  $AD \parallel BC$  (fig. 9).

a) Comparați  $A_{ABD}$  și  $A_{ACD}$ ,  $A_{ABC}$  și  $A_{BCD}$ .

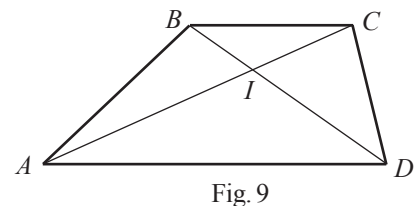
b) Fie  $\{I\} = AC \cap BD$ . Comparați  $A_{ABI}$  și  $A_{CID}$ .

Rezolvare:

a) Înălțimile triunghiurilor  $ABD$  și  $ACD$ , coborâte din vârfurile  $B$  și  $C$  pe latura comună  $AD$ , sunt înălțimi ale trapezului. Prin urmare, triunghiurile  $ABD$  și  $ACD$  sunt echivalente, adică  $A_{ABD} = A_{ACD}$ . Similar, se poate arăta că  $A_{ABC} = A_{BCD}$ .

b)  $A_{ABI} = A_{ABD} - A_{AID}$ ,  $A_{CID} = A_{ACD} - A_{AID}$ .

Dar conform a),  $A_{ABD} = A_{ACD}$ . Prin urmare,  $A_{ABI} = A_{CID}$ .



**Generalizăm**

Diagonalele unui trapez și laturile neparalele formează cu una dintre baze triunghiuri echivalente.

Triunghiurile formate de diagonalele unui trapez cu laturile neparalele sunt echivalente.

## § 5. Aria poligonului regulat. Lungimea cercului și aria discului

- 1 Știind că  $m$  este lungimea înălțimii coborâte din centrul poligonului regulat pe una dintre laturile lui, iar  $l$  este lungimea laturii, calculați aria poligonului, știind că el are:  
a) 6 laturi;    b)  $n$  laturi.

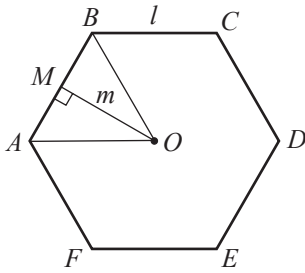


Fig. 10

*Rezolvare:*

a) Poligonul regulat cu 6 laturi se numește hexagon regulat.

Fie  $O$  centrul cercului înscris în hexagonul regulat  $ABCDEF$  (fig. 10). Evident că triunghiurile  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOE$ ,  $EOF$  și  $AOF$  sunt congruente, iar suma ariilor acestora este egală cu aria hexagonului  $ABCDEF$ .

Prin urmare,

$$A_{ABCDEF} = 6 \cdot A_{AOB}. \quad (1)$$

Fie  $[OM]$  înălțime a triunghiului  $AOB$ . Deoarece  $\triangle AOB$  este isoscel, rezultă că  $[OM]$  este și apotemă, adică  $OM = m$ .

$$A_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot l. \quad (2)$$

Substituind (2) în (1), obținem:

$$A_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{1}{2} ml = 3ml.$$

*Răspuns:*  $3ml$ .

b) Fie  $A_1A_2\dots A_n$  un poligon regulat cu  $n$  laturi, iar  $O$  – centrul cercului înscris în acest poligon (fig. 11).

Similar cazului a), dacă unim punctul  $O$  cu vârfurile poligonului, obținem  $n$  triunghiuri congruente și

$$A_{A_1, A_2 \dots A_n} = n \cdot A_{A_1OA_2}.$$

$$\text{Dar } A_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} ml.$$

$$\text{Prin urmare, } A_{A_1, A_2 \dots A_n} = \frac{1}{2} mnl.$$

$$\text{Răspuns: } \frac{1}{2} mnl.$$

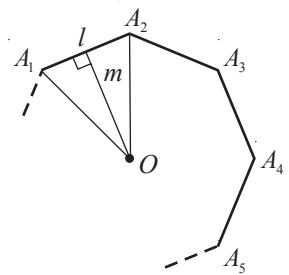


Fig. 11

### Generalizăm

- **Apotema** poligonului regulat este segmentul care unește centrul poligonului cu mijlocul unei laturi. Apotema este perpendiculară pe această latură.

- **Aria poligonului regulat** cu  $n$  laturi, apotema de lungime  $m$  și latura de lungime  $l$  se calculează cu formula  $A_n = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot l$ .

- **Aria triunghiului echilateral** cu latura de lungime  $l$  este egală cu  $\frac{\sqrt{3}}{4} l^2$ .

- Demonstrați formula de calcul pentru aria triunghiului echilateral.

- 2 Fie un cerc cu raza 1. Se poate arăta că în acest cerc poate fi înscris orice poligon regulat cu  $n$  laturi. Calculând perimetrele acestor poligoane, obținem, de exemplu:

$$\text{pentru } n=4, P_4 = 4\sqrt{2} \approx 5,656854;$$

$$\text{pentru } n=8, P_8 = 8\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 6,12253492;$$

$$\text{pentru } n=16, P_{16} = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 6,24289030;$$

$$\text{pentru } n=32, P_{32} = 32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \approx 6,27309698.$$

Observăm că perimetrele obținute sunt aproximativ egale. Este firesc, deoarece fiecare dintre ele aproximează cu o anumită exactitate lungimea cercului cu raza 1. Evident, cu cât poligonul regulat are mai multe laturi, cu atât mai corect va fi calculată lungimea acestui cerc.

Perimetrele calculate aproximează dublul numărului irațional  $\pi \approx 3,14159\dots$

Deci, lungimea cercului cu raza 1 este  $2\pi$ .

Se poate demonstra formula  $L = 2\pi r$ , unde  $L$  este lungimea cercului, iar  $r$  – raza lui.

**3** Calculați aria discului cu centrul  $O$  și raza  $r$ .

*Rezolvare:*

În  $\mathcal{C}(O, r)$  înscriem un poligon regulat cu  $n$  laturi.


Aria acestui poligon este  $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2}n \cdot l \cdot m$ , unde  $l$  este lungimea laturii, iar  $m$  – lungimea apotemei poligonului.

Cu cât este mai mare  $n$ , cu atât mai bine  $n \cdot l$  aproximează lungimea cercului, iar  $m$  – raza  $r$  a cercului. De aceea, putem considera  $\mathcal{A}_{\text{discului}} = \frac{1}{2}L \cdot r$ , unde  $L$  este lungimea cercului ce mărginește discul.

Prin urmare, deoarece  $L = 2\pi r$ , obținem  $\mathcal{A}_{\text{discului}} = \pi r^2$ .

## Exerciții și probleme


### Fixăm cunoștințele


- Calculați perimetrul și aria pătratului cu laturile de:
  - 3 cm;
  - 3,7 cm;
  - $6\sqrt{5}$  cm;
  - $7\frac{2}{9}$  cm.
- Aflați lungimea laturii pătratului, dacă aria lui este de:
  - 225 cm<sup>2</sup>;
  - 48 cm<sup>2</sup>;
  - $16\frac{1}{8}$  cm<sup>2</sup>;
  - $(\sqrt{3} - 2)^2$  cm<sup>2</sup>.
- Calculați aria triunghiului dreptunghic isoscel cu catetele de lungime:
  - 2,7 cm;
  - 3,5 cm;
  - $(2 + \sqrt{3})$  cm;
  - $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$  cm.
- Aflați lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel, dacă aria lui este de:
  - 72 cm<sup>2</sup>;
  - 120 cm<sup>2</sup>;
  - $2\frac{1}{12}$  cm<sup>2</sup>;
  - $(2\sqrt{5} - 5)^2$  cm<sup>2</sup>.
- Calculați aria dreptunghiului cu laturile de:
  - 4,4 cm și 1,2 cm;
  - $4\sqrt{7}$  cm și  $2\sqrt{7}$  cm;
  - $(2\sqrt{31} + \sqrt{29})$  cm și  $(2\sqrt{31} - \sqrt{29})$  cm;
  - $11\frac{1}{16}$  cm și  $\frac{256}{177}$  cm.
- Aflați perimetrul și aria triunghiului dreptunghic cu catetele de:
  - 3 dm și 40 cm;
  - 12 cm și 50 mm;
  - 0,8 m și 60 cm;
  - 120 mm și 1,2 dm.
- Determinați dimensiunile dreptunghiului cu aria  $\mathcal{A}$  și perimetrul  $\mathcal{P}$ , dacă:
  - $\mathcal{A} = 18,25$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{P} = 19,6$  cm;
  - $\mathcal{A} = 110$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{P} = 32\sqrt{2}$  cm;
  - $\mathcal{A} = \frac{14}{27}$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{P} = 2\frac{8}{9}$  cm;
  - $\mathcal{A} = 32$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{P} = 36$  cm.
- Două loturi de pământ au formă de pătrate cu laturile de 15 m și, respectiv, 25 m. Aflați cealaltă dimensiune a unui lot de pământ de formă dreptunghiulară echivalent cu loturile date, dacă o dimensiune este de 50 m.
-  **Lucrați în perechi!** Fie  $ABCD$  paralelogram,  $h_1 = d(A, BC)$ ,  $h_2 = d(B, CD)$  și  $\mathcal{A}$  – aria paralelogramului. Completați tabelul:
 

$AB$	$BC$	$h_1$	$h_2$	$\mathcal{A}$
	15	12	10	
$5\sqrt{5}$	5		$3\sqrt{5}$	
		7	10,5	210
	18		9	162

10. Fie  $h_a, h_b, h_c$  înălțimile unui triunghi corespunzătoare laturilor  $a, b$ , respectiv  $c$ , iar  $\mathcal{A}$  – aria triunghiului. Completați tabelul:

$a$	$b$	$c$	$h_a$	$h_b$	$h_c$	$\mathcal{A}$
6	12		10		5	
	15		12	10	9	
14,4		16		12		144
24	30				21	210


11. Fie triunghiul  $ABC$ . Aflați aria triunghiului, dacă:
- $AB = 6$  cm,  $BC = 7$  cm,  $AC = 9$  cm;
  - $AB = 18$  cm,  $BC = 9\sqrt{3}$  cm,  $AC = 8\sqrt{3}$  cm;
  - $AB = 10$  cm,  $BC = 12$  cm,  $m(\angle A) = 90^\circ$ .
12.  **Lucrați în grup!** Fie  $h$  înălțimea trapezului  $ABCD$  cu baza mare  $AB$ . Determinați ariile triunghiurilor  $ABC, ABD, ADC, DCB$ , dacă:
- $AB = 11$  cm,  $CD = 8$  cm,  $h = 9$  cm;
  - $AB = 7\sqrt{5}$  cm,  $CD = 4\sqrt{5}$  cm,  $h = 5\sqrt{5}$  cm;
  - $AB = 9\frac{15}{22}$  cm,  $CD = \frac{90}{11}$  cm,  $h = 11$  cm;
  - $AB = 12$  cm,  $AD = 7$  cm,  $m(\angle A) = m(\angle B) = 45^\circ$ .

13.  **Lucrați în perechi!** Fie  $h$  înălțimea,  $m$  lungimea liniei mijlocii, iar  $\mathcal{A}$  aria trapezului  $ABCD$  cu baza mare  $AB$ . Completați tabelul:


$AB$	$CD$	$h$	$m$	$\mathcal{A}$
10	6	7		
18		22	16	
32		20		560

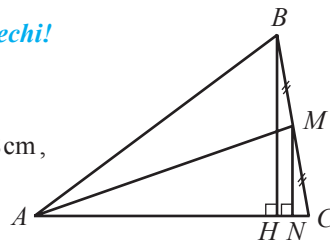
14. Aflați lungimea cercului și aria discului mărginit de acest cerc, dacă raza cercului este de:
- 10 cm;
  - 15 cm;
  - 8 cm.
15. Aflați aria paralelogramului cu unghiul ascuțit de  $45^\circ$ , dacă una dintre diagonalele lui este de 9 cm și coincide cu o înălțime.
16. Aria unui paralelogram cu înălțimile de 8 cm și 6 cm este egală cu  $72$  cm<sup>2</sup>. Aflați perimetrul paralelogramului.
17. Punctul  $E$  este mijlocul laturii  $BC$  a paralelogramului  $ABCD$  cu aria de  $104$  cm<sup>2</sup>. Aflați aria triunghiului  $ABE$ .
18. Aflați aria discului mărginit de un cerc cu lungimea de  $4\pi$  m.


### Formăm capacitățile și aplicăm

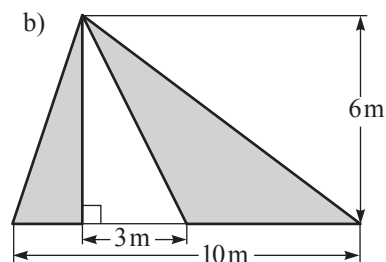
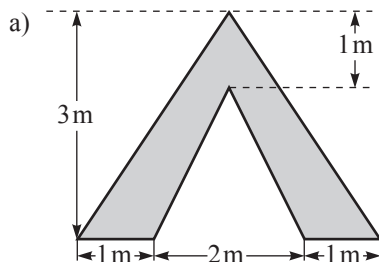
19. Un poligon regulat cu  $n$  laturi are vârfurile pe un cerc cu raza de 4 cm. Calculați aria poligonului, dacă:
- $n = 6$ ;
  - $n = 8$ ;
  - $n = 10$ .
20. Aflați perimetrul și aria pătratului cu diagonalele de:
- $12\sqrt{2}$  cm;
  - 18 cm;
  - $a\sqrt{2}$  cm;
  - $x$  cm.
21. De câte ori se va mări aria pătratului, dacă latura lui se va mări:
- de 3 ori;
  - de 7 ori;
  - de  $n$  ori?
22. De câte ori se va micșora diagonala pătratului, dacă aria lui se va micșora:
- de 4 ori;
  - de 10 ori;
  - de  $(\sqrt{11} - 4)^2$  ori?
23.  **Lucrați în perechi!** De câte ori se va mări aria dreptunghiului, dacă:
- o latură a lui se va mări de 4 ori;
  - fiecare latură se va mări de 5 ori;
  - o latură se va mări de 8 ori, iar alta se va micșora de 3 ori?

24. Aflați aria trapezului isoscel  $ABCD$  cu înălțimea  $BH$  de 7 cm, dacă punctul  $H$  împarte baza  $AD$  în două segmente, cel mai lung fiind de 9 cm.
25. Aflați aria unui trapez dreptunghic cu bazele de 12 cm și 9 cm, iar latura laterală de 6 cm.
26. Vârfurile unui trapez se află pe un cerc cu raza de 13 cm și centrul pe baza trapezului. Aflați aria trapezului, dacă înălțimea lui este de 12 cm.
27. O diagonală a rombului a fost mărită cu 40%, alta – cu 20%. Cu câte procente s-a mărit aria rombului?

28.  **Lucrați în perechi!** Examinați desenul. Știind că  $AB = 20$  cm,  $BH = 12$  cm,  $AM = 18$  cm, aflați aria triunghiului  $ABC$ .



29.  **Investigați!** Pentru 1 m<sup>2</sup> de suprafață se utilizează 100 g de vopsea. De câta vopsea vom avea nevoie pentru a acoperi toată suprafața?

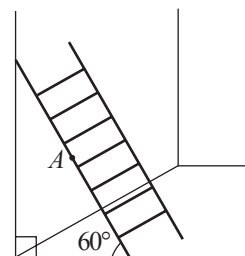


30. Fie paralelogramul  $ABCD$  și punctul  $K$  situat pe dreapta  $AD$ , astfel încât  $AD = DK$ . Aflați aria paralelogramului  $ABCD$ , dacă  $\mathcal{A}_{BDK} = 24 \text{ cm}^2$ .
31. Aflați aria triunghiului dreptunghic, știind că suma lungimilor catetelor este egală cu 11 cm, iar suma pătratelor lor este egală cu  $61 \text{ cm}^2$ .
32. Calculați aria unui trapez cu diagonalele de 113 cm și 17 cm, iar înălțimea de 15 cm.
33. Calculați raza unui disc, știind că aria lui este egală cu suma ariilor a două discuri cu razele de 5 cm și 12 cm.

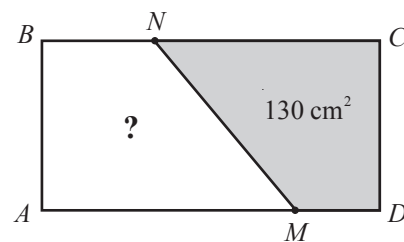
### Dezvoltăm capacitățile și creăm


34. Diagonala  $AC$  a paralelogramului  $ABCD$  intersectează înălțimea  $BE$  în punctul  $O$ , astfel încât  $\frac{BO}{OE} = \frac{5}{3}$ . Aflați aria patrulaterului  $BEDC$ , dacă aria paralelogramului  $ABCD$  este de  $100 \text{ cm}^2$ .
35. Punctul  $E$  aparține laturii  $AD$  a dreptunghiului  $ABCD$ , astfel încât  $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$ . Determinați aria patrulaterului  $BEDC$ , dacă aria dreptunghiului  $ABCD$  este  $S$ .
36. Centrul cercului înscris în triunghiul isoscel  $ABC$  cu baza  $AC$  împarte înălțimea  $BM$  în raportul  $\frac{17}{15}$ . Aflați perimetrul și aria triunghiului, dacă raza cercului este de 7,5 cm.
37. Aflați aria trapezului cu bazele de 7 cm și 20 cm și diagonalele de 13 cm și  $5\sqrt{10}$  cm.
38. Determinați mulțimea punctelor  $M$  din interiorul triunghiului  $ABC$  isoscel cu baza  $AC$ , știind că  $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{BCM}$ .

39. O scară se sprijină de un perete vertical sub un unghi de  $60^\circ$  față de podea. Scara alunecă de-a lungul peretelui până atinge cu capetele de sus podeaua. Aflați lungimea traiectoriei descrise de punctul  $A$ , aflat la jumătatea scării (a se vedea desenul), dacă lungimea scării este egală cu 6 m.



40. Determinați aria unui trapez cu bazele de 2 cm și 3 cm, iar diagonalele de 3 cm și 4 cm.
41. Bisectoarea unghiului drept al unui triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în raportul 3 : 4. Aflați aria triunghiului, dacă lungimea ipotenuzei este de 35 cm.
42. Punctele  $M$  și  $N$  se află pe laturile  $AD$  și  $BC$  ale dreptunghiului  $ABCD$  (a se vedea desenul), astfel încât  $\frac{DM}{AM} = 0,25$ ,  $\frac{CN}{BN} = 2$ . Aflați  $\mathcal{A}_{ABNM}$ , dacă  $\mathcal{A}_{DMNC} = 130 \text{ cm}^2$ .
43. Fie punctele  $A(-2; -5)$ ,  $B(6; 7)$ ,  $C(4; -9)$ . Aflați:  
 a) aria triunghiului  $ABC$ ;  
 b) coordonatele punctului  $D$ , dacă  $ABCD$  este dreptunghi;  
 c) aria dreptunghiului  $ABCD$ .



44. Într-un trapez isoscel este înscris un cerc de rază  $r$ . Determinați aria trapezului, dacă baza mare este de 2 ori mai lungă decât baza mică.
45.  **Lucrați în grup!** Construiți 4 triunghiuri necongruente echivalente.
46. Împărțiți un triunghi în 5 triunghiuri echivalente.

47.  **Lucrați în grup!**  **Proiect STREAM.** Ariile în arte.

48.  **Lucrați individual!**  **Proiect.** Ariile în viața mea.

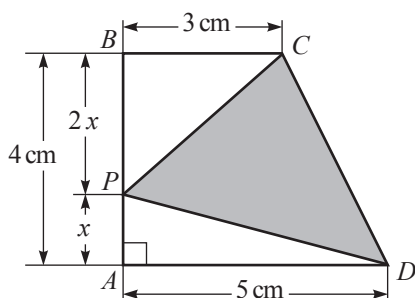


Timpefectiv de lucru:  
45 de minute

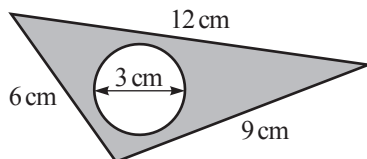
## Test sumativ

### Varianta I

- Completați:
  - Aria dreptunghiului cu laturile de 4 cm și 8 cm este egală cu .
  - Aria triunghiului dreptunghic care are catetele de 6 cm și 11 cm este egală cu .
  - Aria paralelogramului cu o latură de 18 cm și înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 5 cm este egală cu .
  - Aria rombului cu diagonalele de 13 cm și 9 cm este egală cu .
- $ABCD$  este un trapez dreptunghic.



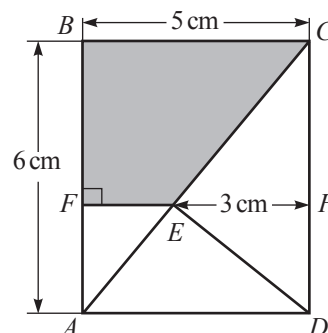
- Determinați aria trapezului  $ABCD$ .
  - Aflați  $AP$ .
  - Aflați aria domeniului colorat.
- Examinați desenul. Determinați:
    - aria discului;
    - aria domeniului colorat.



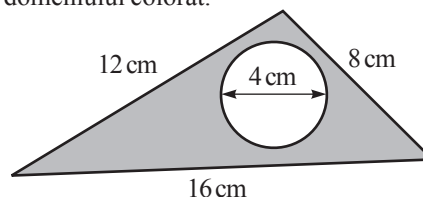
- Fie punctele  $A(-7; 2)$ ,  $B(-3; 10)$ ,  $C(9; 4)$ . Aflați:
  - aria triunghiului  $ABC$ ;
  - coordonatele punctului  $D$ , dacă  $ABCD$  este dreptunghi;
  - aria dreptunghiului  $ABCD$ .

### Varianta II

- Completați:
  - Aria dreptunghiului cu laturile de 5 cm și 7 cm este egală cu .
  - Aria triunghiului dreptunghic care are catetele de 14 cm și 4 cm este egală cu .
  - Aria paralelogramului cu o latură de 12 cm și înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 6 cm este egală cu .
  - Aria rombului cu diagonalele de 11 cm și 8 cm este egală cu .
- $ABCD$  este un dreptunghi.



- Determinați  $BF$ .
  - Aflați aria domeniului colorat.
  - Aflați aria triunghiului  $AED$ .
- Examinați desenul. Determinați:
    - aria discului;
    - aria domeniului colorat.



- Fie punctele  $A(-10; 4)$ ,  $B(2; 10)$ ,  $C(6; 2)$ . Aflați:
  - aria triunghiului  $ABC$ ;
  - coordonatele punctului  $D$ , dacă  $ABCD$  este dreptunghi;
  - aria dreptunghiului  $ABCD$ .

*Unde este materie, este geometrie.*

Johannes Kepler

## § 1. Poliedre

**1** Examinați suprafața fiecărui obiect din figura 1.

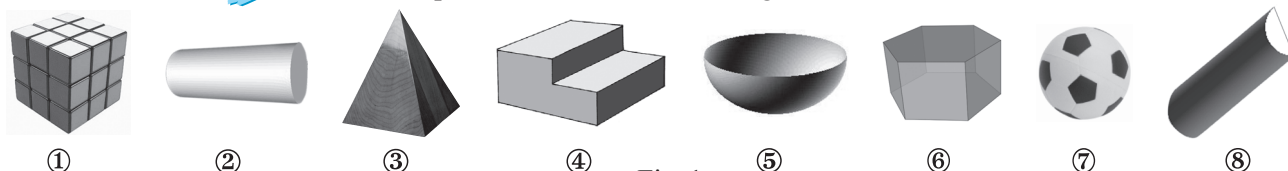


Fig. 1

- Selectați obiectele mărginite doar de suprafețe poligonale.
- Numiți corpurile geometrice studiate ale căror modele reale se regăsesc în imaginile date.
- Care dintre corpurile geometrice studiate au fețe, muchii, vârfuri?

### Definiție

◆ **Poliedrul** este un corp geometric mărginit doar de suprafețe poligonale.

Suprafețele poligonale ale poliedrului se numesc **fețe**, laturile fețelor – **muchii**, iar vârfurile muchiilor – **vârfuri** ale poliedrului.

◆ Segmentul cu extremitățile-vârfuri a două fețe diferite se numește **diagonală** a poliedrului.

### Observație

Uneori vom numi fața poliedrului cu numele poligonului care mărginește această față.

### Aplicăm

Fie cubul  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (fig. 2).  $DD_1 C_1 C$  este o față,  $[CD]$  – o muchie,  $C$  – un vârf, iar  $[B_1 D]$  – o diagonală a cubului.

- Numiți toate celelalte elemente ale cubului  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

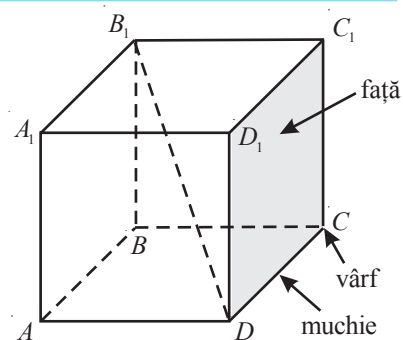


Fig. 2

**2** Cum reprezentăm corect un cub?

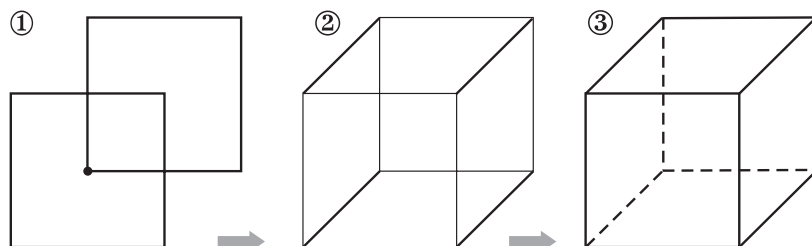


Fig. 3

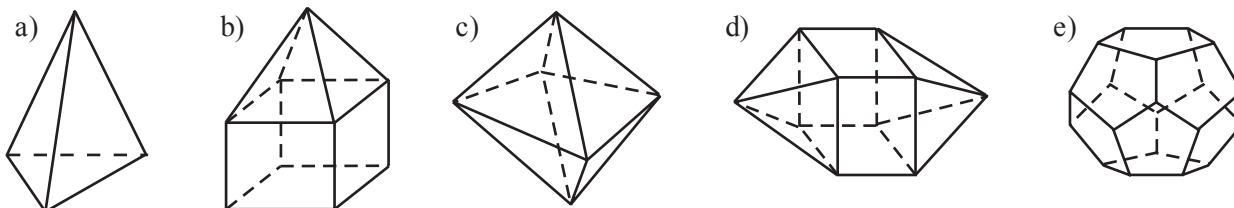
- 1) Construim un pătrat, apoi din centrul lui spre dreapta-sus construim un alt pătrat, congruent cu primul (fig. 3).
- 2) Unim vârfurile omoloage ale celor două pătrate.
- 3) „Înterupem” muchiile care nu se văd în spațiu.

- Amintiți-vă cum se calculează aria suprafeței și volumul cubului, apoi aflați aria suprafeței și volumul unui cub cu muchia de 6 cm.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

1. Examinați imaginile și aflați câte fețe are fiecare poliedru:



2. **Investigați!** Câte diagonale are fiecare poliedru din imaginile problemei 1?

3. Care dintre cuburile date pot avea desfășurarea reprezentată?

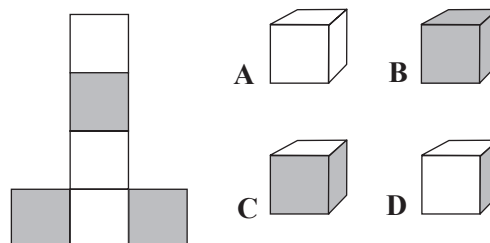
Selecționați varianta corectă de răspuns:

a) A și B; b) C și D; c) A și D; d) B și D.

4. Determinați aria totală și volumul unui cub cu latura de 3 cm.

5. Aflați volumul și aria totală a unui cub care are suma lungimilor muchiilor egală cu 48 cm.

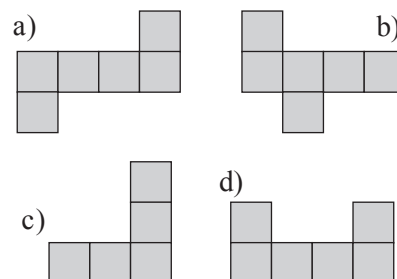
6. **Lucrați în perechi!** Determinați aria totală și volumul unui cub cu diagonala de  $2\sqrt{3}$  cm.



### Formăm capacitățile și aplicăm

7. O canistră are forma unui cub cu muchia de 30 cm. Care este capacitatea canistrei, măsurată în litri?

8. **Investigați!** Mihai dorește să facă o cutie de forma unui cub, dar fără capac, însă fundul cutiei să fie dublu. Care este desfășurarea potrivită? Selecționați varianta corectă de răspuns.



9. Volumul unui cub este de  $125 \text{ cm}^3$ . Determinați aria totală a cubului.

10. Aflați volumul unui cub cu aria totală de  $24 \text{ cm}^2$ .

11. **Lucrați în perechi!** Cât cântărește un cub de gheață cu muchia de 20 cm, dacă  $1 \text{ dm}^3$  de gheață cântărește 0,9 kg?

12. Suma ariilor fețelor unui cub este egală cu  $216 \text{ cm}^2$ . Aflați lungimea diagonalei cubului.

### Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Aflați aria totală a unui cub cu diagonala mai lungă cu 1 cm decât muchia lui.

14. Fie cubul  $ABCD A' B' C' D'$  cu  $AB = 4$  cm. Aflați:

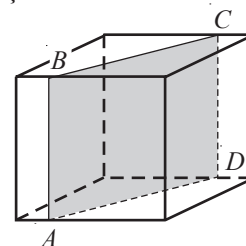
a) distanța de la  $D'$  la  $B$ ; b) distanța de la  $D'$  la  $AB$ .

15. În cubul  $ABCD A' B' C' D'$  punctul  $P$  este mijlocul lui  $[C'D']$  și  $AP = 24$  cm. Aflați aria totală și volumul cubului.

16. **Investigați!** Un plan intersectează un cub în punctele  $A, B, C, D$ , care determină un dreptunghi. Reprezentați similar cum trebuie un plan să intersecteze cubul pentru ca să determine:

a) un triunghi echilateral; b) un hexagon regulat; c) un trapez isoscel.

17. Un cub este format din 27 de cuburi mai mici identice. Comparați aria totală a cubului mare cu aria corpului care se obține din cubul mare înlăturând toate cuburile mici de la vârfurile cubului mare.



33. **Lucrați în grup!** **Proiect STEAM.** Poliedre în jurul nostru.

## § 2. Prisma

**1** Doru Visătoru visează să-și construiască o casă mare cu piscină. Fundul piscinei va avea forma unui dreptunghi cu dimensiunile de 10 m și 5 m. Care va fi capacitatea piscinei, dacă adâncimea ei va fi de 2 m?

Pentru a rezolva problema, vom studia *prismele* – o clasă specială de poliedre.

Studiați atent paragraful și spuneți ce corp geometric sugerează piscina lui Doru.



### 2.1. Elementele prismei. Clasificarea prismelor

Amintim că două *plane* se numesc *paralele* dacă ele nu au niciun punct comun.

#### Definiții

- ◆ **Prisma** este un poliedru format din două fețe congruente paralele, numite **baze**, și din toate segmentele cu extremitățile aparținând acestor baze. Celelalte fețe ale prismei se numesc **fețe laterale**. Laturile fețelor laterale se numesc **muchiile laterale** ale prismei.
- ◆ Mulțimea punctelor prismei care nu aparțin bazelor și nici fețelor laterale se numește **interiorul prismei**.

De regulă, notând prisma, scriem la început literele vârfurilor bazei inferioare, apoi literele vârfurilor bazei superioare.

#### Exemplu

Prisma din figura 4 poate fi notată  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ .

$A_1B_1C_1D_1E_1$  este o bază,  $AA_1E_1E$  – o față laterală, iar  $[EE_1]$  – o muchie laterală a acestei prismei.

- Câte muchii are prisma din figura 4?  
Dar diagonale?

Luând în considerare definiția prismei, se poate demonstra:

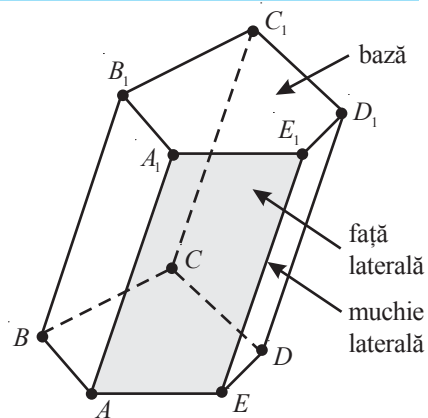


Fig. 4

#### Teorema 1

Laturile omoloage ale bazelor prismei sunt paralele și congruente.

Astfel, în cazul prismei din figura 4,  $AE \parallel A_1E_1$  și  $[AE] \equiv [A_1E_1]$ ,  $AB \parallel A_1B_1$  și  $[AB] \equiv [A_1B_1]$  etc.

- Utilizând teorema 1 și criteriile paralelogramului, demonstrați teoremele 2 și 3.

#### Teorema 2

Fețele laterale ale prismei sunt paralelograme.

#### Teorema 3

Muchiile laterale ale prismei sunt paralele și congruente.

#### Definiție

O **dreaptă este perpendiculară pe un plan** dacă ea este perpendiculară pe două drepte concurente ale acestui plan (fig. 5).

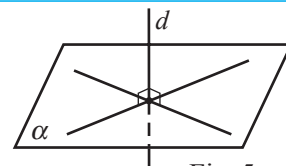


Fig. 5

Orice segment cu extremitățile în planele bazelor prismei, perpendicular pe ele, se numește **înălțime** a prismei. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

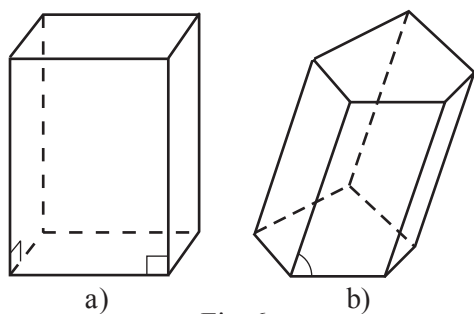


Fig. 6

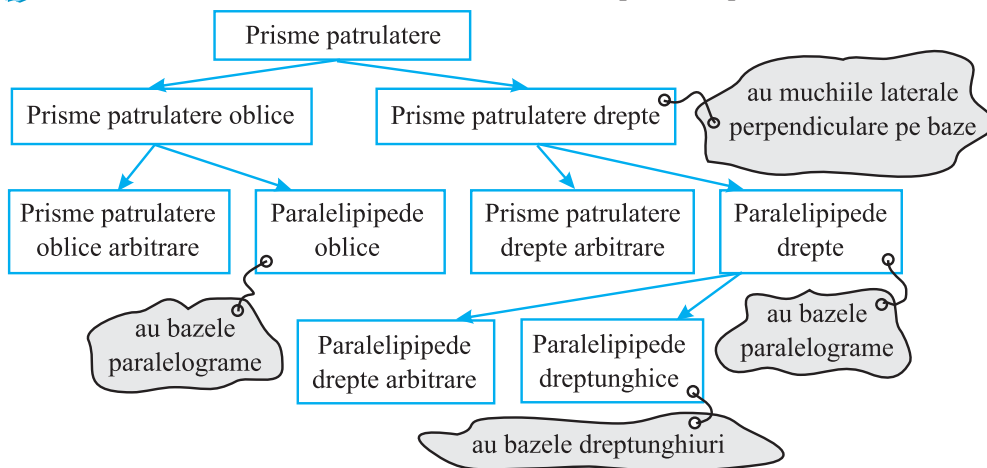
Dacă muchiile laterale ale prisme sunt perpendiculare pe planele bazelor, atunci prisma se numește **prismă dreaptă** (fig. 6 a)), în caz contrar – **prismă oblică** (fig. 6 b)). Observăm că fețele laterale ale prisme drepte sunt dreptunghiuri, iar muchiile ei laterale – înălțimi ale acestora.

Prisma dreaptă cu bazele poligoane regulate se numește **prismă regulată**.

Prismele se clasifică după poligoanele bazelor: *triunghiulare*, *patrulater*, *pentagonale*, *hexagonale* etc.

În figura 6 b) este reprezentată o prismă pentagonală oblică.

2 Examinați schema și observați cum se clasifică prismele patrulater.



• În care clasă de prismele patrulater se includ prismele patrulater regulate? Justificați.

■ **Aplicăm**

3 Fie paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  cu  $AA_1 = 10$  cm,  $AD = 8$  cm,  $CD = 6$  cm (fig. 7). Aflați  $A_1 C$ .

Rezolvare:

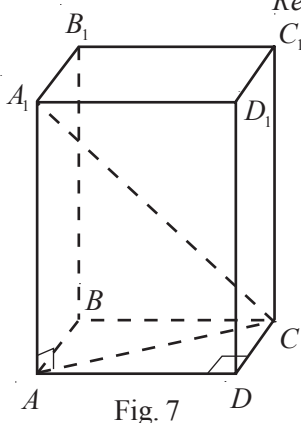


Fig. 7

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (1),	→	deoarece $[AC]$ este diagonala dreptunghiului $ABCD$ .
$A_1 C^2 = A_1 A^2 + AC^2$ (2),	→	deoarece $\Delta A_1 AC$ este dreptunghic în vârful $A$ .
$A_1 C^2 = A_1 A^2 + AD^2 + CD^2$ .	→	substituim (1) în (2).
Deci,		
$A_1 C = \sqrt{10^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ (cm).	→	$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ .
Răspuns: $10\sqrt{2}$ cm.		

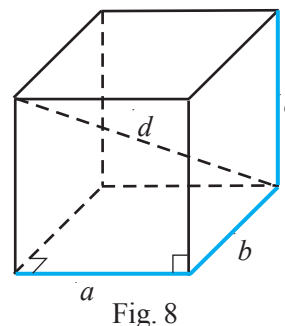


Fig. 8

■ **Teorema 4 (Teorema lui Pitagora în spațiu)**

Pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni liniare ale acestuia:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (fig. 8).}$$

## 2.2. Aria laterală, aria totală și volumul prisme

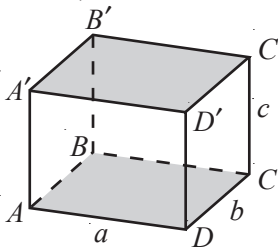


Fig. 9

- 4 a) Reprezentați desfășurarea paralelipipedului dreptunghic din figura 9.  
 b) Determinați aria suprafeței laterale și aria suprafeței totale a paralelipipedului.

Rezolvare:

- a) În figura 10 este reprezentată desfășurarea paralelipipedului  $ABCD A' B' C' D'$ .  
 b) Fie  $\mathcal{A}_l$  aria suprafeței laterale, iar  $\mathcal{A}_t$  aria totală a paralelipipedului  $ABCD A' B' C' D'$ .

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{AA'D'D} + \mathcal{A}_{DD'C'C} + \mathcal{A}_{CC'B'B} + \mathcal{A}_{BB'A'A} = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = 2c(a + b).$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{A'B'C'D'} = \mathcal{A}_l + ab + ab = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab).$$

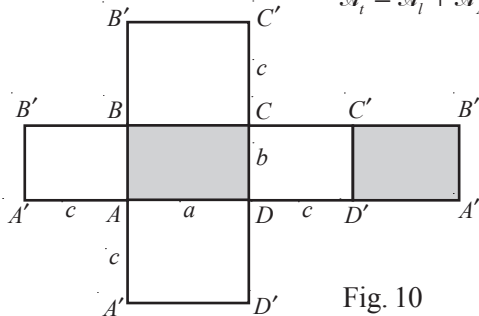


Fig. 10

Reuniunea fețelor laterale ale prisme se numește **suprafață laterală** a prisme.

Aria suprafeței laterale a prisme se numește **arie laterală** a prisme și se notează cu  $\mathcal{A}_l$ .

Aria unei baze a prisme se notează cu  $\mathcal{A}_b$ .

**Aria totală** a prisme este suma dintre aria laterală și ariile bazelor ei și se notează  $\mathcal{A}_t$ .

### Teorema 5

Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile  $a, b, c$  este  $\mathcal{A}_t = 2(ab + ac + bc)$  (fig. 8).



Atelier

Confecționați din carton o prismă regulată hexagonală cu muchiile laterale de 9 cm și laturile bazei de 5 cm.

### Teorema 6

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțimea prisme (sau lungimea muchiei laterale).

Să demonstrăm teorema 6.

*Ipoteză:* Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  laturile bazei unei prisme drepte, iar  $h$  – înălțimea prisme (fig. 11).

*Concluzie:*  $\mathcal{A}_l = P \cdot h$ , unde  $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

*Demonstrație:*

- ① Fețele laterale ale unei prisme drepte sunt dreptunghiuri.
- ②  $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n$ , unde  $\mathcal{A}_i$  este aria feței cu dimensiunile  $a_i$  și  $h, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
- ③  $\mathcal{A}_i = a_i \cdot h, i \in \{1, 2, \dots, n\}$  (conform ① și ②).
- ④ Substituind ③ în ②, obținem:  $\mathcal{A}_l = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + \dots + a_n \cdot h, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  
 $\mathcal{A}_l = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot h = P \cdot h$  (c.c.t.d.). ▶

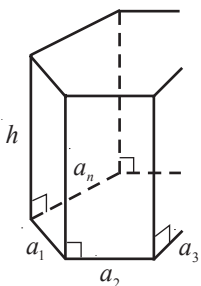


Fig. 11

11

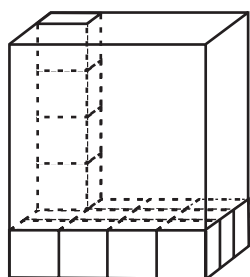


Fig. 12

- 5 Calculați volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile  $a = 4$  cm,  $b = 3$  cm,  $c = 5$  cm.

Rezolvare:

Baza paralelipipedului cuprinde  $4 \cdot 3 = 12$  (pătrate), fiecare dintre ele cu aria de  $1 \text{ cm}^2$  (fig. 12). Pe fiecare pătrat se poate așeza câte un cub cu muchia de 1 cm. Astfel, baza paralelipipedului va cuprinde 12 cuburi. Întrucât înălțimea acestui strat este de 1 cm, iar înălțimea paralelipipedului – de 5 cm, în paralelipiped încap 5 straturi. Prin urmare, volumul paralelipipedului dreptunghic este:  $12 \cdot 5 = 60 \text{ (cm}^3\text{)}$ .

Răspuns:  $60 \text{ cm}^3$ .

Generalizând rezultatul problemei, obținem:

**Teorema 7**

Volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu produsul celor trei dimensiuni liniare ale acestuia:  
 $V = abc$  (fig. 13).

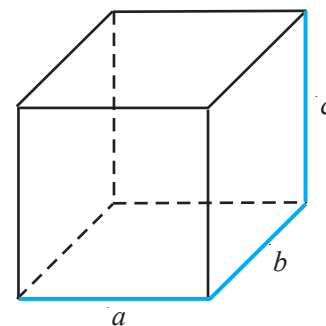


Fig. 13

Deoarece baza paralelipipedului dreptunghic este un dreptunghi, formula din teorema 7 poate fi rescrisă astfel:

$$V = \mathcal{A}_b \cdot c \quad (*)$$

unde  $\mathcal{A}_b = a \cdot b$  este aria bazei paralelipipedului.

Mai mult chiar, se poate demonstra că formula (\*) este adevărată pentru orice prismă. Prin urmare, are loc:

**Teorema 8**

Volumul prisme este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțimea prisme:  $V = \mathcal{A}_b \cdot h$ .

**Aplicăm**

**6** O prismă dreaptă are bazele paralelograme cu o latură de 6 cm și înălțimea dusă pe această latură de 4 cm. Înălțimea prisme este de 14 cm. Aflați volumul prisme.

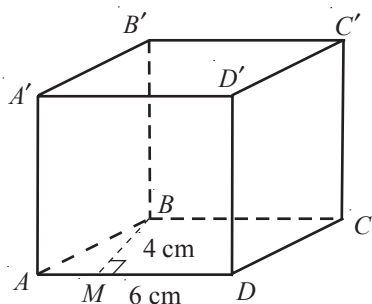


Fig. 14

*Rezolvare:*

Fie  $ABCD A' B' C' D'$  prisma dată (fig. 14).

Atunci  $V_{pr.} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h$ , unde  $h$  este înălțimea prisme.

$$\mathcal{A}_{ABCD} = BM \cdot AD = 6 \cdot 4 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$V_{pr.} = 24 \cdot 14 = 336 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

*Răspuns:* 336 cm<sup>3</sup>.

**7** Rezolvarea problemei **1** (de la începutul paragrafului):

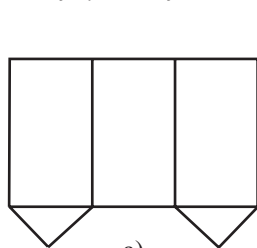
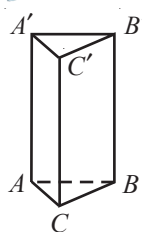
Capacitatea piscinei este egală cu volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 5 m, 10 m și 2 m. Deci,  $V = 5 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 100 \text{ m}^3$ .

*Răspuns:* 100 m<sup>3</sup>.

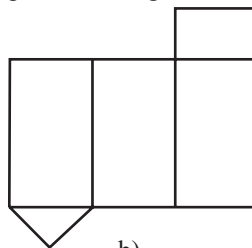
## Exerciții și probleme

**Fixăm cunoștințele**

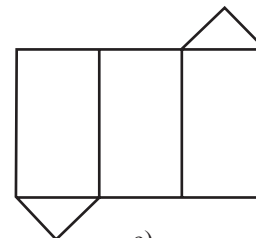
**1. Investigați!** Recunoașteți desfășurările corecte ale prisme triunghiulare.



a)



b)



c)

**2. Lucrați în perechi!** Ilustrați desfășurarea unei prisme triunghiulare regulate cu:


- a) latura bazei de 2 cm și înălțimea de 4 cm;
- b) latura bazei de 3 cm și înălțimea de 2 cm.

3. Copiați tabelul și completați cu *Da* numai dacă corpul geometric are proprietatea respectivă.

	Prisma patrulateră (arbitrară)	Prisma patrulateră dreaptă	Prisma patrulateră regulată	Paralelipipedul (arbitrar)	Paralelipipedul drept (arbitrar)	Paralelipipedul dreptunghic	Cubul
Are bazele patrulatere.	<i>Da</i>	<i>Da</i>	<i>Da</i>	<i>Da</i>	<i>Da</i>	<i>Da</i>	<i>Da</i>
Are muchiile laterale perpendiculare pe baze.		<i>Da</i>			<i>Da</i>		
Are bazele paralelograme.							
Are bazele dreptunghiuri.							
Are fețele laterale paralelograme.							
Are bazele pătrate.							
Are fețele laterale pătrate.							

4. Aflați aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 6 cm și 7 cm și înălțimea de 5 cm.
5. Determinați aria laterală, aria totală și lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 8 cm, aria bazei de 40 cm<sup>2</sup> și volumul de 240 cm<sup>3</sup>.

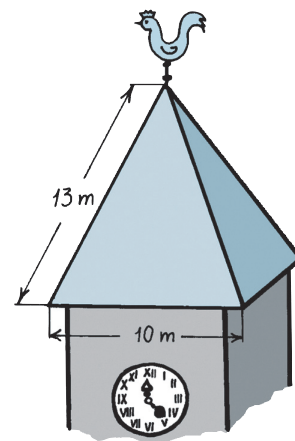
### Formăm capacitățile și aplicăm

6. Aflați aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 4 cm, aria bazei de 24 cm<sup>2</sup> și volumul egal cu 168 cm<sup>3</sup>.
7. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este de 40 cm, iar aria lui laterală – de 400 cm<sup>2</sup>. Determinați volumul paralelipipedului, știind că lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decât lățimea ei.
8. Un paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 3 cm și 5 cm are volumul de 90 cm<sup>3</sup>. Aflați aria laterală și aria totală a paralelipipedului.
9. Determinați aria laterală și volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de 7 cm.
10. Volumul unei prisme triunghiulare regulate este de 36 cm<sup>3</sup>. Aflați aria laterală și aria totală a prisme, dacă latura bazei este de 4 cm.
11. Toate muchiile unei prisme triunghiulare drepte au lungimea egală cu  $2\sqrt{3}$  cm. Aflați volumul prisme.
12.  **Lucrați în perechi!** O prismă triunghiulară regulată are aria bazei de  $16\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. Aflați aria totală și volumul prisme, dacă se știe că înălțimea prisme este de două ori mai mică decât lungimea laturii bazei.
13. Știind că latura bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 3 cm și aria laterală de 45 cm<sup>2</sup>, aflați volumul acestei prisme.
14. Perimetrul bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 15 cm. Determinați aria totală și volumul prisme, dacă înălțimea prisme este de 7 cm.
15. Diagonalele a 3 fețe diferite ale unui paralelipiped dreptunghic au lungimile egale cu 1 cm, 2 cm, respectiv 3 cm. Aflați lungimea diagonalei paralelipipedului.
16. Determinați aria laterală, aria totală și volumul unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 7 cm.
17. Determinați volumul unei prisme patrulatere regulate cu aria bazei de 25 cm<sup>2</sup> și aria laterală de 160 cm<sup>2</sup>.
18. O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 6 cm și volumul de 432 cm<sup>3</sup>. Determinați aria laterală și aria totală a prisme.
19. O bară metalică are forma unei prisme triunghiulare regulate cu lungimea laturii bazei de 10 cm și înălțimea de 1 m. Determinați masa barei, știind că densitatea metalului este de 7 600 kg/m<sup>3</sup>.
20. Diagonala feței laterale a unei prisme patrulatere regulate este de 13 cm. Știind că aria bazei este de 25 cm<sup>2</sup>, determinați volumul și aria totală a prisme.
21. Volumul unei prisme patrulatere regulate este de 128 cm<sup>3</sup>, iar înălțimea ei – de 8 cm. Determinați aria laterală și aria totală a prisme.
22. Latura bazei unei prisme hexagonale regulate este de 3 cm, iar înălțimea prisme – de 5 cm. Aflați aria laterală, aria totală și volumul prisme.
23. Determinați aria totală a unei prisme hexagonale regulate cu aria bazei de  $54\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> și volumul de 324 cm<sup>3</sup>.
24. Aflați volumul unei prisme hexagonale regulate cu înălțimea de 5 cm și aria laterală de 120 cm<sup>2</sup>.



### § 3. Piramida. Trunchiul de piramidă

**1** Acoperișul unui turn are forma unei piramide patrulatere cu laturile bazei de 10 m și muchiile laterale congruente de 13 m. Câte cutii cu vopsea sunt necesare pentru acest acoperiș, dacă o cutie ajunge pentru o suprafață de  $10 \text{ m}^2$ ? Pentru a rezolva problema, vom studia o altă clasă specială de poliedre, numite *piramide*.



#### 3.1. Elementele piramidei. Clasificarea piramidelor

##### Definiție

**Piramida** este un poliedru format dintr-o suprafață poligonală, numită **baza piramidei**, un punct care nu aparține bazei, numit **vârful piramidei**, și toate segmentele cu o extremitate în vârful piramidei, iar cealaltă extremitate aparținând bazei.

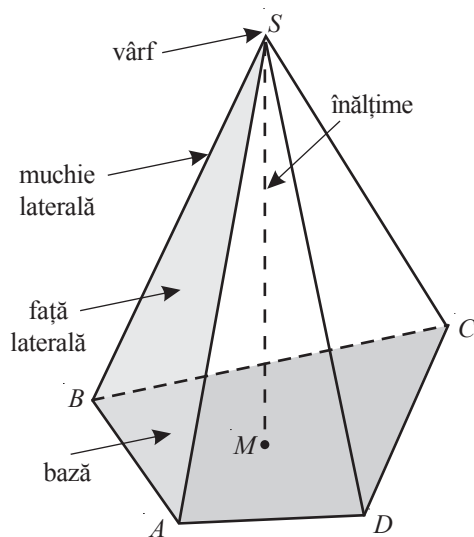


Fig. 15

Segmentul cu o extremitate în vârful piramidei, cealaltă aparținând planului bazei, și perpendicular pe această bază se numește **înălțime** a piramidei. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime** a piramidei.

**Fețele laterale** ale piramidei sunt triunghiuri cu un vârf în vârful piramidei. Segmentele ce unesc vârful piramidei cu vârfurile bazei se numesc **muchii laterale** ale piramidei.

Mulțimea punctelor piramidei care nu aparțin bazei și nici fețelor laterale se numește **interiorul piramidei**.

De regulă, notând piramida, scriem la început litera de la vârful piramidei, apoi literele vârfurilor bazei acesteia.

##### Exemplu

Piramida din figura 15 poate fi notată  $SABCD$ .

$ABCD$  este baza,  $S$  – vârful,  $ABS$  – o față laterală,  $[SB]$  – o muchie a acestei piramide.

Dacă  $[SM]$  este perpendicular pe bază, atunci  $[SM]$  este înălțimea piramidei  $SABCD$ .

Piramidele se clasifică după poligoanele bazei: *piramide triunghiulare (tetraedre), patrulatere, pentagonale, hexagonale, heptagonale* etc.

##### Definiție

O piramidă se numește **regulată**, dacă baza ei este un poligon regulat, iar baza înălțimii coincide cu centrul acestui poligon.

• Utilizând teorema lui Pitagora și congruența triunghiurilor, demonstrați următoarea teoremă:

##### Teorema 9

Muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt congruente.

Înălțimea unei fețe laterale trasată din vârful piramidei regulate se numește **apotemă** a acestei piramide.

• În pofida faptului că piramidele triunghiulare se mai numesc **tetraedre**, termenul *tetraedru regulat* nu se utilizează în cazul oricărei piramide triunghiulare regulate.

**Definiție**

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numește **tetraedru regulat**.

- Formulați câteva caracteristici sau proprietăți ale tetraedrului regulat.

*Exemplu*

Fetele tetraedrului regulat sunt triunghiuri echilaterale congruente.

**2 Cum reprezentăm corect o piramidă?**

- ① Construim cu rigla și creionul baza piramidei (fig. 16).
- ② Construim vârful piramidei. În cazul piramidei regulate, găsim centrul bazei, apoi, pe verticala construită din acest punct, marcăm vârful piramidei.
- ③ Unim vârful piramidei cu vârfurile bazei.
- ④ „Întreparam” muchiile care nu se văd în spațiu și ștergem liniile auxiliare.

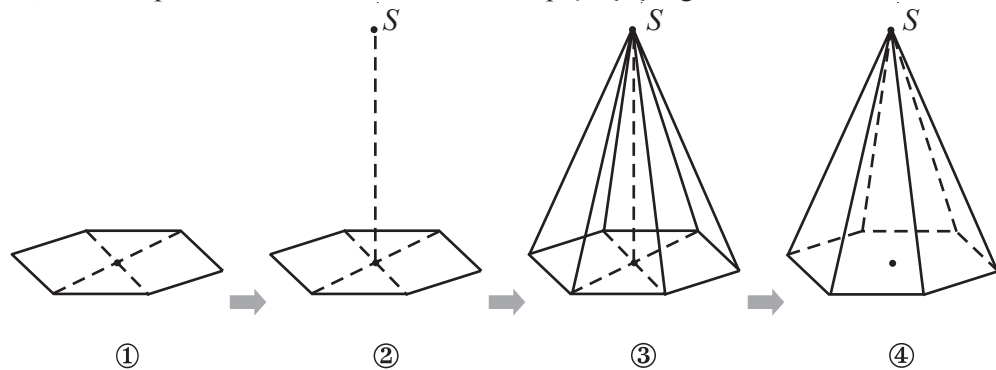


Fig. 16

**3.2. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei**

**3** a) În figura 17 este reprezentată piramida regulată  $SABCD$ .

Construiți schematic desfășurarea ei.

b) Determinați aria laterală a piramidei  $SABCD$ , dacă latura bazei este  $a$ , iar apotema piramidei este  $l$ .

*Rezolvare:*

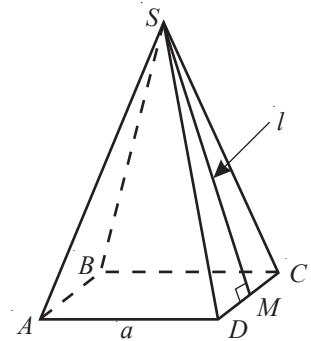


Fig. 17

a) În figura 18 este reprezentată desfășurarea piramidei  $SABCD$ .

Evident, triunghiurile  $AS_1B$ ,  $BS_2C$ ,  $CS_3D$ ,  $DS_4A$  sunt triunghiuri isoscele și congruente între ele.

b) Aria laterală ( $\mathcal{A}_l$ ) a piramidei este egală cu suma ariilor triunghiurilor isoscele din figura 18.

$$\mathcal{A}_{AS_1B} = \frac{1}{2} a \cdot l.$$

$$\text{Deci, } \mathcal{A}_l = 4 \cdot \frac{1}{2} al = 2al.$$

*Răspuns:*  $\mathcal{A}_l = 2al$ .

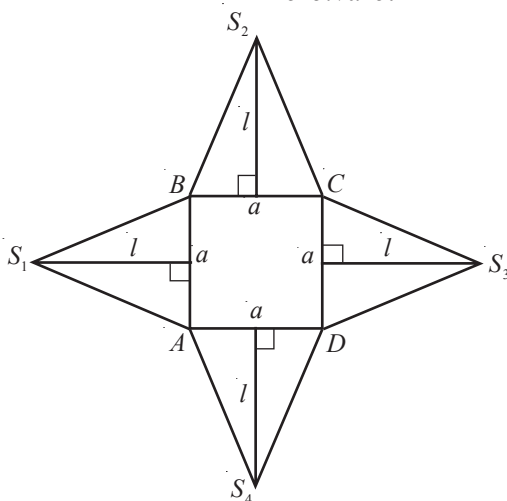


Fig. 18

**Observație**

Deoarece  $P = 4a$  este egal cu perimetrul bazei piramidei, răspunsul problemei poate fi scris și astfel:  $\mathcal{A}_l = \frac{1}{2} P \cdot l$ , unde  $P$  este perimetrul bazei piramidei.

Reuniunea fețelor laterale ale piramidei se numește **suprafață laterală a piramidei**. Aria suprafeței laterale a piramidei se numește **arie laterală** a piramidei. **Aria totală** a piramidei este suma dintre aria laterală și aria bazei.

**Teorema 10**

Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu semiprodusul dintre perimetrul bazei și apotema piramidei (fig. 19).

$$\mathcal{A}_l = \frac{1}{2} P \cdot l,$$

unde  $P$  este perimetrul bazei.

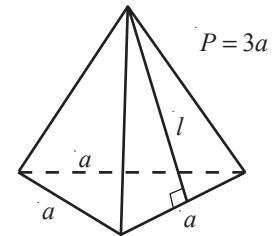


Fig. 19

**Aplicăm**

• **Rezolvarea problemei 1**:

Pentru a afla suprafața acoperișului, trebuie să calculăm aria laterală a unei piramide patrulater regulate  $SABCD$  cu latura bazei de 10 m și muchia laterală de 13 m (fig. 20).

Fie  $[SM]$  apotema piramidei.

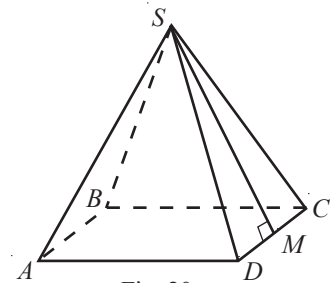


Fig. 20

$SM = \sqrt{SD^2 - DM^2}$ , —————> deoarece  $\triangle SMD$  este dreptunghic în  $M$ .

$SM = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$  (m).

$\mathcal{A}_l = \frac{1}{2} P \cdot SM$ , —————>  $P$  este perimetrul bazei.

$\mathcal{A}_l = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 12 = 240$  (m<sup>2</sup>). —————> perimetrul bazei este egal cu 40 m.

$240 : 10 = 24$  (cutii).

Răspuns: 24 de cutii cu vopsea.



**Lucrați în perechi!**

- Reprezentați un tetraedru regulat.
- Desenați desfășurarea acestui tetraedru, știind că muchia lui este de 8 cm.
- Aflați lungimea apotemei tetraedrului.
- Calculați aria suprafeței totale a tetraedrului.

**4** Care este volumul piramidei examinate în problema **1**?

Pentru a afla răspunsul, vom examina mai întâi următoarea teoremă:

**Teorema 11**

Volumul piramidei este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei și înălțimea piramidei:  $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h$ .

**Aplicăm**

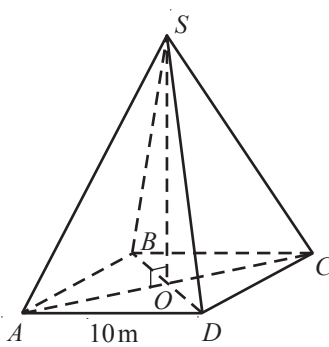


Fig. 21

• Rezolvarea problemei 4:

Aflăm volumul piramidei patrulatere regulate  $SABCD$  (fig. 21) cu latura bazei de 10 m și muchia de 13 m.

① Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor bazei  $ABCD$ . Atunci  $[SO]$  este înălțimea piramidei  $SABCD$

→ deoarece  $SABCD$  este o piramidă regulată.

②  $AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$  (m)

→ deoarece diagonala pătratului cu latura  $a$  este egală cu  $a\sqrt{2}$ .

③  $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$  (m)

→ deoarece  $[SO]$  este o catetă a triunghiului dreptunghic  $SOA$ .

④  $V_{pir.} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119} = \frac{100\sqrt{119}}{3}$  (m<sup>3</sup>)

→ conform teoremei 11.

Răspuns:  $\frac{100\sqrt{119}}{3}$  m<sup>3</sup>.

**3.3. Trunchiul de piramidă**

Un plan care este paralel cu planul bazei piramidei și intersectează piramida, o împarte în două poliedre – un **trunchi de piramidă** și o piramidă mai mică.

Fețele paralele ale trunchiului de piramidă se numesc **baze**.

Orice segment cu extremitățile aparținând bazelor trunchiului de piramidă și perpendicular pe ele se numește **înălțime a trunchiului de piramidă**. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

Bazele trunchiului de piramidă sunt poligoane asemenea. Fețele laterale sunt trapeze.

De regulă, notând trunchiul de piramidă, scriem la început literele bazei mari, apoi literele bazei mici.

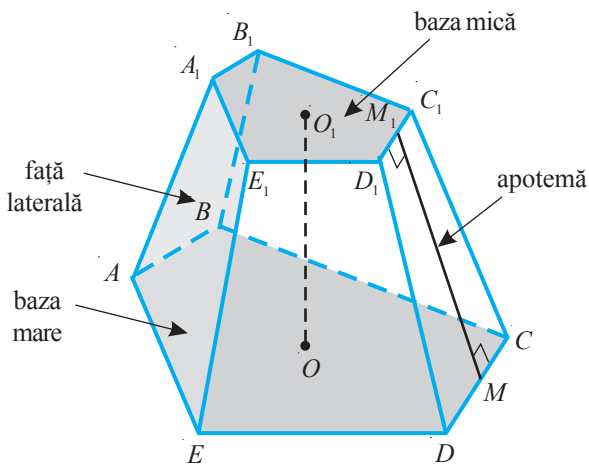


Fig. 22

De exemplu, trunchiul de piramidă din figura 22 poate fi notat  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ .

Poligonul  $ABCDE$  este baza mare, poligonul  $A_1B_1C_1D_1E_1$  – baza mică, iar  $AA_1E_1E$  – o față laterală.

Dacă  $[OO_1]$  este perpendicular pe baze, atunci  $[OO_1]$  este o înălțime a trunchiului de piramidă.

**Trunchiul de piramidă regulată** are bazele poligoane regulate. Fețele lui laterale sunt trapeze congruente.

Înălțimile fețelor laterale ale unui trunchi de piramidă regulată se numesc **apotemele** trunchiului de piramidă. De exemplu,  $[MM_1]$  este o apotemă a acestui trunchi de piramidă (fig. 22).

Trunchiurile de piramidă se clasifică după poligoanele bazelor: *trunchiuri de piramide triunghiulare, patrulatere, pentagonale, hexagonale, heptagonale etc.*

Trunchiul de piramidă este desfășurabil.

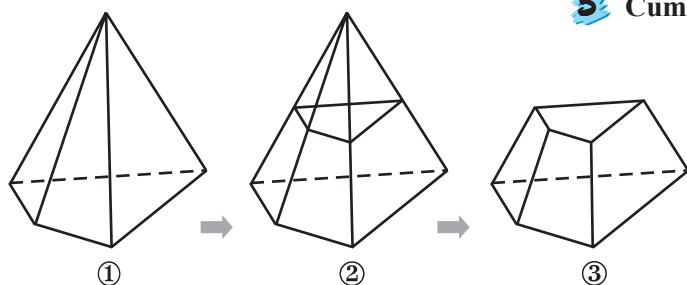



Fig. 23

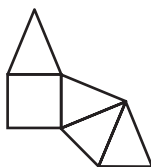
### 5 Cum reprezentăm corect un trunchi de piramidă?

- ① Construim cu rigla și creionul o piramidă (fig. 23).
- ② Marcăm pe o muchie laterală un punct și din acel punct construim un poligon cu laturile paralele cu laturile bazei piramidei.
- ③ Cu guma ștergem muchiile laterale ale piramidei mai mici.

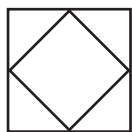
## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele

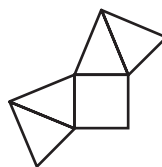
1. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este egală cu  $9\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflați aria laterală a piramidei.
2. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare regulate este de  $18\sqrt{3}$  cm, înălțimea – de 4 cm, iar apotema piramidei – de 5 cm. Determinați aria laterală, aria totală și volumul piramidei.
3. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este de  $3\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>, înălțimea ei – de 1 cm, iar apotema piramidei – de 2 cm. Aflați aria laterală a piramidei.
4. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este de  $36\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, apotema ei – de 4 cm, iar înălțimea piramidei – de 2 cm. Determinați aria totală și volumul piramidei.
5. Calculați aria totală a unei piramide triunghiulare regulate cu apotema de 4 cm și aria bazei de  $27\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.
6.  **Lucrați în perechi!** Care dintre următoarele figuri nu reprezintă desfășurarea unei piramide?



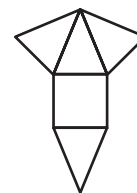
a)



b)

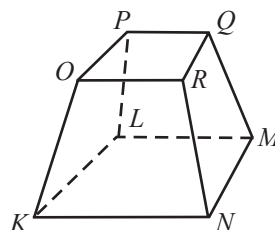


c)

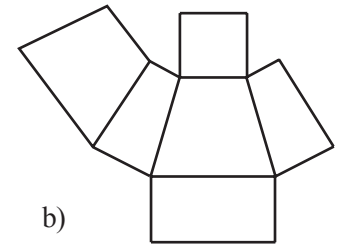
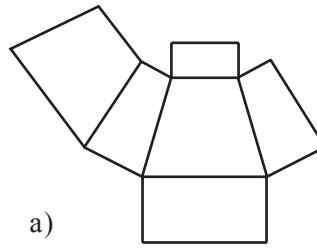



d)

7. Apotema unei piramide patrulater regulate este de 3 cm, înălțimea ei – de  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  cm, iar aria laterală – de 18 cm<sup>2</sup>. Aflați volumul piramidei.
8. Determinați aria laterală și volumul unei piramide patrulater regulate cu latura bazei de 6 cm, apotema de 5 cm și înălțimea de 4 cm.
9. Înălțimea unei piramide patrulater regulate este de 12 cm, perimetrul bazei piramidei – de 40 cm, iar apotema ei – de 13 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.
10. Aflați aria totală și volumul unei piramide patrulater regulate cu aria bazei de 36 cm<sup>2</sup>, apotema de 6 cm și înălțimea de  $3\sqrt{3}$  cm.
11. Latura bazei unei piramide patrulater regulate este de 8 cm, apotema ei – de 5 cm, iar înălțimea – de 3 cm. Determinați aria laterală, aria totală și volumul piramidei.
12. Aflați aria totală și volumul unei piramide hexagonale regulate cu latura bazei de 4 cm, înălțimea de 2 cm și apotema de 4 cm.
13. Reprezentați un trunchi de piramidă:
  - a) triunghiulară; b) patrulateră; c) pentagonală.
14. În figură este reprezentat un trunchi de piramidă. Identificați:
  - a) bazele;
  - b) fețele laterale;
  - c) muchiile laterale.




15. Luând în considerare proprietățile ce țin de bazele și fețele laterale ale unui trunchi de piramidă, stabiliți care dintre reprezentări poate fi desfășurarea unui trunchi de piramidă patrulateră.
16. Ilustrați desfășurarea unui trunchi de piramidă:
- triunghiulară regulată;
  - patrulateră cu bazele paralelograme;
  - patrulateră cu bazele trapeze.

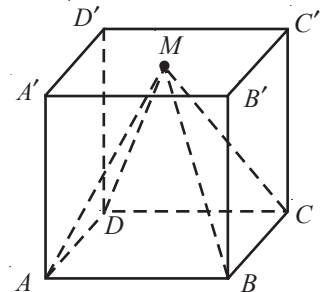
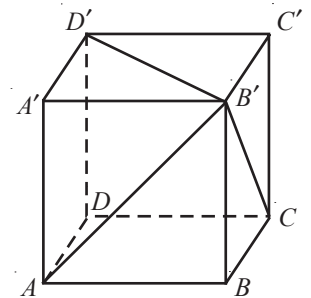


17.  **Investigați!** Un poliedru are (numai) două fețe paralele, cealaltă fiind trapeze. Decideți dacă poliedrul este trunchi de piramidă, știind că cele două fețe paralele sunt:
- triunghiuri asemenea;
  - triunghiuri echilaterale;
  - pătrate;
  - poligoane regulate cu același număr de laturi.

### Formăm capacitățile și aplicăm


18. Fie o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei  $a$ , apotema  $l$ , perimetrul bazei  $\mathcal{P}$ , aria laterală  $\mathcal{A}_l$  și aria totală  $\mathcal{A}_t$ . Aflați:
- $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{A}_l$  și  $\mathcal{A}_t$ , dacă  $a = 6$  m,  $l = 12$  m;
  - $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{A}_l$  și  $l$  dacă  $a = 13$  m,  $\mathcal{A}_l = 689$  m<sup>2</sup>;
  - $a$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{A}_l$ , dacă  $l = 16$  m,  $\mathcal{A}_l = 288$  m<sup>2</sup>;
  - $a$ ,  $l$ ,  $\mathcal{A}_l$ , dacă  $\mathcal{P} = 44$  m,  $\mathcal{A}_l = 396$  m<sup>2</sup>;
  - $a$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $l$ , dacă  $\mathcal{A}_l = 352$  m<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_t = 416$  m<sup>2</sup>.
19. Aria bazei unei piramide hexagonale regulate este egală cu  $48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflați aria laterală a piramidei.
20. Piramida lui Kheops a avut inițial înălțimea de 147,5 m și latura pătratului bazei de 232 m. Raportul dintre lungimea apotemei  $VM$  și segmentul  $OM$ , unde  $V$  este vârful piramidei, iar  $O$  – centrul bazei, este un număr renumit, utilizat în arhitectură încă din Antichitate. Aflați acest raport și comparați-l cu  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

21.  **Lucrați în perechi!** Lungimea muchiei cubului din imagine este de  $4\sqrt{3}$  cm. Determinați volumul tetraedrului  $AA'D'B'$  ( $A'D'B'$  este baza tetraedrului).
22. Volumul unei piramide hexagonale regulate este egal cu  $48\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>, înălțimea piramidei – cu 3 cm, iar apotema este congruentă cu latura bazei. Determinați aria totală a piramidei.
23. Aria laterală a unei piramide hexagonale regulate este egală cu 192 cm<sup>2</sup>, înălțimea ei – cu 4 cm, iar apotema piramidei este congruentă cu latura bazei. Determinați volumul piramidei.
24. Lungimea muchiei cubului din imagine este de 16 cm. Vârful  $M$  al piramidei  $MABCD$  este centrul feței  $A'B'C'D'$  a cubului. Aflați raportul dintre aria laterală și aria bazei piramidei.
25. Latura bazei unei piramide hexagonale regulate este congruentă cu înălțimea piramidei. Determinați aria laterală și volumul piramidei, dacă înălțimea piramidei este de 10 cm, iar apotema ei – de  $5\sqrt{7}$  cm.



### Dezvoltăm capacitățile și creăm

26. Înălțimea unei piramide patrulateră regulate este de 8 cm, iar lungimea laturii bazei – de 12 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.
27. Fie  $ABCD$  un tetraedru regulat,  $AB = 4$  cm și  $G_1, G_2, G_3$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $DBC, DAC$ , respectiv  $DAB$ .
- Aflați aria totală și volumul tetraedrului.
  - Aflați raportul dintre aria triunghiului  $G_1G_2G_3$  și aria triunghiului  $ABC$ .

28. Înălțimea unui tetraedru regulat este de 8 cm. Aflați volumul tetraedrului.
29. Ana a cumpărat lapte în 2 pachete de forma unei piramide patrulateră regulate cu latura bazei de 10 cm și înălțimea de 9 cm, iar Mihai – într-un pachet de forma unei prisme patrulateră regulate cu latura bazei de 5 cm și înălțimea de 25 cm. Determinați cine a cumpărat o cantitate mai mare de lapte.
30. (\*EG, 2020) Într-o piramidă patrulateră regulată cu volumul de  $36 \text{ cm}^3$ , înălțimea este de 2 ori mai mică decât muchia bazei. Determinați lungimea muchiei bazei.
- 
31.  **Lucrați individual! Proiect.** Poliedre în casa mea.

## Exerciții și probleme recapitulative

### ■ Fixăm cunoștințele


- Aflați suma măsurilor unghiurilor poligoanelor care formează fețele unei piramide:
  - triunghiulare;
  - patrulateră;
  - pentagonale.
- Determinați înălțimea unui tetraedru regulat cu muchia de 10 cm.
- Aflați volumul unui tetraedru regulat cu muchia de 8 cm.
- Un paralelipiped dreptunghic are următoarele dimensiuni: 7 cm, 4 cm și 8 cm. Determinați aria totală și volumul paralelipipedului.
- Volumul unui cub este de  $216 \text{ cm}^3$ . Aflați aria totală a cubului.
- O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei de 4 cm și înălțimea de 8 cm. Determinați aria laterală și volumul ei.
- O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 2 cm, iar fețele laterale sunt pătrate. Aflați aria laterală și volumul prisme.
- Fie  $ABCDEF$  o prismă dreaptă cu baza  $ABC$  triunghi dreptunghic. Înălțimea prisme este congruentă cu ipotenuza  $AC$  a bazei și  $AB = 12 \text{ cm}$ ,  $BC = 9 \text{ cm}$ . Determinați:
  - aria totală și volumul prisme;
  - aria triunghiului  $EBM$ , unde  $M$  este mijlocul muchiei  $AC$ .

### 9. Investigați!

- Câte diagonale are un trunchi de piramidă:
- pentagonală;
  - ale cărui baze sunt poligoane cu  $n$  laturi?
10. Fie  $ABCA'B'C'$  o prismă triunghiulară regulată. Știind că distanța dintre centrele a două fețe laterale este de 4 cm și aria laterală – de  $96\sqrt{3} \text{ cm}^2$ , aflați:
  - înălțimea prisme;
  - volumul prisme.
11. Toate muchiile prisme regulate  $ABCA'B'C'$  sunt de 3 cm. Determinați lungimea segmentului  $AD$ , unde  $D$  este mijlocul muchiei  $B'C'$ .
12. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei de 15 cm și 5 cm, iar aria lui laterală este de două ori mai mare decât aria bazei. Aflați înălțimea și volumul paralelipipedului.
13. Fie un cub cu diagonala de 3 cm. Unind centrul cubului cu vârfurile lui, se obțin 6 piramide congruente. Ce volum are fiecare piramidă?
14. Fie  $ABCA'B'C'$  o prismă triunghiulară. Triunghiul  $ABC$  are două laturi de 17 cm și 24 cm, iar măsura unghiului format de ele este de  $30^\circ$ . Știind că înălțimea prisme este de 12 cm, aflați volumul ei.

### ■ Formăm capacitățile și aplicăm

- Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 24 cm, lungimea diagonalei – cu 18 cm. Determinați aria totală a paralelipipedului.
- Fie cubul  $ABCA'B'C'D'$ ,  $M$  – mijlocul lui  $[A'D']$ , iar  $P$  – mijlocul lui  $[AB]$ . Știind că  $MP = 4\sqrt{3} \text{ cm}$ , aflați lungimea muchiei și volumul cubului.
- Suma muchiilor concurente într-un singur vârf al unui paralelipiped dreptunghic este de 15 cm, iar diagonala lui – de  $\sqrt{77} \text{ cm}$ . Determinați aria totală a paralelipipedului.
- Volumul unei prisme patrulateră regulate este de  $175 \text{ cm}^3$ , iar înălțimea ei – de 7 cm. Determinați lungimea diagonalei și aria totală a prisme.

19. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 6 cm și înălțimea de 8 cm. Determinați lungimea diagonalelor prisme, aria totală și volumul ei.
20.  **Lucrați în perechi!** Fie paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  cu  $AB = 12$  cm,  $BC = 35$  cm. Aria secțiunii determinate de muchiile  $AA'$  și  $CC'$  este egală cu  $370$  cm<sup>2</sup>. Determinați aria laterală și volumul paralelipipedului.

### Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. O suprafață de forma unui triunghi echilateral cu înălțimea de  $4\sqrt{3}$  cm reprezintă desfășurarea unui tetraedru. Determinați aria totală și volumul tetraedrului.
22. Fie piramida triunghiulară regulată  $VABC$  cu baza  $ABC$  și  $AB = 12\sqrt{2}$  cm,  $AV = 12$  cm.  
a) Aflați înălțimea triunghiului  $ABC$ .  
b) Determinați înălțimea piramidei.  
c) Aflați volumul piramidei.
- 23\*. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată provine dintr-o piramidă cu înălțimea de 12 cm și latura bazei de 8 cm. Determinați lungimea muchiei laterale a trunchiului, știind că el are înălțimea de 4 cm.
24. Aria totală a unui tetraedru regulat este egală cu  $6\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. Aflați volumul tetraedrului.

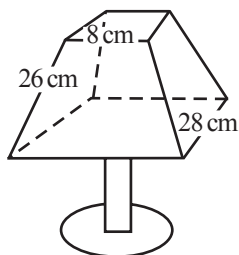
## Test sumativ



Timp efectiv de lucru:  
45 de minute

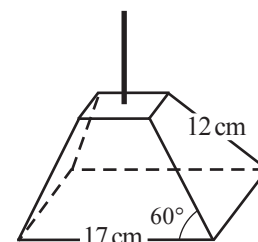
### Varianta I

1. Un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 10 cm și 15 cm și înălțimea de 20 cm este plin cu apă.  
a) Reprezentați desfășurarea paralelipipedului la scara 1: 5.  
b) Aflați aria laterală a paralelipipedului.  
c) Câți litri de apă sunt în vas?  
d) Apa din vas se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălțime s-a ridicat apa în vasul cubic?  
e) Aflați raportul dintre capacitatea vasului cubic și a celui paralelipipedic.
2. Un corp metalic are forma unui tetraedru regulat.  
a) Aflați lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 54 cm.  
b) Reprezentați desfășurarea tetraedrului.  
c) Aflați suprafața totală a corpului.  
d) Care este înălțimea tetraedrului?  
e) Corpul a fost topit, iar din metalul obținut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 3 cm. Câte piese au fost confecționate?
3. Abajurul unei lămpi de masă de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (a se vedea desenul) se confecționează din pânză. Va ajunge oare o bucată de pânză de forma unui pătrat cu latura de 50 cm?



### Varianta II

1. O vază de forma unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 12 cm și înălțimea de 30 cm este pe jumătate plină cu apă.  
a) Reprezentați desfășurarea prisme la scara 1: 3.  
b) Aflați aria laterală a prisme.  
c) Câți litri de apă sunt în vază?  
d) Apa din vază se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălțime s-a ridicat apa în vasul cubic?  
e) Aflați raportul dintre capacitatea vasului cubic și a vasei.
2. Un corp metalic are forma unui tetraedru regulat.  
a) Aflați lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 72 cm.  
b) Reprezentați desfășurarea tetraedrului.  
c) Aflați suprafața totală a corpului.  
d) Care este înălțimea tetraedrului?  
e) Corpul a fost topit, iar din metalul obținut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 6 cm. Câte piese au fost confecționate?
3. O lustră de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (a se vedea desenul) se confecționează din sticlă. Va ajunge oare o bucată de sticlă de forma unui pătrat cu latura de 30 cm?



*Geometria atrage sufletul spre adevăr și creează spiritul filosofiei.*

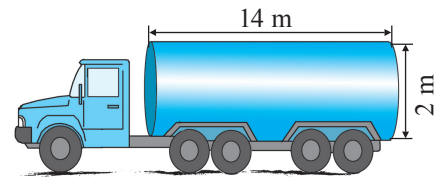
Platon

În practică, în afară de poliedre, se întâlnesc corpuri mărginite total sau parțial de suprafețe neplane: sfera, cilindrul, conul etc., numite **corpuri rotunde**. Ca și în cazul poliedrelor, acestea au un șir de proprietăți interesante. De exemplu, dintre toate corpurile geometrice cu aceeași suprafață totală, sfera are volumul maxim.

Deoarece suprafețele corpurilor rotunde se obțin (după cum veți vedea) prin rotații complete ale unor figuri geometrice în jurul unei drepte, corpurile în cauză se mai numesc **corpuri de rotație**.

## § 1. Cilindrul (circular drept)

**1** Administrația unei benzinării a hotărât să vopsească cele 10 cisterne (de formă cilindrică) ale autocamioanelor. Fiecare cisternă are lungimea de 14 m și diametrul bazei de 2 m. Câte cutii de vopsea sunt necesare, dacă o cutie ajunge pentru o suprafață de  $15 \text{ m}^2$ ?



### 1.1. Elementele cilindrului

#### Definiție

- ◆ Corpul geometric format din două discuri congruente, situate în plane paralele, și din toate segmentele cu extremitățile aparținând acestor discuri se numește **cilindru circular** (fig. 1).
- ◆ Cele două discuri ale cilindrului circular se numesc **baze ale cilindrului**.

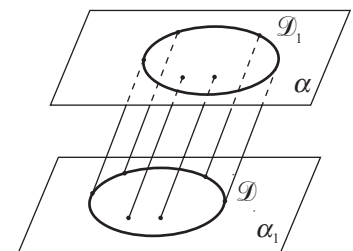


Fig. 1

Orice segment cu extremitățile în planele bazelor cilindrului, perpendicular pe ele, se numește **înălțime** a cilindrului. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

De exemplu, în figura 2 este reprezentat un cilindru cu bazele  $\mathcal{D}(O, OM)$  și  $\mathcal{D}_1(O_1, O_1M_1)$ .

Fie  $\mathcal{C}$  și  $\mathcal{C}_1$  cercurile care mărginesc discurile  $\mathcal{D}$  și  $\mathcal{D}_1$ .

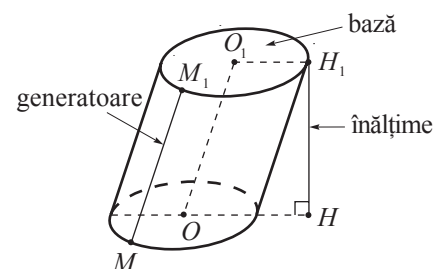


Fig. 2

Segmentele paralele cu dreapta  $OO_1$ , ale cărei extremități aparțin cercurilor  $\mathcal{C}$  și  $\mathcal{C}_1$ , se numesc **generatoare ale cilindrului**.

Astfel, în figura 2, segmentul  $MM_1$  este o generatoare a cilindrului.

Mulțimea tuturor generatoarelor cilindrului se numește **suprafața laterală** a cilindrului, iar mulțimea punctelor lui, care nu aparțin bazelor și nici suprafeței laterale, se numește **interiorul cilindrului**.

Dacă generatoarele unui cilindru circular sunt perpendiculare pe planele bazelor, atunci cilindrul se numește **cilindru circular drept** (fig. 3 a)), în caz contrar – **cilindru circular oblic** (fig. 3 b)).

Observăm că generatoarele cilindrului circular drept sunt înălțimi ale acestuia.

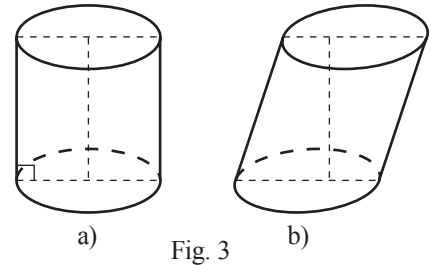


Fig. 3

### Observații

- În clasa a IX-a vom cerceta numai cilindrul circular drept, pe care îl vom numi, pe scurt, **cilindru**.
- În practică, mai frecvent se întâlnesc probleme ce țin de suprafața cilindrului. De aceea, pentru a scurta exprimarea, prin cilindru uneori vom înțelege numai suprafața sa.

- 2** Descrieți ce obțineți la rotația completă a dreptunghiului  $ABCD$  în jurul dreptei  $AB$ .

*Rezolvare:*

La rotația completă a dreptunghiului  $ABCD$  în jurul dreptei  $AB$  se obține un cilindru cu înălțimea  $AB$  și raza bazei  $AD$  (fig. 4).

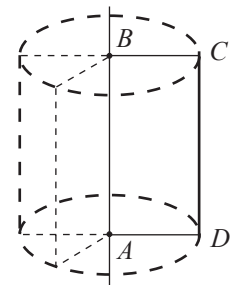


Fig. 4

## 1.2. Desfășurarea cilindrului. Secțiuni

- 1** Desfășurați un cilindru și examinați ce obțineți.

*Rezolvare:*

Tăind suprafața laterală a cilindrului după o generatoare, obținem o suprafață dreptunghiulară (fig. 5). Dimensiunile acestui dreptunghi sunt egale cu lungimea cercurilor bazelor și lungimea generatoarelor cilindrului. Prin urmare, desfășurarea cilindrului constă din două discuri de raze egale și o suprafață dreptunghiulară, având o dimensiune egală cu lungimea unuia dintre aceste discuri, iar alta – cu lungimea generatoarei lui.

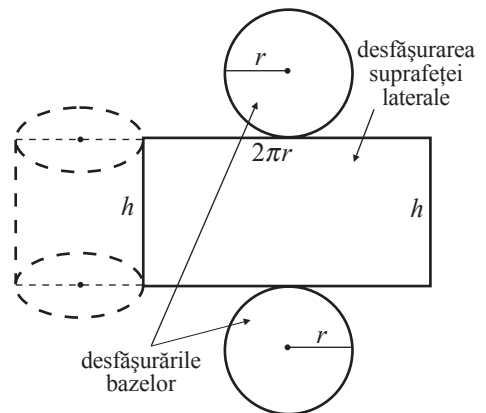


Fig. 5



Confecționați din carton un cilindru circular drept cu înălțimea de 15 cm și raza bazei de 5 cm.

**2** Descrieți ce obțineți intersectând cilindrul cu un plan ce conține centrele bazelor cilindrului.

*Rezolvare:*

Fie  $O_1$  și  $O_2$  centrele bazelor cilindrului. Intersecția cilindrului cu un plan ce conține dreapta  $O_1O_2$  este o suprafață dreptunghiulară  $ABCD$  cu dimensiunile egale cu înălțimea cilindrului și diametrul bazelor (fig. 6).

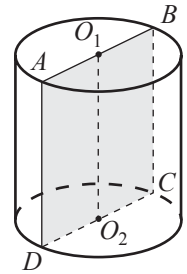


Fig. 6

**Observație**

Suprafața dreptunghiulară  $ABCD$  se numește **secțiune axială** a cilindrului, iar dreapta  $O_1O_2$  – **axa de simetrie** a cilindrului.

**Aplicăm**

• Un cilindru circular drept cu raza bazei de 10 cm și generatoarea de 16 cm este secționat paralel cu axa de simetrie a cilindrului (fig. 7). La ce distanță de la această dreaptă se află secțiunea, dacă aria ei este de  $192 \text{ cm}^2$ ?

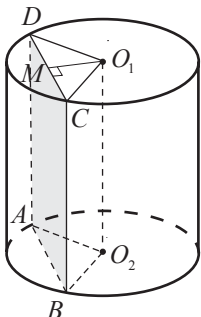


Fig. 7

*Rezolvare:*

Secțiunea dată este o suprafață dreptunghiulară  $ABCD$ , având o dimensiune egală cu lungimea generatoarei cilindrului.

$$\text{Deci, } \mathcal{A}_{ABCD} = AD \cdot DC \Rightarrow DC = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{AD} = \frac{192}{16} = 12 \text{ (cm)}.$$

Fie  $O_1M$  înălțimea triunghiului isoscel  $DO_1C$  cu  $DO_1 = O_1C = 10 \text{ cm}$ .

$O_1M$  este distanța de la axa  $O_1O_2$  până la secțiune.

$$\text{Astfel, } O_1M = \sqrt{DO_1^2 - \left(\frac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ (cm)}.$$

*Răspuns:* 8 cm.

**1.3. Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului**

**1** Fie  $r$  raza bazei unui cilindru, iar  $h$  lungimea generatoarei (înălțimea) lui. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

*Rezolvare:*

Deoarece desfășurarea suprafeței laterale a cilindrului este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile  $2\pi r$  (lungimea bazei) și  $h$ , rezultă că aria ei este  $\mathcal{A}_l = 2\pi r h$ .

⇒ Aria suprafeței laterale a cilindrului se numește **aria laterală** a cilindrului și se notează cu  $\mathcal{A}_l$ .

Fiindcă aria unei baze este  $\mathcal{A}_b = \pi r^2$ , rezultă că aria totală a cilindrului este

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r).$$

**2** Calculați volumul:

- a) unei prisme patrulatere regulate drepte de înălțime  $h$  și latura bazei  $a$ ;
- b) unui cilindru de înălțime  $h$  și raza bazelor  $r$ .

*Rezolvare:*

a) Volumul unei prisme este egal cu  $\mathcal{A}_b \cdot h$ , unde  $\mathcal{A}_b$  este aria bazei, iar  $h$  – înălțimea ei. Prin urmare,  $V = a^2 \cdot h$ .

b) Considerând o prismă dreaptă cu bazele poligoane regulate cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un cilindru (fig. 8).

Prin urmare, ca și la prisme, putem considera volumul cilindrului egal cu  $\mathcal{A}_b \cdot h$ . Deci,  $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h$ .

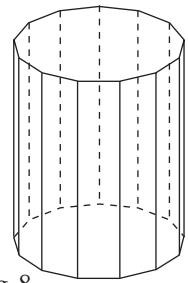


Fig. 8

Are loc

**Teorema 1**

Pentru orice cilindru circular drept,  $\mathcal{A}_l = 2\pi rh$ ,  
 $\mathcal{A}_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$ ,  
 $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h$ ,

unde  $r, h, \mathcal{A}_l, \mathcal{A}_b, \mathcal{A}_t, \mathcal{V}$  sunt raza bazei, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală și volumul cilindrului.

- **Rezolvarea problemei 1** (de la începutul paragrafului):

Fie  $S$  suprafața unei cisterne,  $S_t$  suprafața tuturor cisternelor.

Atunci  $S = 2\pi r(h + r)$ , unde  $h = 14$  m,  $r = 1$  m.

$$S \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot (14 + 1) = 94,2 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$S_t = 10 \cdot S = 10 \cdot 94,2 = 942 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Deoarece  $942 : 15 = 62,8$  și  $62 < 62,8 < 63$ , rezultă că sunt necesare 63 de cutii cu vopsea.

Răspuns: 63 de cutii.

**Exerciții și probleme**

**Fixăm cunoștințele**

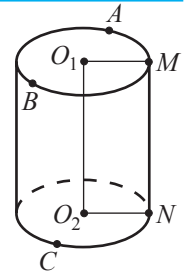
1. Reprezentați un cilindru: a) circular drept; b) circular oblic.

Numiți elementele lui.

2. **Investigați!** În desen este reprezentat un cilindru circular drept de baze  $\mathcal{C}(O_1, r), \mathcal{C}(O_2, r)$ .

Identificați printre segmentele  $AO_1, BO_1, AB, MN(MN \parallel O_1O_2), O_1O_2, CO_2, CN, O_2N$ :

- a) generatoarele;
- b) înălțimile;
- c) razele bazelor;
- d) coardele bazelor.



3. Fie o suprafață dreptunghiulară de dimensiunile  $l$  și  $L$ . Reprezintă oare aceasta desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept de bază  $\mathcal{C}(O_1, r)$  și generatoare  $g$ , dacă:

a)  $L = 0,8\pi, l = \frac{2}{5}, r = 0,4, g = 0,4$ ; b)  $L = \sqrt{12}, l = \frac{1}{3}, r = \frac{\sqrt{3}}{\pi}, g = 0,3$ ; c)  $L = 6\pi^2, l = \frac{1}{\sqrt{2}}, r = 3\pi, g = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ?

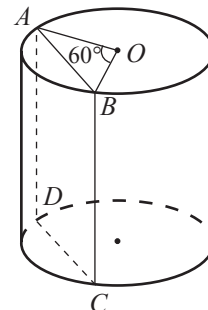
4. **Lucrați în grup!** Fie un cilindru circular drept de baze  $\mathcal{C}(O_1, r), \mathcal{C}(O_2, r)$  și generatoare  $g, h = O_1O_2$ ,  $\mathcal{A}_b, \mathcal{A}_l, \mathcal{A}_t, \mathcal{V}$  – aria bazei, aria laterală, aria totală și volumul cilindrului. Completați tabelul:

$r$	$g$	$h$	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
			$16\pi$	$24\pi$		
2,5		0,4				
		5				$125\pi$
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$					
		1			$1,5\pi$	

- Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat de arie  $S$ . Aflați suprafața totală a cilindrului și volumul lui, dacă:
  - $S = 100 \text{ cm}^2$ ;
  - $S = 4 \text{ cm}^2$ ;
  - $S = 0,64 \text{ cm}^2$ .
- Un dreptunghi cu laturile de 5 cm și 8 cm se rotește în jurul laturii mai mari. Determinați aria totală și volumul corpului de rotație obținut.
- Valoarea raportului dintre lungimile laturilor unui dreptunghi cu aria de  $48 \text{ cm}^2$  este egală cu 0,75. Aflați volumul corpului obținut la rotația dreptunghiului în jurul axei lui de simetrie. Câte soluții are problema?

**Formăm capacitățile și aplicăm**

- Dreptunghiul  $ABCD$  are  $AB = a$  și  $m(\angle CAB) = \alpha$ . El reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept. Determinați aria totală și volumul cilindrului în două variante, știind că:
  - $a = 24 \text{ cm}$  și  $\alpha = 30^\circ$ ;
  - $a = 10 \text{ cm}$  și  $\alpha = 45^\circ$ ;
  - $a = 16 \text{ cm}$  și  $\alpha = 60^\circ$ .



- Lucrați în perechi!** În desen este reprezentat un cilindru.  $[AD]$  și  $[BC]$  sunt două generatoare ale cilindrului. Aflați aria laterală a cilindrului, dacă  $O$  este centrul unei baze, iar  $\mathcal{A}_{ABCD} = 20 \text{ cm}^2$ .

- Înălțimea cilindrului circular drept este  $h$ , iar raza bazei lui  $-r$ . Aflați aria secțiunii duse paralel cu axa cilindrului la distanța  $d$  de la ea, dacă:
  - $r = 5 \text{ cm}$ ,  $h = 10 \text{ cm}$ ,  $d = 4 \text{ cm}$ ;
  - $r = \sqrt{17} \text{ cm}$ ,  $h = 4 \text{ cm}$ ,  $d = 4 \text{ cm}$ ;
  - $r = x$ ,  $h = 2x$ ,  $d = 0,5x$ .
- Aflați volumul unei pietre, dacă la scufundarea acesteia într-un vas cilindric de rază  $r$  nivelul apei crește cu  $x$ :
  - $r = 8 \text{ cm}$ ,  $x = 3 \text{ cm}$ ;
  - $r = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $x = 2\sqrt{2} \text{ cm}$ .

- Lucrați în perechi!** Aflați masa unei țevi de lungime  $l$ , cu grosimea  $x$  și diametrul interior  $H$ , dacă densitatea materialului este  $\rho$ :
  - $l = 3 \text{ m}$ ,  $x = 5 \text{ cm}$ ,  $H = 10 \text{ cm}$ ,  $\rho = 10 \text{ g/cm}^3$ ;
  - $l = 4\sqrt{2} \text{ m}$ ,  $x = \sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $H = 9\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $\rho = \frac{12}{\sqrt{2}} \text{ g/cm}^3$ .

- Înălțimea unui cilindru circular drept este de 8 cm, iar volumul lui  $-$  de  $72\pi \text{ cm}^3$ . Determinați aria totală a cilindrului.

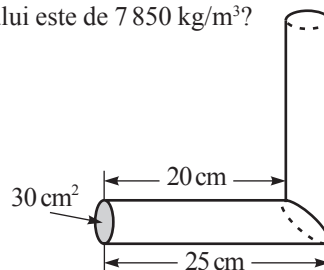
- Investigați!** Care cratiță are capacitatea mai mare, dacă prima este îngustă și înaltă, iar a doua  $-$  de două ori mai largă și de două ori mai joasă decât prima?

- Raza bazei cilindrului este de 5 cm, aria suprafeței laterale este de 3 ori mai mare decât aria unei baze. Aflați aria totală și volumul cilindrului.
- Valoarea raportului dintre înălțimea unui cilindru și raza bazei lui este egală cu 1,6. Determinați aria totală și volumul cilindrului, dacă se știe că aria suprafeței laterale a acestuia este egală cu  $80\pi \text{ cm}^2$ .
- Înălțimea cilindrului este de 8 cm, raza bazei lui  $-$  de 5 cm. La ce distanță de la axă, paralel cu ea, trebuie secționat cilindrul, pentru ca aria secțiunii să fie de  $48 \text{ cm}^2$ ?

Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare.

- Investigați!** Cât va cântări o bară cilindrică de fier cu diametrul bazei de 10 cm și lungimea de 0,5 m, știind că densitatea fierului este de  $7850 \text{ kg/m}^3$ ?

- În desen este reprezentat un corp format din două bucăți de țevă identice. Aflați volumul corpului.



**Dezvoltăm capacitățile și creăm**

- Dintr-o bară cilindrică se execută un număr maxim de piulițe de forma unui „pătrat” (de o anumită grosime) cu latura de 12 cm, cu pierdere minimă de material. În fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 6 cm. Aflați diametrul barei și câte procente din volumul barei se pierde prin prelucrare.
- Dintr-o bară cilindrică cu diametrul de 14 cm se confecționează piulițe hexagonale regulate cu grosimea de 4 cm. Care este numărul maxim de piulițe ce pot fi executate din bara de 89 cm și câte procente din volumul barei se pierde, dacă în fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 8 mm?
- De câte ori trebuie mărită înălțimea unui cilindru circular drept, fără a schimba baza lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori? Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare.
- De câte ori trebuie mărită raza bazei unui cilindru circular drept, fără a schimba înălțimea lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori?

## §2. Conul (circular drept). Trunchiul de con



### Investigăm

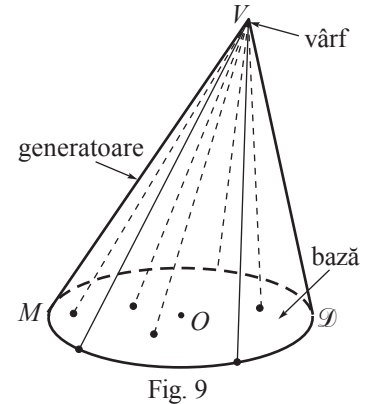
- 1 O grămadă de grâu de formă conică are înălțimea de 2,4 m, iar suprafața bazei – de  $26 \text{ m}^2$ . Aflați cantitatea de grâu din grămadă, dacă o tonă de grâu ocupă  $1,3 \text{ m}^3$ .

### 2.1. Elementele conului

#### Definiții

Fie  $\mathcal{D}$  un disc și  $V$  un punct care nu aparține planului discului.

- ◆ Corpul geometric format din toate segmentele cu o extremitate  $V$  și cealaltă aparținând discului  $\mathcal{D}$  se numește **con circular** (fig. 9).
- ◆ Discul  $\mathcal{D}$  se numește **baza** conului, iar punctul  $V$  – **vârful** conului.
- ◆ Segmentele cu o extremitate  $V$  și cealaltă aparținând cercului care mărginește baza conului se numesc **generatoare**.



De exemplu, în figura 9 este reprezentat un con cu vârful  $V$  și baza  $\mathcal{D}$ . Segmentul  $VM$  este o generatoare a acestui con.

Fie  $O$  centrul bazei conului circular (fig. 10).

Dacă dreapta  $VO$  este perpendiculară pe baza conului, atunci conul se numește **drept** (fig. 10 a)), în caz contrar, se numește **oblic** (fig. 10 b)).

Mulțimea tuturor generatoarelor conului se numește **suprafața laterală a conului**. Mulțimea punctelor conului ce nu aparțin nici suprafeței laterale, nici bazei conului se numește **interiorul conului**.

Perpendiculara coborâtă din vârful conului pe planul bazei lui se numește **înălțimea conului** (fig. 10). Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

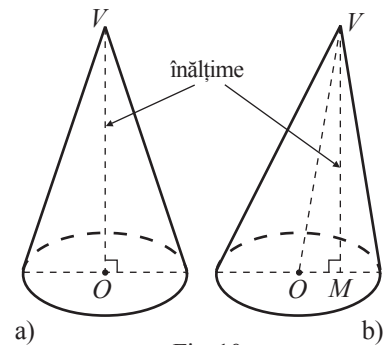


Fig. 10

#### Observații

1. Înălțimea conului circular drept coincide cu segmentul care are extremitățile în vârful conului și centrul bazei lui.
2. Deseori, pentru a scurta exprimarea, vom numi con numai suprafața sa.
3. În clasa a IX-a vom cerceta numai conul circular drept, pe care îl vom numi **con**.

- 2 Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  cu  $m(\angle ABC) = 90^\circ$ . Descrieți ce obțineți la rotația completă a triunghiului  $ABC$  în jurul dreptei  $AB$ .

*Rezolvare:*

La rotația triunghiului  $ABC$  în jurul dreptei  $AB$  se obține un con circular drept cu generatoarea  $AC$ , înălțimea  $AB$  și raza bazei  $BC$  (fig. 11).

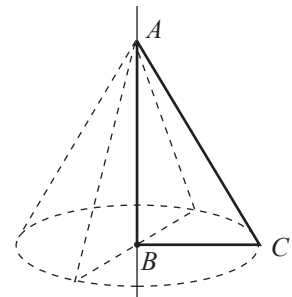



Fig. 11

## 2.2. Desfășurarea conului. Secțiuni

 Desfășurați un con și examinați ce obțineți.

*Rezolvare:*

Tăind suprafața laterală a unui con după o generatoare, obținem o suprafață de forma unui sector de cerc (fig. 12) cu raza egală cu lungimea generatoarei conului. Lungimea arcului de cerc determinat de sector este egală cu lungimea cercului de la bază.

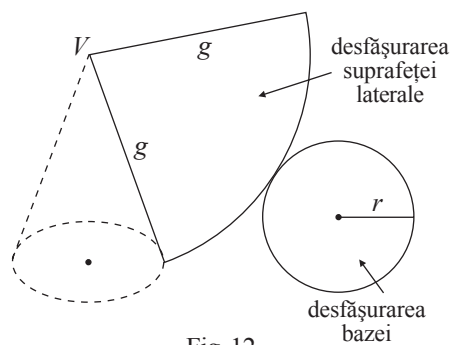


Fig. 12



**Atelier**

Confeccionați din carton un con cu generatoarea de 10 cm și raza bazei de 5 cm.

• Intersectând conul cu un plan ce conține vârful și centrul bazei conului, obținem o secțiune mărginită de un triunghi isoscel. Această secțiune se numește **secțiune axială a conului**. În figura 13 suprafața mărginită de triunghiul  $ABV$  este secțiune axială a conului.

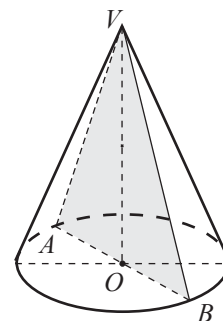



Fig. 13

### Observație

Dreapta  $VO$ , unde  $V$  este vârful, iar  $O$  – centrul bazei conului, se numește **axă de simetrie** a conului.

## 2.3. Aria laterală, aria totală și volumul conului

 Fie  $g$  generatoarea, iar  $r$  raza bazei conului.


- Aria suprafeței laterale a conului se numește **aria laterală** a conului și se notează cu  $\mathcal{A}_l$ .
- $\mathcal{A}_l = \pi gr$ .
- **Aria totală** ( $\mathcal{A}_t$ ) a conului este egală cu suma dintre aria laterală și aria bazei conului.
- $\mathcal{A}_t = \pi gr + \pi r^2 = \pi r(g + r)$ .

### Aplicăm

• Să se afle aria suprafeței corpului obținut la rotația unui pătrat cu latura  $a$  în jurul diagonalei sale.

*Rezolvare:*

Prin rotația pătratului în jurul diagonalei sale obținem un corp format din două conuri congruente cu raza bazei ( $r$ ) egală cu o jumătate din lungimea diagonalei pătratului și generatoarea ( $g$ ) congruentă cu latura pătratului (fig. 14).

Luând în considerare răspunsul problemei , obținem:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \pi gr = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi a^2.$$

Răspuns:  $\sqrt{2}\pi a^2$  u.p.

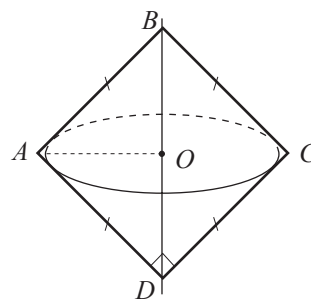


Fig. 14

**2** Aflați volumul conului cu înălțimea  $h$  și raza bazei  $r$ .

*Rezolvare:*

Considerând o piramidă regulată cu baza un poligon regulat cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un con (fig. 15). Prin urmare, ca și în cazul piramidei, volumul conului poate fi calculat după formula  $V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h$ .

Dar  $\mathcal{A}_b = \pi r^2$ . Deci,  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .

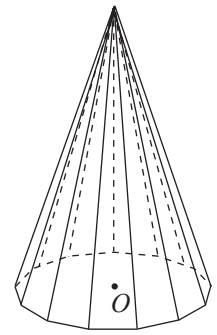


Fig. 15

**Teorema 1**

Pentru orice con circular drept,  $\mathcal{A}_l = \pi g r$ ,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r),$$

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

unde  $r, g, h, \mathcal{A}_l, \mathcal{A}_b, \mathcal{A}, V$  sunt raza bazei, generatoarea, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală și, respectiv, volumul conului.

• **Rezolvarea problemei 1** (de la începutul paragrafului):

Fie  $V$  volumul ocupat de grâu.

$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot h$ , unde  $\mathcal{A}_b$  și  $h$  sunt aria bazei și înălțimea grămezii.

Din condiția problemei,  $\mathcal{A}_b = 26 \text{ m}^2$  și  $h = 2,4 \text{ m}$ . Prin urmare,  $V = \frac{1}{3} \cdot 26 \cdot 2,4 = 20,8 \text{ (m}^3\text{)}$ .

Deci, grâul cântărește  $20,8 : 1,3 = 16 \text{ (t)}$ .

*Răspuns:* 16 tone de grâu.

**2.4. Elementele trunchiului de con**



**Investigăm**

Intersecția unui con cu un plan paralel cu baza conului este un disc. Partea conului mărginită de acest disc și de baza conului se numește **trunchi de con** (fig. 16). Ambele discuri ale trunchiului de con se numesc **baze**. Segmentele trunchiului de con conținute de generatoarele conului se numesc **generatoare** ale trunchiului de con. Mulțimea generatoarelor trunchiului de con formează **suprafața laterală** a trunchiului de con. Segmentul trunchiului de con conținut de înălțimea conului se numește **înălțimea** trunchiului de con.

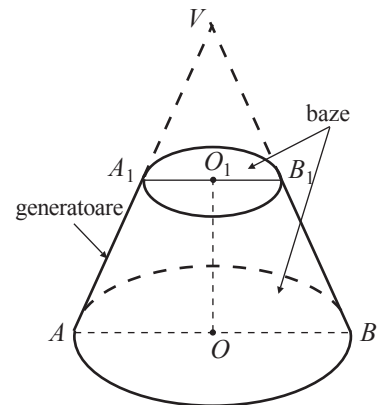


Fig. 16

Fie  $O$  și  $O_1$  centrele bazelor trunchiului de con. Segmentul  $OO_1$  este **înălțimea** trunchiului de con. Lungimea acestui segment de asemenea se numește **înălțime**.

**1** Fie  $ABCD$  un trapez dreptunghic cu  $m(\angle A) = 90^\circ$ .

Descrieți ce obțineți la rotația trapezului  $ABCD$  în jurul dreptei  $AB$ .

*Rezolvare:*

La rotația trapezului  $ABCD$  (fig. 17) în jurul dreptei  $AB$  se obține un trunchi de con circular drept. Baza mică (mare) a trapezului este congruentă cu raza bazei mici (mari) a trunchiului de con,  $CD$  este generatoarea, iar  $AB$  este înălțimea trunchiului de con.

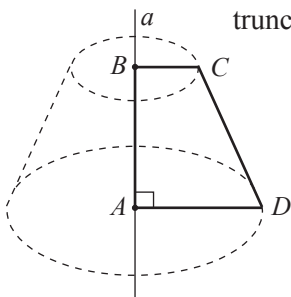


Fig. 17

### 2.5. Desfășurarea trunchiului de con. Secțiuni

**1** Desfășurați un trunchi de con și examinați ce obțineți (fig. 18).

*Rezolvare:*

Tăind suprafața laterală a unui trunchi de con după o generatoare, obținem o figură numită sector de coroană circulară.

Observăm că lungimile arcelor coroanei circulare sunt egale cu lungimile bazelor trunchiului de con.

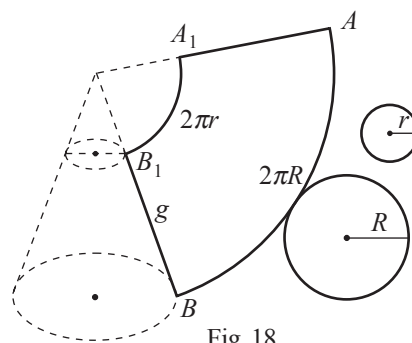


Fig. 18



#### Atelier

Confectionați din carton un trunchi de con cu razele bazelor de 2 cm și 4 cm și generatoarea de 10 cm.

Intersectând trunchiul de con cu un plan ce conține centrele bazelor trunchiului de con, obținem o secțiune care se numește **secțiune axială** a trunchiului de con.

Secțiunea axială a trunchiului de con este o suprafață mărginită de un trapez isoscel (fig. 19).

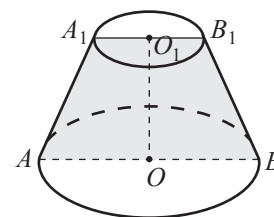


Fig. 19

#### Observație

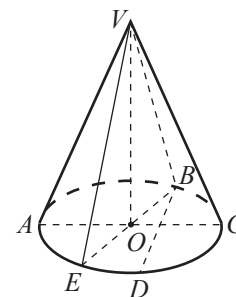
Dreapta  $OO_1$ , unde  $O$  și  $O_1$  sunt centrele bazelor trunchiului de con, se numește **axa de simetrie** a trunchiului de con.

- Descrieți ce obțineți intersectând trunchiul de con cu un plan ce nu conține centrele bazelor lui, dar este paralel cu dreapta determinată de ele.

## Exerciții și probleme

### Fixăm cunoștințele


- Reprezentați un con:
  - circular drept;
  - circular oblic.
- În desen este reprezentat un con circular drept cu centrul bazei  $O$ . Identificați:
  - generatoarele;
  - înălțimile;
  - razele bazei;
  - coardele bazei.
- Ilustrați desfășurarea unui con circular drept cu generatoarea  $g$  și raza bazei  $r$ , dacă:
  - $g = 5$  cm,  $r = 2$  cm;
  - $g = 7$  cm,  $r = 3$  cm.

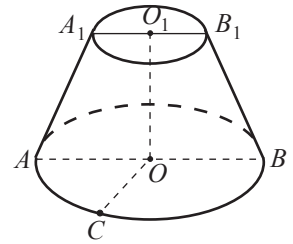


- 4. Lucrați în perechi!** Fie un con circular drept de bază  $\mathcal{C}(O, r)$ .  $\mathcal{A}_b, \mathcal{A}_l, \mathcal{A}_t, V$  sunt aria bazei, aria laterală, aria totală și volumul conului,  $g$  – generatoarea, iar  $h$  – înălțimea conului. Completați tabelul:

$r$	$g$	$h$	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$V$
4		3				
5	13					
		4				$108\pi$
8				$80\pi$		
	7					$30\pi$

- Un triunghi isoscel cu laturile de 5 cm, 5 cm și 6 cm se rotește în jurul axei lui de simetrie. Aflați aria totală și volumul corpului geometric obținut.
- Un triunghi isoscel cu laturile de 13 cm, 13 cm și 10 cm se rotește în jurul bazei lui. Determinați aria și volumul corpului geometric obținut.

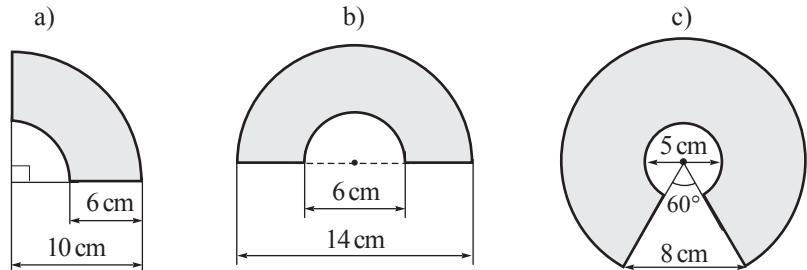
7. Reprezentați un trunchi de con: a) circular drept; b) circular oblic.
8.  **Lucrați în perechi!** În desen este reprezentat un trunchi de con circular drept.




- Identificați:
- a) generatoarele; b) înălțimile; c) razele bazelor.
9. Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm și 5 cm se rotește în jurul axei lui de simetrie. Descrieți corpul de rotație obținut, dacă înălțimea trapezului este de 8 cm.
10. Ilustrați desfășurarea unui trunchi de con circular drept cu generatoarea  $g$  și razele bazelor  $R, r$ , dacă:
- a)  $g = 6$  cm,  $R = 3$  cm,  $r = 1$  cm; b)  $g = 8$  cm,  $R = 4$  cm,  $r = 2$  cm.

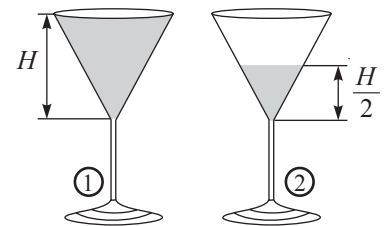
11.  **Lucrați în grup!**

Utilizând datele din desen, determinați razele bazelor, lungimea generatoarei și înălțimea trunchiului de con circular drept, a cărui desfășurare a suprafeței laterale coincide cu sectorul de coroană circulară reprezentat:



### Formăm capacitățile și aplicăm

12. Aria totală a unui con circular drept este de  $253 \text{ cm}^2$ , iar aria lui laterală – de  $11 \text{ cm}^2$ . Aflați lungimea generatoarei conului.
13. Determinați aria secțiunii conului circular drept reprezentat în desen, dacă ea conține punctele  $S, A$  și  $B$ , iar  $SO = 10$  cm,  $OA = 3$  cm,  $AB = 4$  cm.
14. Un triunghi dreptunghic cu catetele de 3 cm și 4 cm se rotește în jurul ipotenuzei. Aflați volumul corpului de rotație obținut.
15. Aria secțiunii axiale a unui con este  $S$ . Aflați aria laterală și volumul conului, dacă raza bazei conului este  $R$ .
16.  **Lucrați în perechi!** Examinați desenul. În primul pahar (de formă conică) sunt 200 ml de suc. Cât suc este în paharul al doilea, acesta fiind identic cu primul?



### Dezvoltăm capacitățile și creăm

17. Aria secțiunii obținute la intersecția conului cu un plan paralel cu baza conului este egală cu  $S$ . Secțiunea se află la distanța  $d$  de la vârful conului, iar  $h$  este înălțimea conului. Determinați aria laterală și volumul conului.
18. Un triunghi dreptunghic cu catetele  $a$  și  $b$  se rotește în jurul ipotenuzei. Aflați volumul corpului obținut.
19. Aria bazei unui con circular drept este de  $9\pi \text{ cm}^2$ . Determinați aria suprafeței totale a conului, dacă volumul lui este de  $12\pi \text{ cm}^3$ .
20. Generatoarea unui con circular drept este de 10 cm, iar unghiul secțiunii axiale de pe lângă vârf – de  $120^\circ$ . Aflați volumul conului.
21. Un triunghi echilateral cu latura de 8 cm se rotește în jurul drepte ce conține un vârf al triunghiului și este paralelă la latura ce nu conține acest vârf. Determinați volumul corpului de rotație obținut.
22. Un romb cu latura de 8 cm și unghiul ascuțit de  $60^\circ$  se rotește în jurul unei laturi. Aflați volumul corpului obținut.
23. Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm și 12 cm și latura laterală de 10 cm se rotește în jurul bazei mari. Determinați volumul corpului obținut.

## § 3. Sfera



Şase băieți au mâncat egal un pepene-verde cu raza de 20 cm, iar patru fete au mâncat egal (același volum) un pepene-verde cu raza de 15 cm. Cui i-a revenit mai mult pepene-verde: unei fete sau unui băiat?

### 3.1. Elementele sferei



**Investigăm** 1 Fie  $O$  un punct și  $R$  un număr real pozitiv.

- Care este locul geometric al punctelor din plan situate la distanța  $R$  de punctul  $O$ ?
- Ce se obține prin rotația în plan a unui segment de lungime  $R$  în jurul unei extremități (fixate)?
- Denumiți locul geometric al punctelor din spațiu situate la distanța  $R$  de punctul  $O$ .

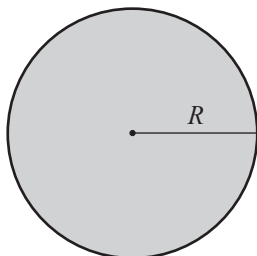


Fig. 25

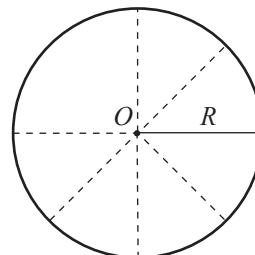


Fig. 24

*Rezolvare:*

- Locul geometric al punctelor din plan situate la distanța  $R$  de punctul  $O$  este cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  (fig. 24).
- Rotind complet un segment de lungime  $R$  în jurul unei extremități, obținem un disc de rază  $R$  (fig. 25).
- Mulțimea punctelor din spațiu situate la distanța  $R$  de punctul  $O$  se numește **sferă de centru  $O$  și rază  $R$** .

*Notăm:*  $\mathcal{S}(O, R)$ . Deci,  $\mathcal{S}(O, R) = \{M \mid OM = R\}$ .

Orice segment care unește centrul sferei cu un punct al ei se numește **rază** (fig. 26). Segmentul care unește două puncte ale sferei se numește **coardă**. Coarda ce conține centrul sferei se numește **diametru**.

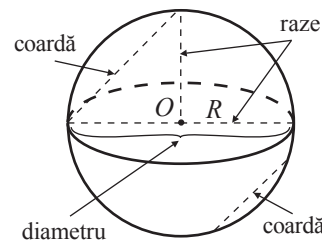


Fig. 26

2 Numiți locul geometric al punctelor din spațiu:

- situate la o distanță mai mică decât  $R$  de punctul  $O$ ;
- situate la o distanță mai mare decât  $R$  de punctul  $O$ .

*Rezolvare:*

- Mulțimea punctelor din spațiu situate la o distanță mai mică decât  $R$  se numește **interiorul sferei**  $\mathcal{S}(O, R)$ .

*Notăm:*  $\text{Int } \mathcal{S}(O, R)$ . Deci,  $\text{Int } \mathcal{S}(O, R) = \{M \mid OM < R\}$ .

- Mulțimea punctelor din spațiu situate la o distanță mai mare decât  $R$  de punctul  $O$ , adică mulțimea punctelor din spațiu care nu aparțin sferei  $\mathcal{S}(O, R)$  și interiorului ei, se numește **exteriorul sferei**  $\mathcal{S}(O, R)$ .

*Notăm:*  $\text{Ext } \mathcal{S}(O, R)$ . Deci,  $\text{Ext } \mathcal{S}(O, R) = \{M \mid OM > R\}$ .

Sfera împreună cu interiorul ei se numește **bilă**, sau **corp sferic**. Prin urmare, suprafața bilei este o sferă.

Secțiunea obținută la intersecția unui plan cu o sferă este un cerc (fig. 27).

Dacă centrul acestui cerc coincide cu centrul sferei, atunci el se numește **cerc mare al sferei** (fig. 28).

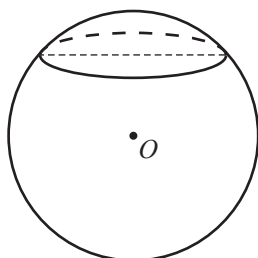


Fig. 27

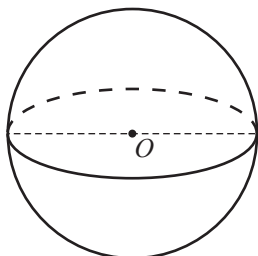


Fig. 28

### 3.2. Aria sferei. Volumul corpului sferic

În clasa a XII-a se va demonstra că:

- aria suprafeței sferei se calculează cu ajutorul formulei  $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ , unde  $R$  este raza sferei;
  - volumul corpului sferic se calculează cu ajutorul formulei  $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$ , unde  $R$  este raza acestui corp.
- Ce volum va avea o sferă cu raza de 9 cm?

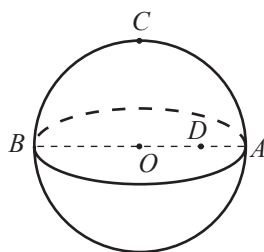
## Exerciții și probleme


### Fixăm cunoștințele

1. Ilustrați și notați o sferă.

2. Punctele  $A, B, C$  din desenul alăturat aparțin  $\mathcal{S}(O, R)$ . Identificați printre segmentele  $OA, OC, OB, AB, BC, CA, DA, DC, BD$ :


- razele;
- coardele;
- diametrul.



3.  **Investigați!** Fie  $\mathcal{S}(O, R)$ ,  $d$  distanța de la dreapta  $l$  la centrul  $O$ . Decideți care este poziția dreptei  $l$  față de sferă, dacă:
- $d = 8$  cm,  $R = 9$  cm;
  - $d = 11$  cm,  $R = 7$  cm;
  - $d = 10$  cm,  $R = 10$  cm.

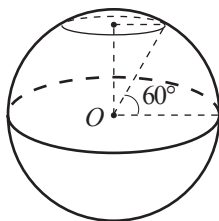
4. Fie  $\mathcal{S}(O, R)$  și  $d$  distanța de la planul  $\alpha$  la centrul  $O$ . Decideți care este poziția planului  $\alpha$  față de sferă, dacă:

- $d = 5$  cm,  $R = 2\sqrt{3}$  cm;
- $d = \frac{7}{9}$  cm,  $R = \frac{5}{8}$  cm;
- $d = 5, (6)$  cm,  $R = 5\frac{2}{3}$  cm.

5.  **Lucrați în perechi!** Fie  $d$  distanța de la centrul  $\mathcal{S}(O, R)$  la coarda  $AB$ . Determinați lungimea coardei, dacă:
- $d = 3$  cm,  $R = 5$  cm;
  - $d = 5$  cm,  $R = 13$  cm;
  - $d = 2\sqrt{5}$  cm,  $R = 2\sqrt{6}$  cm.


### Formăm capacitățile și aplicăm

6. Raza sferei terestre este (aproximativ) de 6 400 km. Care este lungimea unei paralele de  $60^\circ$  latitudine (a se vedea desenul)?



7. Aria cercului mare al sferei este  $S$ . Aflați aria și volumul sferei, dacă:

- $S = 36\pi$  m<sup>2</sup>;
- $S = 1\frac{32}{49}\pi$  m<sup>2</sup>;
- $S = 27\pi$  m<sup>2</sup>.

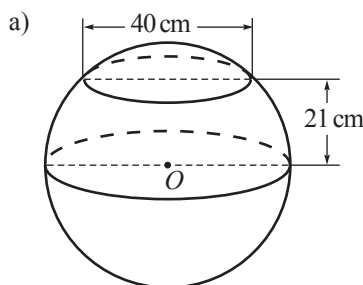
8.  **Lucrați în perechi!** Fie  $\mathcal{S}(O, R)$  și  $d$  distanța de la planul  $\alpha$  la centrul  $O$ . Determinați aria cercului de intersecție a planului  $\alpha$  cu sfera, dacă:

- $R = 15$  cm,  $d = 12$  cm;
- $R = 8\sqrt{3}$  cm,  $d = 2\sqrt{3}$  cm;
- $R = d = 10$  cm.

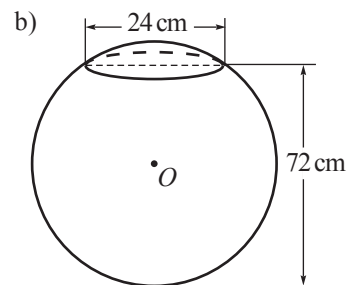
9. Rezolvați problema propusă la începutul paragrafului.

### Dezvoltăm capacitățile și creăm

10. Utilizând datele din desen, aflați aria sferei ( $O$  este centrul sferei):




11. Aria unei sfere este de  $387$  cm<sup>2</sup>. Aflați aria sferei al cărei volum este de 27 de ori mai mic decât volumul sferei date.






12. Aria unei sfere este de  $20$  cm<sup>2</sup>. La ce distanță de la centru trebuie secționată sfera, astfel încât aria discului mărginit de cercul din secțiune să fie egală cu  $2,75$  cm<sup>2</sup>?

## Exerciții și probleme recapitulative

### Fixăm cunoștințele

- Reprezentați:
  - un con circular drept;
  - un cilindru circular drept;
  - un trunchi de con circular drept;
  - o sferă.
- Construiți desfășurarea:
  - unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și generatoarea de 6 cm;
  - unui con circular drept cu raza bazei de 3 cm și generatoarea de 8 cm;
  - unui trunchi de con circular drept cu razele bazelor de 2 cm și 3 cm și generatoarea de 5 cm.
- Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile de  $2\sqrt{5}$  cm și  $10\sqrt{3}$  cm. Aflați aria totală și volumul cilindrului, dacă se știe că generatoarea este mai mică decât diametrul bazei lui.
- Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc de  $60^\circ$  și raza de 9 cm. Aflați aria totală și volumul conului.
- Aflați raza unui disc a cărui arie este egală cu aria totală a unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și înălțimea de 7 cm.
- Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui dreptunghi cu diagonala de 5 cm și perimetrul de 14 cm în jurul laturii mai mari.
-  **Lucrați în perechi!** Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui triunghi dreptunghic cu catetele de  $3\frac{1}{3}$  cm și  $2\sqrt{3}$  cm:
  - în jurul catetei mai mari;
  - în jurul ipotenuzei.

### Formăm capacitățile și aplicăm

- Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru este de forma unui pătrat cu diagonala de  $\sqrt{72}$  cm. Aflați volumul cilindrului.
- Înălțimea conului este congruentă cu diametrul bazei lui. Aflați raportul dintre aria bazei și aria laterală a conului.
- Aflați aria laterală și volumul cilindrului obținut la rotația completă a unui dreptunghi de dimensiunile 5 cm și 7 cm în jurul unei laturi. Cercetați ambele cazuri.
- O bilă cu raza de 6 cm și un cub cu latura de 9 cm sunt confecționate din același material. Comparați masa acestor corpuri.
-  **Lucrați în perechi!** Un triunghi echilateral se rotește în jurul axei lui de simetrie. Aflați volumul corpului obținut, dacă aria triunghiului este de  $16\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.
- Aflați raza bazei unui cilindru circular drept cu aria totală de  $13\pi$  cm<sup>2</sup> și generatoarea de  $1\frac{1}{4}$  cm.
- Aflați raza bazei unui con circular drept cu aria totală de  $98\pi$  cm<sup>2</sup> și generatoarea de 7 cm.
-  **Investigați!** O bilă cu raza de 10 cm se află într-un vas de formă cilindrică cu raza bazei de 12 cm. În vas se toarnă 4 l de apă. Va fi acoperită oare bila de apă?
- Diagonalele unui romb au lungimile de 6 cm și  $6\sqrt{3}$  cm. Determinați aria totală a corpului obținut la rotația completă a rombului în jurul uneia dintre laturile sale.
-  **Investigați!** Care corp are volumul mai mare: o sferă cu raza de 10 cm sau un tetraedru regulat cu muchia de 15 cm?

### Dezvoltăm capacitățile și creăm

- Distanța dintre centrul bazei conului și generatoarea lui este egală cu  $3\sqrt{3}$  cm. Aflați aria totală și volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu raza bazei un unghi de  $60^\circ$ .
- Distanța dintre centrul bazei conului și generatoarea lui este egală cu  $6\frac{1}{2}$  cm. Determinați aria totală și volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu înălțimea conului un unghi de  $60^\circ$ .
- Aria laterală a unui con este de 4 ori mai mare decât aria bazei lui. Aflați măsura unghiului la centru al sectorului de cerc care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului.
- O sferă este înscrisă într-un con. Valoarea raportului dintre aria bazei conului și aria sferei este egală cu 0,75. Aflați măsura unghiului dintre generatoare și raza bazei conului.

22. Un triunghi echilateral se rotește în jurul unei laturi. Determinați volumul corpului obținut, dacă latura triunghiului este  $a$ .
- 23\*. Aflați raza bazei mari a unui trunchi de con circular drept cu aria totală de  $506\pi$  cm<sup>2</sup>, aria laterală de  $273\pi$  cm<sup>2</sup> și raza bazei mici de 8 cm.
- 24\*. Trapezul  $ABCD$  cu baza mare  $AB$  are  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $AD = 8$  cm,  $AB = 8$  cm,  $DC = 2$  cm. Determinați volumul corpului obținut prin rotația trapezului în jurul:  
a) laturii  $AB$ ; b) bazei mici.

25.  **Lucrați în grup!**



**Proiect.** Corpuri de rotație din localitate.

## Test sumativ



*Timpefectiv de lucru:*  
45 de minute

### Varianta I

- Fie un cilindru circular drept cu generatoarea de 5,5 cm și raza bazei de 2 cm.
  - Desenați desfășurarea cilindrului dat.
  - Aflați aria laterală a cilindrului.
  - Determinați aria totală a cilindrului.
  - Aflați volumul cilindrului.
- Un con circular drept de metal are generatoarea de 5 cm, iar diametrul bazei de 8 cm.
  - Aflați înălțimea conului.
  - Determinați aria laterală a conului.
  - Aflați volumul conului.
  - Conul a fost topit și din metalul obținut s-au confecționat bile cu raza de 1 cm. Câte bile s-au obținut?
- Aria suprafeței unei mingi sferice este egală cu  $400\pi$  cm<sup>2</sup>.
  - Este oare posibil să punem această minge într-o cutie de forma unui cub cu muchia de 15 cm? Justificați.
  - Mingea se afla la 2 m de un perete. Un copil a lovit-o în direcția peretelui. Mingea s-a rostogolit pe o linie dreaptă de 3 ori și s-a oprit. La ce distanță de la perete se află aceasta?  
(În calcule considerați  $\pi \approx 3,14$ .)
- O piesă are forma figurii care se obține la rotirea unui triunghi dreptunghic cu catetele de 8 cm și 6 cm în jurul ipotenuzei. Aflați volumul piesei.

### Varianta II

- Fie un cilindru circular drept cu înălțimea de 6 cm și raza bazei de 3 cm.
  - Desenați desfășurarea cilindrului dat.
  - Aflați aria laterală a cilindrului.
  - Determinați aria totală a cilindrului.
  - Aflați volumul cilindrului.
- Un con circular drept are înălțimea de 12 cm, iar diametrul bazei de 10 cm.
  - Aflați generatoarea conului.
  - Determinați aria laterală a conului.
  - Aflați volumul conului.
  - O bilă de metal cu raza de 15 cm a fost topită, iar din metalul obținut s-au confecționat conuri cu dimensiunile date mai sus. Câte conuri s-au obținut?
- Aria suprafeței unei mingi de ping-pong este egală cu  $36\pi$  cm<sup>2</sup>.
  - Este oare posibil să punem această minge într-o cutie de forma unui cub cu muchia de 4 cm? Justificați.
  - Mingea a fost împinsă și s-a mișcat pe o dreaptă în direcția opusă a marginii mesei de tenis. S-a rostogolit de 5 ori și s-a oprit. La ce distanță de la marginea mesei se află mingea, dacă lungimea mesei este de 2,74 m?  
(În calcule considerați  $\pi \approx 3,14$ .)
- O piesă are forma figurii care se obține la rotirea unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 10 cm și un unghi ascuțit de  $60^\circ$  în jurul ipotenuzei. Aflați volumul piesei.

# Răspunsuri și indicații

## Algebră

### Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale. Recapitulare și completări

§ 1. 3. a) 0,875, nu este periodic; c) 4,(851), perioada este 851. 4. a), c), e) Numere zecimale periodice simple; b), d), f) Numere zecimale periodice mixte. 7. 10 nuci; 120 de nuci. 8. d)  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -2$  – numere raționale; f)  $x_1 = 5 - 3\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 5 + 3\sqrt{3}$  – numere iraționale. 9. b)  $\frac{29}{9}$ ; c)  $\frac{557}{90}$ ; d)  $\frac{2817}{550}$ ; e)  $\frac{9301}{370}$ . 10. a)  $1 + \sqrt{7} > 2\sqrt{3}$ ; d)  $-\frac{1}{3} = -0,(3)$ . 11. b)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ; c) 1; d)  $11 - 6\sqrt{2}$ . 12. c)  $\{x \in \mathbb{R} | (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)\}$ . 15. 25 kg. 16. 1 kg. 19. b)  $S = \emptyset$ ; c)  $S = \{-1; 4\}$ . 20. a)  $S = \{0; 0,5\}$ ; b) *Indicație*.  $|2+x| = |5x-3| \Leftrightarrow (2+x)^2 = (5x-3)^2$ .

§ 2. 1. a)  $6\sqrt{2} + 5\sqrt{6} - 9,5$ ; b)  $11,6 - 21\sqrt{2}$ . 2. c)  $2,828 < 2\sqrt{2} < 2,829$ ; d)  $6,708 < 3\sqrt{5} < 6,709$ . 3. c)  $3 - \sqrt{2} < 1,7$ ; d)  $1 + \sqrt{3} < 2 + \sqrt{2}$ . 5. La fierbere se pierd circa 33 % din vitamina C. 6.  $\approx 170$  g de unt,  $\approx 130$  g de zahăr, 200 g de ciocolată, 4 ouă, 2 linguri de făină. 10. b) De exemplu,  $4 + (4 + \sqrt{5})$ ;  $10 - (2 - \sqrt{5})$ ;  $4(2 + 0,25\sqrt{5})$ ;  $\frac{8\sqrt{2} + \sqrt{10}}{\sqrt{2}}$ . 11. De 100 de ori. 12. 0,5 și -1. 14. 373,45 lei. 15. a)  $8 - 2\sqrt{15}$ ; d)  $38 + 12\sqrt{10}$ . 16. b)  $11\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$ ; d)  $26 + 15\sqrt{3}$ . 17. b)  $\approx -5,689$ ; d)  $\approx 2,466$ . 18.  $16 + 8\sqrt{5}$ . 19. Cu 36 %. 21. a)  $2\sqrt{13} + 3\sqrt{3} + 120\sqrt{2} - 186$ . 24.  $185^2 - 15^2$ .

§ 3. 2. a)  $a \in [2; +\infty)$ ; b)  $a \in (-\infty; 0]$ ; c)  $a \in (-1; +\infty)$ . 3. a)  $\sqrt{12}$ ; b)  $-\sqrt{3a^2}$ ; c)  $\sqrt{b(b-1)^2}$ . 4. a)  $4\sqrt{3}$ ; b)  $7\sqrt{2}$ ; c)  $a^2\sqrt{5}$ ; d)  $(2-a)\sqrt{7}$ . 6. a) 27; b)  $\frac{1}{25}$ ; c)  $7\frac{4}{11}$ ; d)  $\frac{1}{16}$ . 7. a)  $10a^2$ ; b)  $\frac{1}{4}x$ ; c)  $4b^6$ ; d)  $1000y^{-6}$ . 8. a) 10; b)  $\frac{4}{3}$ . 9. a)  $\frac{\sqrt{21}}{9}$ ; b)  $\frac{3\sqrt{10}}{25}$ ; c)  $\sqrt{3} - 1$ ; e)  $4\sqrt{5} - 9$ . 10. a) -12; b) 60; c)  $9 + 5\sqrt{3}$ ; d) 11. 11. a)  $x - \sqrt{5}$ ; b)  $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ; c)  $-\sqrt{2}$ ; d)  $2 - \sqrt{7}$ . 12. a)  $\frac{1}{9}$ ; b) 5; c)  $40\frac{1}{2}$ ; d) 9; e) -0,9999; f)  $\frac{1}{2}$ . 13. a) 210; b) 30; c) 1500; d) 0,4. 17. a) 23 cm<sup>2</sup>; b) 6 cm<sup>2</sup>. 18. a) 500; b) 0,07; c) 4000; d) 0,009. 19. a) 38; b)  $4(\sqrt{5} - 1)$ . 20. a) A; b) A; c) F; d) A. 21. a)  $\frac{2}{3}$ ; b)  $\frac{4}{49}$ ; c)  $\frac{3}{2}$ ; d)  $\frac{2}{5}$ . 22. a)  $\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}$ ; b)  $\sqrt{10}$ ; c)  $-\sqrt{2}$ .

*Exerciții și probleme recapitulative.* 1. b)  $35 - 7\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{6}$ . 3. a)  $\sqrt{7} < \sqrt{10}$ ; b)  $\sqrt{63} > \sqrt{54}$ ; c)  $\sqrt{23} < \sqrt{103}$ . 4. b)  $3\sqrt{7}$ ; c)  $3\sqrt{2} - 2$ ; d)  $\sqrt{66} - 8$ . 7. b)  $e^{-10}$ ; d)  $\frac{1}{3x^5}$ . 8. 10, 1 și 9. 9. 50,8 lei. 10. d) De exemplu,  $3\sqrt{13} + 4\sqrt{13}$ ;  $8\sqrt{13} - \sqrt{13}$ ;  $2\sqrt{13} \cdot 3,5$ ;  $\frac{91}{\sqrt{13}}$ . 11. b)  $11 + 4\sqrt{7}$ ; d)  $200 + 80\sqrt{5}$ . 13. a)  $3\sqrt{3} - 1$ ; c)  $14 - 6\sqrt{5}$ . 14. a)  $S = \{-1; 4\}$ ; b)  $S = \{0; 0,5\}$ ; c)  $S = \{-2; 2\}$ . 15. a)  $5 - 2\sqrt{3} < 2 + \sqrt{2}$ ; b)  $6 + \sqrt{7} < 4\sqrt{7}$ . 17. a)  $6\frac{7}{9}$ ; b)  $15\frac{25}{99}$ ; c)  $3\frac{43}{198}$ ; d)  $\frac{557}{4500}$ . 18. a)  $-4x$ ; d)  $-2x^2y^3\sqrt{2}$ . 20. 80 cm. 21. 50 de ani și 14 ani. 22. a) 4; b) 4; c) 3; d) 16; e) 3. 26. a) 1; b) 2. 29. *Indicație*. a), b), d) Efectuați substituția  $|x| = t$ ; c) Efectuați substituția  $|3-x| = t$ . 31. *Indicație*. Cercetați cazurile  $a > 0$ ,  $a < 0$ ,  $a = 0$ .

### Capitolul 2. Rapoarte algebrice

§ 1. 1. a) 0; b) 14; c) -1; d)  $-\frac{4}{9}$ . 2. a) 14; b) -25; c) -30,25; d)  $2\frac{35}{36}$ . 6. a) 1; b) 1; c)  $\frac{5}{6}$ ; d) 1,3. 7. a) 5; b)  $\frac{8}{3}$ ; c) -9; d) 0,8. 8. a)  $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ; b)  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ; c)  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ; d)  $\mathbb{R} \setminus \left\{13\frac{1}{3}\right\}$ ; e)  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ ; f)  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 0,6\}$ . 9. a) 2,8; b) -3,2; c)  $7\frac{7}{15}$ ; d)  $\frac{8}{35}$ . 10. a)  $F(0) < F(1)$ ; b)  $F(-2) < F(-1)$ ; c)  $F(0,5) > F(-0,5)$ ; d)  $F(10) < F(-10)$ . 11. a)  $F(-1)$ ,  $F(-2)$ ,  $F(-3)$ ,  $F(3)$ ,  $F(2)$ ,  $F(1)$ ; b)  $F(0,5)$ ,  $F(-4)$ ,  $F(4)$ ,  $F(-0,5)$ . 12. a) -5; 1; 3; 9; b) -2; 2; 4; 8; c) -11; -5; -3; -1; 1; 7; d) -14; -12; -11; -9; -8; -6. 13. a)  $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ ; b)  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ; c)  $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}\}$ ; d)  $\mathbb{R} \setminus \{x, y \in \mathbb{R} | x \neq y\}$ . 14. a)  $-\frac{1}{3}$ ; b)  $\frac{1}{5}$ ; c) -3; d)  $-\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$ .

§ 2. 6. a)  $\frac{x^2}{2y}$ ; b)  $\frac{-x^2}{3y^2}$ ; c)  $\frac{x^2}{2x+y}$ ; d)  $\frac{3x+2y}{7y}$ . 7. a)  $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{8,4}{11,2} = \frac{-16,8}{-22,4}$ ; b)  $\frac{5}{8} = \frac{11}{17,6} = \frac{8}{12,8} = \frac{-32}{-51,2} = \frac{-17,5}{-28}$ . 8. a)  $\frac{x-1}{xy} = \frac{x^2-x}{x^2y} = \frac{xy-y}{xy^2} = \frac{0,5x^3-0,5x^2+x-1}{0,5x^3y+xy}$ ; b)  $\frac{x+y}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{-7x-7y}{7y-7x} = \frac{3y^2-3x^2}{-3(x-y)^2}$ . 10. a)  $\frac{3}{x+2}$ ; b)  $\frac{2(a-b)}{a+b}$ ; c)  $\frac{-x-y}{x}$ ; d)  $\frac{4(b-2x)}{b+2x}$ . 11. 80. 12. 9.

- § 3.** 1. a) 1; b)  $\frac{6}{7}$ ; c)  $-\frac{2}{47}$ ; d)  $-\frac{7}{39}$ . 2. a)  $1\frac{3}{8}$ ; b)  $-\frac{11}{30}$ ; c)  $\frac{16}{45}$ ; d)  $1\frac{17}{48}$ ; e)  $-1\frac{17}{84}$ . 3. a)  $\frac{13}{xy}$ ; b)  $\frac{a+b}{a-b}$ ; c)  $\frac{4x}{x^2+1}$ ; d)  $-3y$ .  
 4. a)  $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ; b)  $\frac{6+2y}{xy}$ ; c)  $\frac{2ax}{x^2-a^2}$ ; d)  $\frac{4-x^2}{2x(x+1)}$ . 5. a)  $\frac{36}{85}$ ; b)  $-\frac{63}{80}$ ; c)  $-\frac{3}{11}$ ; d)  $\frac{1}{6}$ . 6. a)  $\frac{3x^2}{y^3}$ ; b)  $\frac{10x^3y^2}{y^2-1}$ ; c)  $\frac{4(x^2-1)}{(x-2)^2}$ ;  
 d)  $\frac{8}{7x}$ . 7. a)  $2\frac{3}{4}$ ; b)  $-1\frac{1}{4}$ ; c)  $-\frac{3}{4}$ ; d)  $\frac{4}{7}$ . 8. a)  $\frac{4y}{3x}$ ; b)  $\frac{b+ay}{ax-b}$ ; c)  $\frac{3x^2}{7x-5}$ ; d)  $\frac{25-x^2}{4y}$ . 9. a)  $\frac{ab}{y}$ ; b)  $\frac{1-x}{x+2}$ ; c)  $-1$ ; d)  $\frac{8x}{y}$ .  
 10. a)  $\frac{36}{49}$ ; b)  $-\frac{27}{125}$ ; c)  $\frac{256}{625}$ ; d)  $\frac{3^8 5^6}{2^{10}}$ . 11. a)  $\frac{x^3 y^3}{27a^3}$ ; b)  $\frac{x^2(x+y)^2}{(x-y)^2}$ ; c)  $\frac{x^6 a^3}{y^{15} b^9}$ ; d)  $\frac{4(x-1)^2}{(3a+b)^2}$ . 12. a)  $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ; b)  $\frac{-x-2}{(x+1)^2}$ ;  
 c)  $\frac{-3x}{a(x+y)}$ . 13. a)  $\frac{2x}{x+y}$ ; b)  $\frac{2xy}{x+y}$ . 14. a)  $\frac{5}{4\sqrt{2}+1} = \frac{20\sqrt{2}-5}{31}$ ; b)  $\frac{17}{1-8\sqrt{5}} = \frac{17(1+8\sqrt{5})}{319}$ .  
**§ 4.** 1. B. 2. a)  $x^2+3x$ ; b) 2; c)  $\frac{m}{m+1}$ . 3. a) A; b) A; c) F. 4. a)  $-\frac{x+2}{x(x-1)}$ ; b)  $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ ; c)  $\frac{1}{x-2}$ . 5. a) Nu; b)  $x=0$ .  
 6. Nu sunt. 7. a)  $\frac{x+2}{x^3}$ ; b)  $\frac{3(a-b)}{ab}$ . 9. a)  $\frac{2t-3}{2t+1}$ ; b)  $\frac{a}{a-6}$ ; c)  $\frac{3a+b}{3a-b}$ ; d)  $\frac{2}{t+2}$ . 11.  $S = \{-1; 0; 1\}$ .  
 12. a)  $E(x) = x - 1 - \frac{1}{x+4}$ ; b)  $a=1, b=-1, c=-1$ .

- Exerciții și probleme recapitulative.** 2. a) 5; b) 4,5; c) 5; d) 2,6. 5. a)  $\frac{3}{x+3}$ ; b)  $\frac{a-b}{a+b}$ ; c)  $\frac{-a}{x+a}$ ; d)  $-\frac{x+2}{x}$ .  
 6. a)  $\frac{y+2x}{x^2 y^2}$ ; b)  $\frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$ ; c)  $\frac{1}{2}$ ; d)  $\frac{-7x-23}{x^2-16}$ . 7. a)  $\frac{(x+1)^2}{x-2}$ ; b)  $xy+y^2$ ; c)  $\frac{y}{10ab^2 x^2}$ ; d)  $\frac{axy}{z^2}$ . 8. a)  $\frac{9x+3}{y}$ ; b)  $-\frac{x}{3x+6}$ ;  
 c)  $-\frac{a^4 b^6}{6(x-1)^3}$ ; d)  $\frac{a+3}{2ax}$ . 9. a)  $\frac{a-b}{x}$ ; b)  $\frac{1-x}{y+z}$ ; c)  $\frac{x-y}{z-t}$ ; d)  $\frac{y-z}{x}$ . 10. a)  $\frac{a^3(x+1)^6}{b^3(x-1)^3}$ ; b)  $\frac{x^8(x-1)^4}{y^{12}(x+1)^8}$ ; c)  $\frac{a^2 b^4 x^6}{(a-b^2)^4 y^8}$ ;  
 d)  $\frac{25(a^2-x)^8}{9y^8 x^4}$ . 11. a)  $\frac{(ax-b)^2}{a^2}$ ; b)  $\frac{(x-3y)^2}{y^2}$ ; c)  $\frac{x^2-x+2}{x^2-1}$ ; d)  $\frac{6a-3}{4a^2-9}$ . 12.  $4\sqrt{5}$ . 13. a)  $\frac{a-2}{a+b^2}$ ; b)  $\frac{x+y^2}{x-2}$ ; c)  $\frac{3x+y}{xy}$ ;  
 d)  $\frac{a-b}{4(a+b)}$ . 14. a) 3,6; b) 2,5; c) -3; d) -3. 15. a)  $\frac{4}{x+1}$ ; b)  $-2x$ . 16.  $x=1$ . 17.  $x=0$ .

### Capitolul 3. Funcții

- § 1.** 2. b). 4. a). 6. a) Nu; b) Da; c) Da; d) Nu. 8.  $f(x) = 3x+1$ . 9. *Indicație.* Cercetați două cazuri:  $p(x) = (8+2\sqrt{3})x$ ,  $p(x) = (8-2\sqrt{3})x$ ,  $x$  - înălțimea trapezului. 10. a)  $D(f) = \mathbb{R}$ ; b)  $D(g) = \mathbb{R}^*$ ; c)  $D(h) = [0; +\infty)$ ; d)  $D(f_1) = \mathbb{R}$ .  
 15. a) Da; b) Nu.  
**§ 2.** 4. a)  $f$  - strict crescătoare; c)  $f$  - strict descrescătoare. 5. b), c), d) În cadranele II, IV. 13. a)  $f(x) = 7x-3$ ;  
 c)  $f(x) = x\sqrt{2} - \sqrt{3}$ . 18. a) 1) Pentru  $m \in (2; +\infty)$  funcția  $f$  este strict crescătoare; 2) Pentru  $m \in (-\infty; 2)$  funcția  $f$  este strict descrescătoare. Pentru  $m=2$  funcția  $f$  este constantă. 20.  $A=2, B=10$ . 21.  $a=-1$ . 22.  $f(n) = 3+0 \cdot n$  sau  $g(n) = 4+(-1)^n, n \in \mathbb{N}$ .  
**§ 3.** 4. a)  $A: (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty), A(a) = 6a^2$ . 6. a)  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ . 7. b), d) Funcția  $f$  nu are zerouri. 8. 2) *Indicație.* Axa de simetrie este dreapta  $x = -\frac{b}{2a}$ . 10. b)  $E(f) = (-\infty; 2]$ ; e)  $E(f) = [-0,25; +\infty)$ . 13. a)  $a > 0, \Delta < 0$ ; d)  $a < 0, \Delta = 0$ .  
 16. 1,11m; 1,78m; 2m; 1,78m; 1,11m. 18. a) *Indicație.* Pot fi determinate 4 funcții. 19. Aria triunghiului mic  $A_1(x) = \frac{ax^2}{2h}$ ; aria trapezului  $A_2(x) = \frac{a(h^2-x^2)}{2h}$ . 20. *Indicație.* a) Rezolvați ecuația  $-2x^2 - x + 4 = -x + 2$  pentru a determina abscisele punctelor de intersecție. 23.  $m=-1$ . 24. a)  $a \in \mathbb{R}^*$ ; b)  $a \in \mathbb{R}^*$ . 25.  $b=6, c=15$ .  
**§ 4.** 2. a) 5; -4;  $-\sqrt[3]{16}$ ; 1,5; -1; 0,1; -7. 5. a), b), d) Funcția  $f$  nu are extreme; c)  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$ .  
**Exerciții și probleme recapitulative.** 5.  $l = 2\pi r$ . 6. a)  $y = 15 - 0,5x$ . 14. a)  $x=0$  - axă de simetrie;  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$ ;  
 d)  $x = \frac{1}{12}$  - axă de simetrie;  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2\frac{23}{24}$ . 16. a) Se determină 4 funcții. 17. *Indicație.* Rezolvați ecuația  $f(x) = 0$  și calculați valoarea  $f(0)$ . 20. c) 40 m. 22. a) *Indicație.* Fie  $2+x=t$ , atunci  $x=2-t$ . Deci,  $f(t) = 5t-7$ . 24.  $b=8; c=12$ .  
 29. a) *Indicație.* Scrieți funcția  $f$  sub forma  $f(x) = \frac{x^2+2x+1-x}{x^2+2x+1} = 1 - \frac{x}{(x+1)^2}$ ; b) *Indicație.* Cercetați funcția  $f(x) = 1 + \frac{x}{(x-1)^2}$ . 30.  $m=-2$ .

## Capitolul 4. Ecuații. Sisteme de ecuații

§ 1. 3. a)  $\mathbb{R}$ ; b)  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ ; c)  $\mathbb{R}$ . 4. a)  $S = \{0, 5\}$ ; c)  $S = \{-8\}$ ; f)  $S = \left\{-\frac{7}{15}\right\}$ . 7. a)  $S = \mathbb{R}$ ; b)  $S = \left\{\frac{7}{8}\right\}$ ; c)  $S = \left\{-\frac{16}{29}\right\}$ .  
8. *Indicație.* a)  $\frac{1}{x-5} = t$ ; b)  $\frac{x+2}{x} = t$ ; c)  $\frac{t}{t+1} = z$ ; d)  $\frac{a+3}{a} = t$ . 10. *Indicație.* Legitatea este  $z_1 \cdot z_2 = 30$ , unde  $z_1, z_2$  sunt

soluțiile ecuațiilor din stânga și, respectiv, din dreapta numărului 30. 11. *Indicație.* Legitatea este  $x_1^{x_2} = 81$ , unde  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuațiilor din stânga și, respectiv, din dreapta numărului 81. 13. a)  $S = \{-2\}$ ; c)  $S = \{6, 5\}$ ; d)  $S = \left\{-3\frac{1}{3}\right\}$ .

14. a)  $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ; b)  $S = \{-4; 4\}$ ; c)  $S = \left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$ ; d)  $S = \left\{-\frac{4}{11}; \frac{8}{9}\right\}$ . 15. a) Pentru  $m = 3$ ,  $S = \emptyset$ ; pentru  $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ,

$S = \left\{\frac{10}{m-3}\right\}$ ; b) Pentru  $m = 0$ ,  $S = \emptyset$ ; pentru  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $S = \left\{\frac{2(2-m)}{3m}\right\}$ .

§ 2. 2. a)  $S = \{-4; 4\}$ ; b)  $S = \{-5; 5\}$ ; c)  $S = \left\{-\frac{2}{5}; 0\right\}$ ; d)  $S = \emptyset$ . 3. a)  $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ; b)  $S = \left\{\frac{2}{5}; 1\right\}$ ; c)  $S = \emptyset$ ; d)  $S = \emptyset$ .

4. a)  $S = \{1\}$ ; b)  $S = \{2; 6\}$ ; c)  $S = \emptyset$ ; d)  $S = \{-2\}$ ; e)  $S = \{-1; 4\}$ ; f)  $S = \emptyset$ . 8. a)  $(x-3)(x+1)$ ; c)  $-(x+1)(3x+2)$ .

9. a)  $S = \{1\}$ ; b)  $S = \emptyset$ . 10. 1) a)  $-\frac{3}{5}$ ; b)  $-1\frac{4}{5}$ ; c)  $3\frac{24}{25}$ ; d)  $-2\frac{1}{5}$ . 11. 5, 20. *Indicație.* Aplicați relațiile lui Viète. Problema

conduce la o ecuație de gradul II. 12. 1; 3. 13. a)  $S = \emptyset$ ; b)  $S = \emptyset$ ; c)  $S = \left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}$ . 14. a)  $S = \{-2; -1; 1; 2\}$ ; b)  $S = \emptyset$ .

15. a)  $S = \{0\}$ ; b)  $S = \emptyset$ ; c)  $S = \{0\}$ ; d)  $S = \{-1\}$ . 18. a)  $(t-1)(t+1)(t^2+2)$ ; b)  $(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1)$ . 19. *Indicație.*

Grupăți factorii și faceți substituția: a)  $x^2 - 3x = t$ ; b)  $x^2 + 7x = t$ . 20. a) *Indicație.* Deoarece  $x^2 = |x|^2$ , faceți substituția  $|x| = t$ .

22. a) Pentru  $m = 0$ ,  $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ ; pentru  $m = -\frac{9}{4}$ ,  $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ ; pentru  $m \in \left(-2\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$ ,  $S = \left\{\frac{3-\sqrt{9+4m}}{2m}; \frac{3+\sqrt{9+4m}}{2m}\right\}$ ;

pentru  $m \in \left(-\infty; -2\frac{1}{4}\right)$ ,  $S = \emptyset$ ; b) *Indicație.* Cercetați cazurile: 1)  $m - 2 = 0$ ; 2)  $m - 2 \neq 0$ .

§ 3. 2. a) 1; c) -1. 3. a)  $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ; b)  $S = \{-6\}$ ; c)  $S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$ ; d)  $S = \{3\sqrt{2}\}$ . 4. a)  $S = \left\{3\frac{2}{3}\right\}$ ; b)  $S = \left\{-2\frac{2}{3}\right\}$ ; c)  $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$ ;

d)  $S = \left\{-\frac{6}{7}\right\}$ . 5. a)  $S = \{0\}$ ; b)  $S = \emptyset$ ; c)  $S = \{0\}$ ; d)  $S = \{0; 6\}$ . 6. a)  $S = \left\{8\frac{5}{8}\right\}$ ; c)  $S = \{0; 12\}$ . 7. a)  $S = \left\{0; 3\frac{1}{5}\right\}$ ;

c)  $S = \emptyset$ . 9. a)  $S = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$ ; c)  $S = \mathbb{Q} \setminus \{4\}$ . 10. c)  $S = \emptyset$ ; d)  $S = \{-5\}$ . 12. a) *Indicație.* Legitatea este

$(x-x_1)(x-x_2) = 0$ , unde  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației date; b) *Indicație.* Legitatea este  $\frac{x+x_1}{x+x_2} = 0$ , unde  $x_1, x_2$  sunt

soluțiile ecuației date. 14.  $S = \{1\}$ . 15.  $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ . 16. c)  $S = \{-5\sqrt{2}; 0; 5\sqrt{2}\}$ . *Indicație.* DVA:  $\mathbb{R} \setminus \{-8; -6; 6; 8\}$ . Numitorul

comun va fi  $(t^2 - 36)(t^2 - 64)$ . 17. d) DVA:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . 1) Pentru  $m - 3 < 0$ ,  $S = \emptyset$ ; 2) Pentru  $m - 3 = 0$  rezolvați ecuația

$x + \frac{1}{x} - 3 = 0$ ; 3) Pentru  $m - 3 > 0$  rezolvați ecuațiile  $x + \frac{1}{x} - 3 = m - 3$ ,  $x + \frac{1}{x} - 3 = -(m - 3)$ .

§ 4. 2. b)  $S = \{(0, 2); (-0, 6)\}$ ; d)  $S = \left\{\left(11\frac{3}{7}; -1\frac{17}{21}\right)\right\}$ . 3. b)  $S = \left\{\left(-\frac{15}{17}; 3\frac{12}{17}\right)\right\}$ ; d)  $S = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right)\right\}$ . 6. a)  $S = \{(0; -1)\}$ ;

b)  $S = \left\{\left(7\frac{6}{11}; 5\frac{3}{11}\right)\right\}$ ; c)  $S = \{(-1; 2)\}$ . 7. b)  $S = \{(-2; 12)\}$ ; d)  $S = \{(1; 2)\}$ . 8. a)  $S = \{(2; 1)\}$ ; b)  $S = \emptyset$ ;

c)  $S = \{(\sqrt{2}; 4); (-\sqrt{2}; 4)\}$ . 9. 18 km/h; 24 km/h. 11. 2 km/h. 12.  $a = 5$ .

§ 5. 1. 1, 11. 2. 25, 10; -10, -25. 4. 43 cm, 40 cm. 6. 160 km, 120 km. 7. *Indicație.*  $\overline{ab} = 10a + b$ ,  $\overline{ba} = 10b + a$ .

10. 20 de ore, 30 de ore. 12.  $\frac{12-2\sqrt{33}}{3}$ ,  $\frac{12+2\sqrt{33}}{3}$ . 15. 25,5 lei, 39 de lei. 16. 7 itemi de 4 puncte și 5 itemi de 5 puncte.

17. *Indicație.* Alcătuiți ecuația  $y^2 - x^2 = 225 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 225$ , unde  $x$  este lungimea catetei, iar  $y$  - lungimea ipotenuzei. Descompuneți numărul 225 în produs de numere naturale. *Răspuns:* 4 triunghiuri. 18. *Indicație.* Fie  $x, y \in \mathbb{N}^*$ .

Rezolvați în  $\mathbb{N}^*$  ecuația  $(x-y)(x+y) = 45$ . 19. 20 de camioane. 21. 120 m.

*Exerciții și probleme recapitulative.* 1. b)  $S = \left\{1\frac{4}{11}\right\}$ ; d)  $S = \left\{-13\frac{2}{3}\right\}$ . 2. b)  $S = \{0\}$ ; c)  $S = \emptyset$ ; d)  $S = \emptyset$ .

4. b)  $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ; d)  $S = \emptyset$ . 5. d)  $S = \{(2; 8)\}$ . 6. b)  $S = \left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$ . 7. 48 de apartamente cu 2 camere și 16 apartamente cu

4 camere. 9. 31 lei. 10. a)  $S = \{-2\}$ ; b)  $S = \left\{-\frac{8}{9}\right\}$ ; c)  $S = \{-1; 1\}$ ; e)  $S = \{-2\}$ . 12. *Indicație.* Aplicați teorema lui Viète.  
 13. a)  $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$ ; b) *Indicație.* Efectuați substituția  $(2x-1)^2 = t$ ; c) *Indicație.* Efectuați substituția  $(x-2)^2$ ; d)  $(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})^2$ . 15. a)  $S = \{(-2; -1)\}$ ; c)  $S = \{(-16,5; -49,5)\}$ . 18. 28%. 19.  $\frac{3+15\sqrt{103}}{26}$ ,  $\frac{-15+3\sqrt{103}}{26}$ ,  $\frac{3-15\sqrt{103}}{26}$ ,  $\frac{-15-3\sqrt{103}}{26}$ . 20. b)  $-1, 1\frac{1}{3}$ ; c)  $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ . 23.  $-\frac{1}{2}$ . 24.  $\left\{-2; 0; 1\frac{1}{4}\right\}$ . 25. 6 trandafiri albi, 15 trandafiri roșii.  
 26. 10 și 45. 27. 1. 28. Dana – 60 de bomboane, Paula – 30 de bomboane. 30. a)  $S = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 1; 1,5\right\}$ ; b)  $S = \{-3; -1; 1\}$ ; c)  $S = \left\{1\frac{1}{5}\right\}$ . 31. Fiul are 12 ani, tatăl – 39 de ani, mama – 33 de ani.

## Capitolul 5. Inecuații. Sisteme de inecuații

§ 1. 3. a)  $S = (-\infty; 2)$ ; b)  $S = (-\infty; -2)$ ; c)  $S = (-\infty; -1]$ ; d)  $S = \left[-\frac{7}{8}; -\infty\right)$ . 4. a)  $S = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ; b)  $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .  
 5. a)  $S = \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ ; b)  $S = \emptyset$ ; c)  $S = [2,5; +\infty)$ ; d)  $S = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$ . 8. 10 numere naturale. 11. Cântarul va arăta între 111 și 125 kg. 12. a)  $S = \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ ; c)  $S = \emptyset$ ; d)  $S = [2,5; +\infty)$ . 13. a)  $x \in [2; +\infty)$ ; b)  $x \in \left(-\infty; \frac{4}{5}\right)$ ; c)  $x \in (3; 10]$ . 14. a)  $S = (1; 4)$ ; c)  $S = [-2; 2]$ ; d)  $S = (-3; 4)$ . 15. 25 de cărți. 16.  $x \in (3; 13)$ . 17. 24 de locuri. 18.  $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{6}\right]$ . 19.  $x \in [1; +\infty)$ .  
 20. b)  $S = \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$ ; c)  $S = \left(-4; -\frac{2}{3}\right]$ . 21. a)  $a \in (-\infty; 2)$ ; b)  $a \in (-\infty; 3)$ . 22. d)  $a \in (-\infty; -2)$ .  
 § 2. 3. a)  $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ ; b)  $S = (-\infty; -8) \cup (6; +\infty)$ ; c)  $S = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right]$ ; d)  $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{5}\right\}$ ; e)  $S = \left\{\frac{2}{7}\right\}$ ; f)  $S = \mathbb{R}$ ;  
 g)  $S = (-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$ ; h)  $S = \left(-1; 1\frac{1}{4}\right)$ . 4. a)  $S = (-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$ ; b)  $S = [-2; 0]$ ; c)  $S = (-6; 5)$ ; d)  $S = (-\infty; -4) \cup [-1; +\infty)$ ; e)  $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ . 5. a)  $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ ; b)  $S = [-5; -3]$ ; d)  $S = (-\infty; -1] \cup [4,5; +\infty)$ . 7. a)  $S = \left[-1; 1\frac{1}{2}\right]$ ;  
 b)  $S = \mathbb{R}$ ; c)  $S = (-5; 4)$ ; d)  $S = \emptyset$ . 8. a)  $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ ; b)  $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ . 9. a)  $S = (-\infty; -2) \cup (0; 3)$ ; b)  $S = (-\infty; -5] \cup \left[-\frac{1}{2}; 3\right]$ ;  
 c)  $S = (-\infty; 1] \cup [2; 3]$ ; d)  $S = [-2; 1) \cup [3; +\infty)$ . 10. Da, poate fi decupat. 11. a)  $S = \left(-\frac{5}{3}; -\frac{9}{8}\right]$ . 12. a)  $x \in [-5; 1) \cup (1; 6]$ ;  
 b)  $x \in [-10; -6] \cup [7; 10]$ . 13. a)  $S = [1; 2] \cup [3; 4]$ ; b)  $S = (-3; -1) \cup (-1; 1)$ . 14. b)  $m \in (-\infty; -5)$ . 15. b)  $a \in \left(0; 1\frac{1}{4}\right)$ .

*Exerciții și probleme recapitulative.* 5. -3. 6. a)  $\left[-\frac{3}{2}; 2\right]$ ; b)  $\left[-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ ; c)  $\left(-\frac{1}{3}; 2\right]$ ; d)  $(-\infty; -1] \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$ .  
 8. a)  $x \in [1; +\infty)$ . 9.  $x \in (1; +\infty)$ . 10. a)  $S = (-4; -1)$ ; b)  $S = \{8\}$ . 11.  $S = \left(\frac{3}{5}; 5\right)$ . 12.  $S = (-\infty; -6) \cup \{-1\} \cup (2; +\infty)$ .  
 13. Nu există așa valori. 14.  $a \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$ .

## Capitolul 6. Elemente de teoria probabilităților și de statistică matematică.

### Elemente de calcul financiar

§ 1. 3. a) Aleator; b) Aleator; c) Imposibil; d) Imposibil; e) Sigur; f) Imposibil. 4. a)  $A$  e mai posibil decât  $B$ ; b)  $A$  e mai puțin posibil decât  $B$ ; c)  $A$  e mai puțin posibil decât  $B$ . 5. Unghiuri, triunghi. 9. a) 15 bile; b) 18 bile; c) 19 bile; d) 11 bile; e) 19 bile.  
 § 2. 1. a) O șansă din șase; c) Nicio șansă. 2. 0,5; 0,5. 3. a)  $\frac{1}{6}$ ; b)  $\frac{2}{3}$ ; c)  $\frac{1}{3}$ ; d)  $\frac{5}{6}$ ; e) 0. 4.  $\frac{1}{15}$ . 5. a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{1}{3}$ ; c)  $\frac{1}{6}$ .  
 7. a)  $\frac{1}{5}$ ; b)  $\frac{1}{4}$ ; c)  $\frac{11}{20}$ . 9. *Indicație.* Se vor număra numerele prime (pare, impare) dintre cele 90 de numere naturale.  
 11.  $\frac{13}{18}$ . 12.  $P(b) = \frac{14}{31}$ ;  $P(f) = \frac{17}{31}$ . 14.  $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$ . 15.  $P = \frac{2}{25}$ .  
 § 4. 1. 20%. 2. 7500 de lei. 3. 500 de elevi. 4. 11 840 de lei. 5. 5,5%. 6. 7326 120 de lei. 7. 20%. 8. 5952 de lei. 9. 9900 de lei. 16. 34 500 u.m. 17. a) 45%; b) 2255 de culegeri; c) 41,25%. 22. a) 25%; b) 6592 de lei. 23. 4000 lei. 25. *Indicație:* 3 luni = 3 : 12 = 0,25 ani; 9 zile = 9 : 360 = 0,025 ani. 27. *Indicație:* 3 luni = 3 : 12 = 0,25 ani;  $S = 14\ 127,75$  lei,  $D = 4\ 127,75$  lei.

*Exerciții și probleme recapitulative.* 3.  $P(v) = \frac{1}{3}$ ;  $P(r) = \frac{2}{3}$ . 4. O față galbenă și cinci fețe roșii. 6. 2) a) 15 milioane de lei; b) 30%. 7. 12%. 8. 12000 de lei. 9. b)  $\frac{2}{25}$ . 10. 0,98. 11.  $\frac{1}{9}$ . 12. 0,1. 13. 13 mere. 16. 8%. 17. 5000 de lei.  
 18. 5 luni =  $\frac{5}{12}$  ani; 15 zile =  $\frac{15}{360}$  ani. 20. Urna  $b$ .

## Geometrie

### Capitolul 1. Cercul

**§ 1.** 4. a) 8 cm; b) 7 cm; c)  $2\sqrt{10}$  cm; d) 2 cm. 5. a) 12 cm; b) 5 cm; c) 15 cm. 6. a) Secantă cercului; b) Secantă cercului; c) Tangentă la cerc; d) Secantă cercului; e) Exterioară cercului. 7.  $r=10$  cm,  $AC=10\sqrt{3}$  cm,  $BM=5$  cm. 8. a) 13,7 cm; b) 3,(4) cm; c) 8 cm. 9. a) Secantă cercului; b) Secantă cercului; c) Exterioară cercului; d) Tangentă la cerc. 10. a) 3 cm; b) 5 cm; c)  $\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$ . 11. a) 10 cm; b)  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  cm. 12.  $60^\circ$ . 15.  $30^\circ$ . 16. 12 cm. 17. a)  $M \in \text{Int } \Delta ABC$ ; b)  $M \in \text{Int } \Delta ABC$ ; c) Dacă  $r > 2$ , atunci  $M \in \text{Int } \Delta ABC$ ; dacă  $r=2$ , atunci  $M \in \mathcal{C}(O, 2)$ ; dacă  $0 < r < 2$ , atunci  $M \in \text{Ext } \Delta ABC$ . 18. 20 cm. 19. 10 cm. 20. 7 cm. 21. 7,5 cm. 22.  $\sqrt{15}$  cm. 24. a) 1; b) 30; c)  $\sqrt{x^2+y^2}$ . 26.  $(12+\sqrt{11})$  cm. 30.  $3\sqrt{3}$  cm. 32. 20 cm sau 40 cm. 33. 8 cm, 15 cm. 34. 5 cm. 38. 60 cm. 39.  $8\sqrt{2}$ .

**§ 2.** 2. a)  $45^\circ$ ; b)  $90^\circ$ ; c)  $125^\circ$ . 3. a)  $MN=KL$ ; b)  $MN < KL$ ; c)  $MN=KL$ . 4. a)  $44^\circ$ ; b)  $152^\circ$ ; c)  $35^\circ$ ; d)  $80^\circ$ . 5. a)  $120^\circ$ ; b)  $72^\circ$ ; c)  $36^\circ$ ; d)  $30^\circ$ ; e)  $30^\circ$ ; f)  $15^\circ$ . 11. Pătrat. 12. Dreptunghi. 13. a)  $50^\circ$ ; b)  $40^\circ$ ; c)  $65^\circ$ . 14. În 50 de minute. 15.  $40^\circ$ . 16.  $90^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . 17.  $180^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ . 18. 18,5 cm. 19. a) 3 coarde și 6 arce. 20. Măsurile arcelor vor fi egale cu  $10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 110^\circ$ . 21. a)  $90^\circ$ ; b)  $35^\circ$ ; c)  $55^\circ$ ; d)  $20^\circ$ . 22. a)  $120^\circ$ ; b)  $150^\circ$ ; c)  $24^\circ$ ; d)  $210^\circ$ . 23. 6 cm. 24.  $\frac{16\sqrt{3}}{3}$  cm. 25.  $80^\circ$  sau  $100^\circ$ . 26.  $20\sqrt{3}$  cm. 27. 17 cm. 28. a)  $64^\circ$ ; b)  $117^\circ$ ; c)  $48^\circ$ ; d)  $57^\circ$ . 33. 18,75 cm. 34.  $\frac{\sqrt{15}}{2}$  cm.

**Exerciții și probleme recapitulative.** 3. 5 cm. 4. 6 cm. 5.  $2\sqrt{13}$  cm. 7. a)  $60^\circ$ ; b)  $17^\circ$ ; c)  $67^\circ$ . 9. a) 6 cm; b)  $4\sqrt{7}$  cm. 10. a) 12 cm; b) 0,5 cm. 11. a)  $52^\circ$  sau  $128^\circ$ ; b)  $74^\circ$ ; c)  $46^\circ$ ; d)  $61^\circ$ . 12. a)  $30^\circ$ ; b)  $150^\circ$ ; c)  $270^\circ$ . 13.  $6\sqrt{3}$  cm. 15.  $4\sqrt{2}$  cm. 17.  $AM=(3\sqrt{2}+2\sqrt{17})$  cm;  $BD=2\sqrt{34-3\sqrt{34}}$  cm. 18. 8,125 cm. 19.  $3\sqrt{13}$  cm. 20. a)  $m(\angle A)=115^\circ, m(\angle B)=40^\circ, m(\angle C)=25^\circ$ ; b)  $m(\angle A)=120^\circ, m(\angle B)=37^\circ, m(\angle C)=23^\circ$ .

### Capitolul 2. Arii

7. a) 7,3 cm, 2,5 cm; b)  $11\sqrt{2}$  cm,  $5\sqrt{2}$  cm; c)  $\frac{2}{3}$  cm,  $\frac{7}{9}$  cm; d) 16 cm, 2 cm. 8. 17 m. 11. a)  $\mathcal{A}=2\sqrt{110}$  cm<sup>2</sup>; c)  $\mathcal{A}=10\sqrt{11}$  cm<sup>2</sup>. 12. a)  $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=49,5$  cm<sup>2</sup>;  $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=36$  cm<sup>2</sup>; b)  $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=87,5$  cm<sup>2</sup>;  $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=50$  cm<sup>2</sup>; c)  $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=53,25$  cm<sup>2</sup>;  $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=45$  cm<sup>2</sup>; d)  $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=21\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>;  $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=\frac{42\sqrt{2}-49}{2}$  cm<sup>2</sup>. 15. 81 cm<sup>2</sup>. 16. 42 cm. 17. 52 cm<sup>2</sup>. 18.  $4\pi$  m<sup>2</sup>. 19. a)  $24\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>; b)  $32\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>; c)  $80\sin 36^\circ$  cm<sup>2</sup>. 20. a)  $P=48$  cm,  $\mathcal{A}=144$  cm<sup>2</sup>; b)  $P=36\sqrt{2}$  cm,  $\mathcal{A}=162$  cm<sup>2</sup>; c)  $P=4a$  cm,  $\mathcal{A}=a^2$  cm<sup>2</sup>; d)  $P=2x\sqrt{2}$  cm,  $\mathcal{A}=\frac{x^2}{2}$  cm<sup>2</sup>. 21. a) De 9 ori; b) De 49 de ori; c) De  $n^2$  ori. 22. a) De 2 ori; b) De  $\sqrt{10}$  ori; c) De  $4-\sqrt{11}$  ori. 23. a) De 4 ori; b) De 25 de ori; c) De  $\frac{8}{3}$  ori. 24. 63 cm<sup>2</sup>. 25.  $\frac{63\sqrt{3}}{2}$  cm<sup>2</sup>. 26. 216 cm<sup>2</sup>. 27. 68%. 28.  $(144\sqrt{2}-96)$  cm<sup>2</sup>. 29. a) 400g; b) 2100 g. 30. 48 cm<sup>2</sup>. 31. 15 cm<sup>2</sup>. 32. 900 cm<sup>2</sup>. 33. 13 cm. 34. 70 cm<sup>2</sup>. 35.  $\frac{S(m+2n)}{2(m+n)}$ . 36.  $P=128$  cm,  $\mathcal{A}=480$  cm<sup>2</sup>. 37.  $\frac{135}{2}$  cm<sup>2</sup>. 38. Înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului  $ABC$ . 39.  $\pi$  m. 40. 6 cm<sup>2</sup>. 41. 294 cm<sup>2</sup>. 42. 170 cm<sup>2</sup>. 44.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}r^2$ .

### Capitolul 3. Poliedre

**§ 1.** 3. b). 4.  $\mathcal{A}=54$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=27$  cm<sup>3</sup>. 5.  $\mathcal{V}=64$  cm<sup>3</sup>,  $\mathcal{A}=96$  cm<sup>2</sup>. 6.  $\mathcal{A}=24$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=8$  cm<sup>3</sup>. 7. 27 l. 9. 150 cm<sup>2</sup>. 10. 8 cm<sup>3</sup>. 11. 7,2 kg. 12.  $6\sqrt{3}$  cm. 13.  $3(2+\sqrt{3})$  cm. 14. a)  $4\sqrt{3}$  cm; b)  $4\sqrt{2}$  cm. 15.  $\mathcal{A}=1536$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=4096$  cm<sup>3</sup>.

**§ 2.** 4.  $\mathcal{A}=214$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=210$  cm<sup>3</sup>. 5.  $\mathcal{A}_1=156$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=236$  cm<sup>2</sup>,  $d=5\sqrt{5}$  cm. 6. 188 cm<sup>2</sup>. 7. 840 cm<sup>3</sup>. 8.  $\mathcal{A}_1=96$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=126$  cm<sup>2</sup>. 9.  $\mathcal{A}_1=126$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=63\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. 10.  $\mathcal{A}_1=36\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=44\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. 11. 18 cm<sup>2</sup>. 12.  $\mathcal{A}_1=(96+32\sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=64\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. 13.  $\frac{45\sqrt{3}}{4}$  cm<sup>3</sup>. 14.  $\mathcal{A}_1=\left(105+\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=\frac{175\sqrt{3}}{4}$  cm<sup>3</sup>. 15.  $\sqrt{7}$  cm.

**Indicație.** Dacă  $x, y, z$  sunt dimensiunile paralelipipedului, atunci  $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$  este lungimea diagonalei. 16.  $\mathcal{A}_1=112$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=144$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=112$  cm<sup>3</sup>. 17. 200 cm<sup>3</sup>. 18.  $\mathcal{A}_1=288$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=360$  cm<sup>2</sup>. 19.  $19\sqrt{3}$  kg  $\approx 32,87$  kg. 20.  $\mathcal{A}_1=290$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=300$  cm<sup>3</sup>. 21.  $\mathcal{A}_1=128$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=160$  cm<sup>2</sup>. 22.  $\mathcal{A}_1=90$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=(90+27\sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=\frac{135\sqrt{3}}{2}$  cm<sup>3</sup>. 23.  $180\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. 24.  $120\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. 25. b). 26. 160 cm<sup>3</sup>. 27. 400 cm<sup>3</sup>. 28. 364,5 cm<sup>3</sup>. 29. 10 cm<sup>2</sup>. 30.  $\mathcal{A}_1=120$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=(120+12\sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>. 31. 12 m<sup>3</sup>. 32. 1,2 cm. 33. a)  $2\sqrt{38}$  cm; b) 248 cm<sup>2</sup>. 34. a)  $\mathcal{A}_1=288\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{A}_2=32(9\sqrt{3}+2)$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=384\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>; b) 24 cm. 35.  $\mathcal{A}_1=(32\sqrt{3}+144)$  cm<sup>2</sup>,  $\mathcal{V}=96\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. 36. 1 dm<sup>3</sup>. 37. 12 saci. 38. 13 cm. 39. 6 cm.

- § 3.** 1.  $45 \text{ cm}^2$ . 2.  $\mathcal{A}_l = 45\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{A}_t = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 3.  $18 \text{ cm}^2$ . 4.  $\mathcal{A}_l = (36\sqrt{3} + 72) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .  
 5.  $63\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . 6. b). 7.  $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$ . 8.  $\mathcal{A}_l = 60 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 48 \text{ cm}^3$ . 9.  $\mathcal{A}_l = 360 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 400 \text{ cm}^3$ .  
 10.  $\mathcal{A}_l = 108 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 36\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 11.  $\mathcal{A}_l = 80 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{A}_t = 144 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 64 \text{ cm}^3$ . 12.  $\mathcal{A}_l = (24\sqrt{3} + 48) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .  
 18. a)  $\mathcal{P} = 24 \text{ m}$ ,  $\mathcal{A}_l = 144 \text{ m}^2$ ,  $\mathcal{A} = 180 \text{ m}^2$ ; b)  $\mathcal{P} = 52 \text{ m}$ ,  $\mathcal{A}_l = 520 \text{ m}^2$ ,  $l = 20 \text{ m}$ ; c)  $a = 9 \text{ m}$ ,  $\mathcal{P} = 36 \text{ m}$ ,  $\mathcal{A} = 369 \text{ m}^2$ ;  
 d)  $a = 11 \text{ m}$ ,  $l = 18 \text{ m}$ ,  $\mathcal{A} = 517 \text{ m}^2$ ; e)  $a = 8 \text{ m}$ ,  $\mathcal{P} = 32 \text{ m}$ ,  $l = 22 \text{ m}$ . 19.  $\mathcal{A}_l = 60\sqrt{2} \text{ cm}^2$ . 21.  $32\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .  
 22.  $(48\sqrt{3} + 96) \text{ cm}^2$ . 23.  $\frac{384\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ . 24.  $\sqrt{5}$ . 25.  $\mathcal{A}_l = 150\sqrt{7} \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 500\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 26.  $\mathcal{A}_l = 384 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 384 \text{ cm}^3$ .  
 27. a)  $\mathcal{A}_l = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ ; b)  $\frac{1}{9}$ . 28.  $64\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 29. Mihai. 30. 6 cm.

- Exerciții și probleme recapitulative.** 1. a)  $720^\circ$ ; b)  $1080^\circ$ ; c)  $1440^\circ$ . 2.  $\frac{10\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$ . 3.  $\frac{128\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ .  
 4.  $\mathcal{A}_l = 232 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 224 \text{ cm}^3$ . 5.  $\mathcal{A}_l = 216 \text{ cm}^2$ . 6.  $\mathcal{A}_l = 96 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 32\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 7.  $\mathcal{A}_l = 24 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .  
 8. a)  $\mathcal{A}_l = 648 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 810 \text{ cm}^3$ ; b)  $56,25 \text{ cm}^2$ . 10. a)  $4\sqrt{3} \text{ cm}$ ; b)  $192 \text{ cm}^3$ . 11.  $\frac{3\sqrt{7}}{2} \text{ cm}$ . 12.  $h = 3,75 \text{ cm}$ ,  
 $\mathcal{V} = 281,25 \text{ cm}^3$ . 13.  $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$ . 14.  $1224 \text{ cm}^3$ . 15.  $252 \text{ cm}^2$ . 16.  $4\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $\mathcal{V} = 128\sqrt{2} \text{ cm}^3$ . 17.  $148 \text{ cm}^2$ .  
 18.  $d = 3\sqrt{11} \text{ cm}$ ,  $\mathcal{A}_l = 190 \text{ cm}^2$ . 19. Patru diagonale de  $2\sqrt{43} \text{ cm}$  și două de  $4\sqrt{13} \text{ cm}$ ,  $\mathcal{A}_l = (108\sqrt{3} + 288) \text{ cm}^2$ ,  
 $\mathcal{V} = 432\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . 20.  $\mathcal{A}_l = 940 \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 4200 \text{ cm}^3$ . 21.  $\mathcal{A}_l = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ . 22. a)  $6\sqrt{6} \text{ cm}$ ; b)  $4\sqrt{3} \text{ cm}$ ;  
 c)  $288 \text{ cm}^3$ . 23.  $\frac{4\sqrt{11}}{3} \text{ cm}$ . 24.  $\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

## Capitolul 4. Corpuri rotunde

- § 1.** 3. a), c) Da; b) Nu. 5. a)  $\mathcal{A}_l = 150\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 250\pi \text{ cm}^3$ ; b)  $\mathcal{A}_l = 6\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 2\pi \text{ cm}^3$ ; c)  $\mathcal{A}_l = 0,96\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 0,128\pi \text{ cm}^3$ .  
 6.  $\mathcal{A}_l = 130\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 200\pi \text{ cm}^3$ . 7.  $96\pi \text{ cm}^3$  sau  $72\pi \text{ cm}^3$ . 8. a)  $\mathcal{A}_l = \left(192\sqrt{3} + \frac{288}{\pi}\right) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{1152\sqrt{3}}{\pi} \text{ cm}^3$  sau  
 $\mathcal{A}_l = \left(192\sqrt{3} + \frac{96}{\pi}\right) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{1152}{\pi} \text{ cm}^3$ ; b)  $\mathcal{A}_l = \left(100 + \frac{50}{\pi}\right) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{250}{\pi} \text{ cm}^3$ ; c)  $\mathcal{A}_l = \left(\frac{128}{\pi} + \frac{256}{\sqrt{3}}\right) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{1024}{\pi\sqrt{3}} \text{ cm}^3$   
 sau  $\mathcal{A}_l = \left(\frac{128}{3\pi} + \frac{256}{\sqrt{3}}\right) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{1024}{3\pi} \text{ cm}^3$ . 9.  $40\pi \text{ cm}^2$ . 10. a)  $60 \text{ cm}^2$ ; b)  $8 \text{ cm}^2$ ; c)  $2\sqrt{3}x^2$ . 11. a)  $192\pi \text{ cm}^3$ ;  
 b)  $36\sqrt{2}\pi \text{ cm}^3$ . 12. a)  $375\pi \text{ kg}$ ; b)  $60,8\pi \text{ kg}$ . 13.  $66\pi \text{ cm}^2$ . 14. A doua. 15.  $\mathcal{A}_l = 125\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 187,5\pi \text{ cm}^3$ .  
 16.  $\mathcal{A}_l = 130\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 200\pi \text{ cm}^3$ . 17. 4 cm. 19.  $1350 \text{ cm}^3$ . 20.  $12\sqrt{2} \text{ cm}$ ,  $\approx 47\%$ . 21. 22 de piulițe, 16% din volumul  
 bazei se pierde. 22. De 8 ori. 23. De  $2\sqrt{2}$  ori.

- § 2.** 5.  $\mathcal{A}_l = 24\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 12\pi \text{ cm}^3$ . 6.  $\mathcal{A} = 312\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 480\pi \text{ cm}^3$ . 12.  $\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \text{ cm}$ . 13.  $2\sqrt{105} \text{ cm}^2$ . 14.  $\frac{48}{5}\pi \text{ cm}^3$ .  
 15.  $\mathcal{A}_l = \sqrt{R^4 + S^2}\pi$ ,  $\mathcal{V} = \frac{RS\pi}{3}$ . 16. 25 ml. 17.  $\mathcal{A}_l = \frac{h^2}{d^2}\sqrt{d^2\pi S + S^2}$ ,  $\mathcal{V} = \frac{Sh^3}{3d^2}$ . 18.  $\mathcal{V} = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$ . 19.  $24\pi \text{ cm}^2$ .  
 20.  $125\pi \text{ cm}^3$ . 21.  $256\pi \text{ cm}^3$ . 22.  $384\pi \text{ cm}^3$ . 23.  $1056\pi \text{ cm}^3$ .

- § 3.** 5. a) 8 cm; b) 24 cm; c) 4 cm. 6.  $6400\pi \text{ km}$ . 7. a)  $\mathcal{A} = 144\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 288\pi \text{ cm}^3$ ; b)  $\mathcal{A} = 6\frac{30}{49}\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 2\frac{286}{343}\pi \text{ cm}^3$ ;  
 c)  $\mathcal{A} = 108\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 108\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ . 8. a)  $81\pi \text{ cm}^2$ ; b)  $180\pi \text{ cm}^2$ ; c) 0. 9. Unui băiat. 10. a)  $3364\pi \text{ cm}^2$ ; b)  $5476\pi \text{ cm}^2$ .  
 11.  $43 \text{ cm}^2$ . 12.  $\frac{3}{2\sqrt{\pi}} \text{ cm}$ .

## Exerciții și probleme recapitulative

3.  $\mathcal{A}_l = \left(20\sqrt{15} + \frac{150}{\pi}\right) \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{150\sqrt{5}}{\pi} \text{ cm}^3$ . 4.  $\mathcal{A}_l = 15,75\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{9\sqrt{35}}{8}\pi \text{ cm}^3$ . 5. 6 cm. 6.  $36 \text{ cm}^3$ .  
 7. a)  $\frac{200\sqrt{3}}{27}\pi \text{ cm}^3$ ; b)  $\frac{100}{3\sqrt{13}}\pi \text{ cm}^3$ . 8.  $\frac{54}{\pi} \text{ cm}^3$ . 9.  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ . 10. Cazul I.  $\mathcal{A}_l = 70\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 175\pi \text{ cm}^3$ . Cazul II.  
 $\mathcal{A}_l = 70\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 245\pi \text{ cm}^3$ . 11. Masa bilei este mai mare. 12.  $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ . 13. 2 cm. 14. 7 cm. 15. Nu.  
 16.  $72\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$ . 17. Sfera. 18.  $\mathcal{A}_l = 108\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = 72\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ . 19.  $\mathcal{A}_l = \left(169 + \frac{338\sqrt{3}}{3}\right)\pi \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{V} = \frac{2197\sqrt{3}}{9}\pi \text{ cm}^3$ .  
 20.  $90^\circ$ . 21.  $60^\circ$ . 22.  $\frac{\pi a^3}{4}$ . 23. 13 cm. 24. a)  $256\pi \text{ cm}^3$ ; b)  $384\pi \text{ cm}^3$ .

# Cuprins

## Algebră

### Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale.

#### Recapitulare și completări

§ 1. Mulțimea numerelor reale .....	4
§ 2. Operații cu numere reale .....	9
§ 3. Puteri și radicali .....	13
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	17
<i>Test sumativ</i> .....	19

### Capitolul 2. Rapoarte algebrice

§ 1. Noțiunea de raport algebric .....	20
§ 2. Amplificarea și simplificarea rapoartelor algebrice .....	23
§ 3. Operații aritmetice cu rapoarte algebrice. Puterea cu exponent natural a unui raport algebric .....	25
§ 4. Transformări identice ale expresiilor algebrice .....	28
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	30
<i>Test sumativ</i> .....	31

### Capitolul 3. Funcții

§ 1. Noțiunea de funcție. Recapitulare și completări .....	32
§ 2. Funcții numerice. Recapitulare și completări .....	36
§ 3. Funcția de gradul II .....	42
§ 4. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^3$ .....	58
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	59
<i>Test sumativ</i> .....	62

### Capitolul 4. Ecuații. Sisteme de ecuații

§ 1. Ecuații de forma $ax + b = 0$ , $a, b \in \mathbb{R}$ . Recapitulare și completări .....	63
§ 2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută .....	67
§ 3. Ecuații raționale .....	72
§ 4. Sisteme de ecuații .....	74
§ 5. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și/sau al sistemelor de ecuații .....	78
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	81
<i>Test sumativ</i> .....	83

### Capitolul 5. Inecuații. Sisteme de inecuații

§ 1. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută. Recapitulare și completări .....	84
§ 2. Inecuații de gradul II cu o necunoscută. Metoda intervalelor .....	90
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	95
<i>Test sumativ</i> .....	96

### Capitolul 6. Elemente de teoria probabilităților și de statistică matematică.

#### Elemente de calcul financiar

§ 1. Noțiunea de eveniment .....	97
§ 2. Noțiunea de probabilitate .....	101
§ 3. Elemente de statistică matematică .....	105
§ 4. Elemente de calcul financiar .....	107
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	114
<i>Test sumativ</i> .....	116

## Geometrie

### Capitolul 1. Cercul

§ 1. Recapitulare și completări .....	118
§ 2. Unghiuri înscrise în cerc .....	124
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	129
<i>Test sumativ</i> .....	130

### Capitolul 2. Arii

§ 1. Noțiunea de arie .....	131
§ 2. Aria paralelogramelor .....	131
§ 3. Aria triunghiului .....	133
§ 4. Aria trapezului .....	134
§ 5. Aria poligonului regulat. Lungimea cercului și aria discului .....	135
<i>Exerciții și probleme</i> .....	136
<i>Test sumativ</i> .....	139

### Capitolul 3. Poliedre

§ 1. Poliedre .....	140
§ 2. Prisma .....	142
§ 3. Piramida. Trunchiul de piramidă .....	148
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	154
<i>Test sumativ</i> .....	155

### Capitolul 4. Corpuri rotunde

§ 1. Cilindrul (circular drept) .....	156
§ 2. Conul (circular drept). Trunchiul de con .....	161
§ 3. Sfera .....	166
<i>Exerciții și probleme recapitulative</i> .....	168
<i>Test sumativ</i> .....	169

<b>Răspunsuri și indicații</b> .....	170
--------------------------------------	-----

Manual  
CLASA 9

