MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

12

Ion Achiri
Vasile Ciobanu
Petru Efros
Valentin Garit
Vasile Neagu
Andrei Poștaru
Nicolae Prodan
Dumitru Taragan
Anatol Topală

# Matematică

## Manual pentru clasa a XII-a


EDITURA PRUT

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri
Vasile Ciobanu
Petru Efros
Valentin Garit
Vasile Neagu
Andrei Poștaru
Nicolae Prodan
Dumitru Taragan
Anatol Topală

# Matematică

## Manual pentru clasa a XII-a

EDITURA PRUT

Acest manual este proprietate publică, editat din sursele financiare ale Fondului special pentru manuale.

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 718 din 21 iunie 2023 ca urmare a evaluării calităţii metodico-ştiinţifice.

______________________________________________

(Denumirea instituţiei de învăţământ)

EVIDENŢA UTILIZĂRII MANUALULUI:

| Anul de folosire | Numele şi prenumele elevului | Anul de studii | Aspectul manualului | |
|---|---|---|---|---|
| | | | la primire | la returnare |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |

• Dirigintele verifică dacă numele şi prenumele elevului sunt scrise corect.
• Elevii nu vor face niciun fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia cu unul dintre următoarele calificative: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferenţiar universitar, UPS „Ion Creangă” (modulele 4, 9)
Vasile Ciobanu, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 1, 9)
Petru Efros, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Valentin Garit, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 7, 8, 9)
Vasile Neagu, doctor habilitat, profesor universitar, USM (modulele 3, 9)
Andrei Poştaru, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 5, 6)
Nicolae Prodan, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 6, 9)
Dumitru Taragan, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 2, 9)
Anatol Topală, doctor, conferenţiar universitar, USM (modulele 6, 9)



Redactor: Vitalie Puţuntică
Corector: Fulga Poiată
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu
Machetare computerizată: Valentina Stratu



Editura Prut Internaţional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

**Achiri, Ion**

Matematică: Manual pentru clasa a XII-a / Ion Achiri, Vasile Ciobanu, Petru Efros [et al.]; Ministerul Educaţiei şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internaţional, 2023 (UNISOFT, Ucraina). – 263, [1] p.

ISBN 978-9975-54-738-3

51(075.3)
A 47

Imprimat la Tipografia UNISOFT

# Prefață

Prezentul manual este elaborat conform Curriculumului la matematică pentru liceu, ediția 2019, axat pe formarea de competențe şi realizarea prevederilor curriculare pentru clasa a XII-a. Manualul conține compartimente ce țin de *elemente de analiză matematică*, *geometrie*, *binomul lui Newton*, *combinatorică*, *teoria probabilităților*, *statistică matematică* şi *calcul financiar* şi este structurat pe module.

Pentru orientare, la începutul fiecărui modul 1–8 sunt formulate obiectivele educaționale care pot fi atinse studiind modulul respectiv.

În secvența *Exerciții şi probleme recapitulative* se propun şi sarcini didactice cu un nivel sporit de complexitate şi generalizare în contextul integrării cunoştințelor dobândite şi formării competențelor specifice la matematică.

Pentru fiecare modul se propune un tabel de sinteză – *Harta conceptuală*, care poate fi utilizată la etapa de sistematizare, clasificare, generalizare a materiei studiate în cadrul modulului.

În scopul unei recapitulări finale şi pregătirii pentru examenul de bacalaureat, este conceput un modul special, *Recapitulare finală* (modulul 9), care conține o sinteză a materiei teoretice studiate în clasele anterioare, precum şi exerciții şi probleme recapitulative (§ 11). Ținând cont de faptul că la examenul de BAC nu se dau răspunsurile la itemii testului, autorii, în mod intenționat, nu prezintă răspunsurile la exercițiile şi problemele recapitulative din acest paragraf. Din această perspectivă oferim posibilitate elevilor şi elevelor să se antreneze în contextul rezolvării corecte a exercițiilor şi problemelor propuse. Cadrul didactic le va acorda, la necesitate, ajutor.

Manualul este conceput astfel, încât să poată fi utilizat la predarea–învățarea–evaluarea matematicii atât în clasele cu profil real, cât şi în cele cu profil umanist, arte, sport. De reținut că **materialul (textul) marcat în partea stângă cu o bară verticală este prevăzut numai pentru profilul real. Pentru profilurile umanist, arte, sport aceste informații pot fi propuse în scop de extindere a cunoştințelor.**

În plus, în conformitate cu obiectivele preconizate, exercițiile şi problemele de la sfârşitul fiecărui paragraf, exercițiile şi problemele recapitulative, probele de evaluare pentru fiecare modul sunt clasificate după profiluri[*)]. Exercițiile marcate cu * au un grad sporit de complexitate şi nu sunt obligatorii pentru rezolvare la profilul respectiv. Obiectivele marcate cu * vizează numai elevii şi elevele de la profilul real. Exercițiile notate cu au fost propuse în cadrul examenelor de bacalaureat din Republica Moldova.

Menționăm că testele sumative sunt orientative. Ținând cont de specificul clasei, cadrul didactic le poate modifica pe cele propuse sau poate elabora alte teste sumative.

Pentru notații au fost utilizate simbolurile şi notațiile întâlnite frecvent în publicațiile de specialitate şi recomandate de Curriculumul gimnazial la matematică.

Stimați profesori şi stimate profesoare, dragi elevi şi eleve, sperăm ca acest manual să devină un instrument didactic util pentru studierea matematicii şi formarea competențelor. Totodată, vom fi recunoscători pentru obiecțiile şi sugestiile dumneavoastră, ce vor contribui la îmbunătățirea conținutului manualului.

*Autorii*

---

[*)] La fiecare profil, exercițiile şi problemele sunt clasificate pe niveluri:
a) profilurile umanist, arte, sport: **A** – cunoaştere şi înțelegere, **B** – aplicare, **C** – integrare;
b) profilul real: $\mathbf{A}_1$ – cunoaştere şi înțelegere, $\mathbf{B}_1$ – aplicare, $\mathbf{C}_1$ – integrare.
Exercițiile şi problemele destinate profilurilor umanist, arte, sport vor fi propuse spre rezolvare şi elevilor de la profilul real.

Modulul

# 1

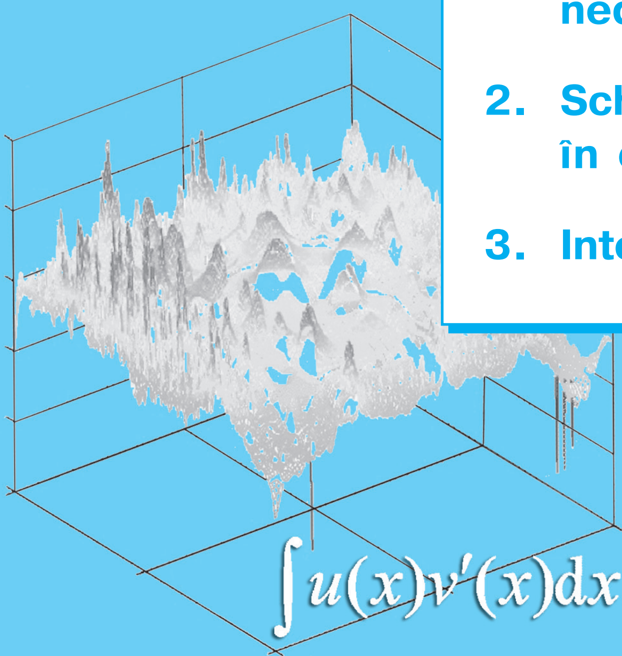
# Primitive și integrale nedefinite

*Nu poți învăța matematica doar privindu-ți vecinul făcând asta!*
A. Niven

***Obiectivele modulului***

- calcularea primitivelor şi a integralelor nedefinite aplicând proprietățile respective şi tabelul integralelor nedefinite;
- calcularea integralelor nedefinite aplicând:
  a) schimbarea de variabilă;
  b) integrarea prin părți;
- aplicarea în diverse contexte a noțiunilor de primitivă şi de integrală nedefinită.





$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$$

# § 1 NOȚIUNEA DE PRIMITIVĂ A UNEI FUNCȚII. NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ NEDEFINITĂ

## 1.1. Noțiunea de primitivă

Una dintre problemele de bază ale calculului diferențial constă în determinarea derivatei unei funcții date. Diverse probleme de analiză matematică şi multiplele aplicații ale derivatei în geometrie, mecanică şi tehnică conduc la o problemă inversă: fiind dată funcția $f$, să se afle o funcție $F$, astfel încât derivata ei să fie egală cu $f$. Acest procedeu poartă denumirea de calcul integral.

Restabilirea funcției, fiind dată derivata acesteia, reprezintă una dintre problemele fundamentale ale calculului integral.

**Definiție**

Fie $I$ un interval deschis din $\mathbb{R}$ şi $f\colon I \to \mathbb{R}$ o funcție. Funcția $F$, definită pe intervalul $I$, se numeşte **primitivă** a funcției $f$ pe $I$ dacă:
1) $F$ este derivabilă pe $I$; 2) $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$.

Dacă intervalul $I$ este închis la stânga (la dreapta) şi $a$ este extremitatea sa de stânga (de dreapta), atunci prin derivata funcției $F$ în punctul $a$ se înțelege derivata la dreapta (la stânga) a lui $F$ în $a$.

**Exemple**

**1** Funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = x^3$, este o primitivă a funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2$, deoarece $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

**2** Funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \sin x$, este o primitivă a funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$, deoarece $(\sin x)' = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

**3** Dacă $a > 0,\ a \neq 1$, atunci funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$, este o primitivă a funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

**4** Funcția $F(x) = \dfrac{1}{x}$ nu este o primitivă a funcției $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ pe intervalul $(-\infty, +\infty)$, deoarece egalitatea $F'(x) = f(x)$ nu este adevărată în punctul zero. Însă pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0)$ şi $(0, +\infty)$ funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**Observație**

Problema determinării primitivei unei funcții date $f$ se rezolvă neunivoc. Într-adevăr, dacă $F$ este o primitivă a funcției $f$ pe intervalul deschis $I$, adică $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$, atunci funcția $F(x) + C$, unde $C$ este o constantă arbitrară, este de asemenea primitivă a funcției $f$ pe $I$, deoarece $(F(x) + C)' = f(x),\ \forall x \in I$.

**Exemplu**

Primitivă a funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$, este nu numai funcția $F_1(x) = \sin x$, dar şi funcția $F(x) = \sin x + C$, deoarece $(\sin x + C)' = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall C \in \mathbb{R}$.

**Teorema 1**

Dacă $F\colon I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\colon I \to \mathbb{R}$ pe intervalul deschis $I$, atunci orice altă primitivă a funcției $f$ pe $I$ poate fi scrisă sub forma $F + C$, unde $C$ este o constantă arbitrară.

*Demonstrație*:

Fie $\Phi\colon I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f$ pe intervalul $I$, adică $\Phi'(x) = f(x),\ \forall x \in I$. Atunci $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ \forall x \in I$. Obținem $\Phi(x) - F(x) = C$, unde $C$ este o constantă oarecare. Aşadar, $\Phi(x) = F(x) + C$. ►

**Observație** Graficele oricăror două primitive ale funcției $f$ se obțin unul din altul printr-o translație de-a lungul axei $Oy$ (fig. 1.1).

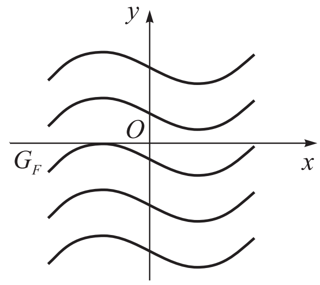



Fig. 1.1

Se poate demonstra următoarea teoremă.

**Teorema 2** Orice funcție $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ admite primitive pe $[a, b]$.

## 1.2. Noțiunea de integrală nedefinită

**Definiție** Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ ($I$ – interval deschis din $\mathbb{R}$) o funcție care admite primitive. Mulțimea tuturor primitivelor funcției $f$ se numește **integrală nedefinită a funcției $f$**.

Se notează $\int f(x)\mathrm{d}x$ și se citește „integrala din $f(x)\mathrm{d}x$”.

Simbolul $\int$ se numeşte ***semn de integrare***.

Deci, $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, unde $F$ este o primitivă a funcției $f$ pe intervalul deschis $I$, adică $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, iar $C$ – o constantă arbitrară.

Operația de calcul al primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numește ***integrare***. Menționăm că scrierea $\int f(x)\mathrm{d}x$ trebuie considerată ca o notație indivizibilă, deci părților $\int$ sau $f(x)\mathrm{d}x$, luate separat, nu li se atribuie aici nicio semnificație. Funcția $f$ se numește ***funcție de sub semnul de integrare*** sau ***integrand***, variabila $x$ – ***variabilă de integrare***, iar $C$ – ***constantă de integrare***.

**Exemple**

**1** $\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, deoarece $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

**2** $\int \cos x\, \mathrm{d}x = \sin x + C$, deoarece $(\sin x + C)' = \cos x$.

**3** $\int e^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$, deoarece $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)' = e^{-2x}$.

**4** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$, deoarece dacă $x > 0$, atunci $\ln|x| = \ln x$ și derivata părții drepte este

$$(\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}.$$

Deci coincide cu funcția de sub semnul integralei.

Dacă $x < 0$, atunci $\ln|x| = \ln(-x)$ și derivată părții drepte este

$$(\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = -\frac{1}{x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

Deci formula este corectă pentru valorile pozitive și negative ale lui $x$.

## 1.3. Tabelul integralelor nedefinite uzuale (primitivelor imediate)

Prezentăm tabelul integralelor uzuale. Majoritatea formulelor din acest tabel rezultă nemijlocit din definiția operației de integrare ca operație inversă derivării. Valabilitatea celorlalte formule poate fi verificată uşor prin derivare.

| | |
|---|---|
| 1 | $\int 0\,\mathrm{d}x = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ |
| 2 | $\int 1\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ |
| 3 | $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}$ |
| 4 | $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall x \in (0, +\infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |
| 5 | $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,\ \forall x \in (0, +\infty)$ |
| 6 | $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ |
| 7 | $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ |
| 8 | $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\|x\| + C,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ |
| 9 | $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ |
| 10 | $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$ |
| 11 | $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \,\middle\|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| 12 | $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\,x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,\|\, k \in \mathbb{Z}\}$ |
| 13 | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ \forall x \in (-1, 1)$ |
| 14 | $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + C = -\mathrm{arcctg}\,x + C_1,\ \forall x \in \mathbb{R}$ |
| 15 | $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ |
| 16 | $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in (-a, a),\ a > 0$ |
| 17 | $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\},\ a \neq 0$ |
| 18 | $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\|x + \sqrt{a^2+x^2}\| + C,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*$ |
| 19 | $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\|x + \sqrt{x^2-a^2}\| + C,\ a > 0,\ x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ |

## 1.4. Proprietăți ale integralei nedefinite

**1°** Derivata integralei nedefinite este egală cu funcția de sub semnul de integrare:

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x);$$

diferențiala integralei nedefinite este egală cu expresia de sub semnul de integrare:

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

*Demonstrație*:

$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$ şi

$\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}(F(x)+C) = \mathrm{d}F(x)+\mathrm{d}C = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x.$ ►

**2°** Integrala nedefinită a diferențialei unei funcții este egală cu această funcție plus o constantă arbitrară, adică $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C,$ unde funcția $F$ este primitiva funcției $f$.

*Demonstrație*:

Deoarece $\mathrm{d}F(x) = F'(x)\mathrm{d}x,$ rezultă că $\int \mathrm{d}F(x) = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$ ►

**3°** Dacă funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ ($I$ – interval deschis din $\mathbb{R}$) admite primitive şi $k \in \mathbb{R}^*$, atunci şi funcția $kf$ admite primitive pe $I$ şi are loc relația: $\int k\cdot f(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x,$ adică factorul constant poate fi extras de sub semnul de integrare.

*Demonstrație*:

Fie $F$ o primitivă a funcției $f$, adică $F'(x) = f(x).$ Atunci, $kF$ este o primitivă a funcției $kf$. Deci, $(k\cdot F(x))' = kF'(x) = kf(x).$ De aici rezultă egalitatea:

$k\int f(x)\mathrm{d}x = k(F(x)+C) = kF(x)+C_1 = \int kf(x)\mathrm{d}x,$ unde $C_1 = kC.$ ►

**4°** Dacă $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ sunt funcții care admit primitive pe intervalul deschis $I$, atunci şi funcțiile $f+g,$ $f-g$ admit primitive pe $I$ şi au loc relațiile:

a) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x;$ b) $\int[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x.$

*Demonstrație*:

a) Fie $F$ şi $G$ primitivele funcțiilor $f$ şi respectiv $g$.
Atunci, funcția $F+G$ este primitivă a funcției $f+g$.

Deci, $\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = [F(x)+C_1]+[G(x)+C_2] = [F(x)+G(x)]+[C_1+C_2] =$

$= [F(x)+G(x)]+C = \int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x.$

Relația b) se demonstrează similar. ►

**5°** Integrala nedefinită este invariantă la înlocuirea variabilei de integrare $x$ cu orice funcție derivabilă, adică dacă $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C,$ atunci $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C,$ unde $u = \varphi(x)$ – orice funcție derivabilă de $x$.

*Demonstrație*:

Deoarece $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C,$ rezultă că $F'(x) = f(x).$

Considerăm funcția $F(u) = F(\varphi(x)).$ Din invarianța diferențialei avem:

$$\mathrm{d}F(u) = F'(u)\mathrm{d}u = f(u)\mathrm{d}u.$$

De aici, $\int f(u)\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}F(u) = F(u)+C.$ ►

**6°** Fie funcția $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ şi $F\colon I \to \mathbb{R}$ o primitivă pe intervalul deschis $I$ a funcției $f$, iar $k$ şi $b$ constante, $k \neq 0$. Atunci, $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$

*Demonstrație*:

Deoarece $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, în conformitate cu regula de calcul al derivatei funcției compuse, avem:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),\ \forall x \in I.$$

Deci, $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int f(kx+b)\mathrm{d}(kx+b) = \frac{1}{k}\int f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{k}F(u)+C,$

unde $u = kx+b$. ►

**7°** Dacă numărătorul funcției de sub semnul integralei nedefinite este egal cu derivata expresiei de la numitor, atunci integrala nedefinită este egală cu logaritmul natural al valorii absolute a expresiei de la numitor.

*Demonstrație*:

Fie funcțiile $f, f'\colon I \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$, $\forall x \in I$.

Atunci, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|+C = \ln|f(x)|+C.$ ►

**Probleme rezolvate**

**1** Să se calculeze:

a) $\int (6x^2-3x+5)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x$; c) $\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\cdot\int f(x)\mathrm{d}x$

$\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b)+C$

a) Folosind proprietățile 3° şi 4°, obținem:

$$\int (6x^2-3x+5)\,\mathrm{d}x = 6\int x^2\mathrm{d}x - 3\int x\,\mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

Calculăm integralele b), c) şi d) folosind proprietățile 6° şi 7°.

b) Aici $k=5$, $b=0$. Obținem: $\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$

c) Aici $k=2$, $b=-1$.

$$\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{101}(2x-1)^{101}+C = \frac{1}{202}(2x-1)^{101}+C.$$

**2** Un mobil se mişcă în sensul pozitiv pe o axă. Fie $v(t)$ viteza instantanee a mobilului în orice moment $t$. Să se determine legea $s = s(t)$ a mişcării mobilului, ştiind viteza instantanee $v(t)$ în momentul $t_0$.

*Rezolvare*:

Se ştie (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul 4, § 1, secvența 1.2.2) că viteza instantanee $v(t)$ a unui mobil în orice moment $t$ este derivata funcției $s(t)$ care reprezintă legea mişcării mobilului.

Deci, determinarea legii $s = s(t)$ a mişcării mobilului, ştiind viteza instantanee $v(t)$ în momentul $t_0$, se reduce la determinarea primitivei funcției $v(t)$, deoarece $s'(t) = v(t)$.

Orice primitivă a funcției $v(t)$ are forma $s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + C.$

Constanta $C$ poate fi determinată din condiții suplimentare.

Fie, de exemplu, $v(t) = a(t-t_0)+v_0$, unde $v_0 = v(t_0)$, $a$ – accelerația.

Atunci, $s(t) = \int [a(t-t_0)+v_0]\mathrm{d}t = \frac{a(t-t_0)^2}{2} + v_0 t + C.$

**3** Un mobil se mişcă în sensul pozitiv pe axa $Ox$ cu accelerația constantă $a$. În momentul inițial $t_0 = 0$ mobilul se află în punctul de abscisă $x_0$ şi are viteza inițială $v_0$. Să se determine legea $x = x(t)$ a mişcării mobilului.

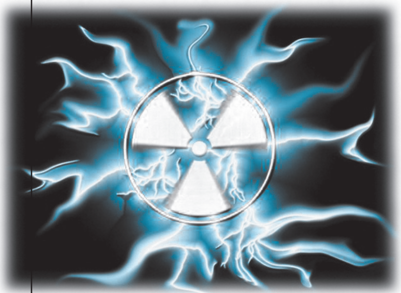
*Rezolvare*:

Deoarece $x'(t) = v(t)$ şi $v'(t) = a(t)$, din condiția $a(t) = a$ obținem $v'(t) = a$.
De aici rezultă că $v(t) = at + C_1$. Pentru $t_0 = 0$, aflăm $C_1 = v_0$.
Deci, $x'(t) = v(t) = at + v_0$. De unde obținem $x(t) = \int (at + v_0)\mathrm{d}t = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2$.
Pentru a afla constanta $C_2$, punem $t_0 = 0$. Obținem $C_2 = x_0$.
Aşadar, $x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$ este legea mişcării mobilului în orice moment de timp.

**4*** Să se determine legea de descompunere a unei substanțe radioactive.

*Rezolvare*:

Notăm cu $x(t)$ cantitatea de substanță radioactivă în momentul de timp $t$, cu $x_0$ cantitatea de substanță radioactivă în momentul inițial $t_0 = 0$. În intervalul de timp $[t, t + \Delta t]$, cantitatea de substanță descompusă $x(t) - x(t + \Delta t) = \beta \cdot x(t) \cdot \Delta t$ sau $\Delta x(t) = -\beta \cdot x(t) \cdot \Delta t$ (1), unde $\beta$ este coeficient de proporționalitate (un număr pozitiv), care depinde de natura substanței.



Împărțind (1) la $\Delta t$ şi trecând la limită cu $\Delta t \to 0$, avem

$$x'(t) = -\beta \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\beta \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -\beta \cdot \mathrm{d}t.$$

Atunci, $\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int (-\beta)\,\mathrm{d}t$. Deci, $\ln|x(t)| = -\beta t + \ln C \Leftrightarrow x(t) = C_1 \cdot e^{-\beta t}$.

Din condiția $x(0) = x_0$ aflăm $C_1 = x_0$.
Astfel, legea de descompunere a unei substanțe radioactive este $x(t) = x_0 \cdot e^{-\beta t}$.

**5*** Într-un vas se află $a$ litri de soluție omogenă care conține $b$ kg de sare. În fiecare minut din vas se iau $c$ litri de soluție omogenă şi se adaugă $c$ litri de dizolvant. Să se determine legea de variație a cantității de sare $x(t)$ din soluția omogenă în fiecare moment de timp.

*Rezolvare*:

În intervalul de timp $[t, t + \Delta t]$ din vas se iau $c \cdot \Delta t$ litri de soluție omogenă. Această cantitate de soluție omogenă se înlocuieşte în intervalul indicat de timp cu $c \cdot \Delta t$ litri de dizolvant. Să determinăm cantitatea de sare care se ia din vas.

Concentrația sării din soluție în momentul de timp $t$ este $\frac{x(t)}{a}$ kg/$l$. Deci, în volumul de $c \cdot \Delta t$ litri de soluție omogenă se conține o cantitate de sare $\Delta x(t) = -\frac{x(t)}{a} \cdot c \cdot \Delta t$ (kg) (2).
Semnul „minus” indică micşorarea cantității de sare în soluția omogenă. Împărțind (2) la $\Delta t$ şi trecând la limită cu $\Delta t \to 0$, obținem ecuația $\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{c}{a} \cdot x(t) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = -\frac{c}{a} \cdot \mathrm{d}t$.

Atunci, $\int \frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)} = \int \left(-\frac{c}{a}\right)\mathrm{d}t$. Deci, $\ln|x(t)| = -\frac{c}{a}t + \ln C \Leftrightarrow x(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{c}{a}t}$.

Din condiția $x(0) = b$ aflăm $b = C_1 \cdot e^0 = C_1$. Deci, $x(t) = b \cdot e^{-\frac{c}{a}t}$ este legea de variație a cantității de sare din soluția omogenă în momentul de timp $t$.

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze integrala:

a) $\int \frac{dx}{3x-1}$; b*) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; c*) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$; d) $\int \sin^2 x\,dx$.

*Rezolvare*:

a) $\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$.

b*) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \int \frac{d(x+2)}{2^2+(x+2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C$.

c*) $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$.

d) $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

**2** Pentru funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$, să se afle primitiva $F$ care verifică condiția $F(0) = 1$.

*Rezolvare*:

Una dintre primitivele funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$, este funcția $F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_1(x) = \sin x - \cos x$. Oricare altă primitivă pentru $f$ are forma $F(x) = \sin x - \cos x + C$, unde $C$ este o constantă oarecare. Pentru determinarea constantei $C$ folosim condiția $F(0) = 1$, de unde obținem $C = 2$.

Astfel, funcția $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x - \cos x + 2$, este primitiva căutată.

**3** Pentru funcția $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1)$, să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul $M(1, 1)$.

*Rezolvare*:

$$F(x) = \int\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \sin(2x+1)\right]dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \sin(2x+1)dx = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + C.$$

$\int dF(x) = F(x) + C$

Deoarece graficul primitivei $F$ trebuie să treacă prin punctul $M(1, 1)$, obținem $1 = 2 - \frac{1}{2}\cos 3 + C$, de unde $C = \frac{1}{2}\cos 3 - 1$.

Deci, funcția $F\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\cos 3 - 1$, este primitiva cerută.

**4** Să se calculeze integrala utilizând tabelul integralelor nedefinite uzuale și proprietățile lor: $\int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx$.

*Rezolvare*:

$$\int\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\ln|x| + \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\int x^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$= 2\ln x + \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\ln|x| + \operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\sqrt{x} + C.$$

# Exerciții propuse

***Profilul real***

## A₁

**1.** Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$ folosind tabelul integralelor nedefinite și proprietățile ei:

a) $f(x) = x^4 + x^2$; b) $f(x) = (x^3+1)^2$;

c) $f(x) = \dfrac{x^3+3x-1}{x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x} + 2$.

**2.** ***Lucrați în perechi!*** Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$ folosind tabelul integralelor nedefinite și proprietățile ei: a) $f(x) = 3x - 5\cos x + e^x$;

b) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$; c) $f(x) = \cos^2 \dfrac{x}{2}$;

d) $f(x) = \left(\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\right)^2$; e) $f(x) = 2e^x - \sqrt[3]{x^2}$.

**3.** Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$ folosind tabelul integralelor nedefinite și proprietățile ei:

a) $f(x) = \sqrt{x} + x$; b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$;

c) $f(x) = \dfrac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}$; d) $f(x) = \dfrac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}$;

e) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$; f) $f(x) = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$;

g) $f(x) = -\sin x + \dfrac{3}{\sqrt{4-4x^2}}$; h) $f(x) = 2^x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

**4.** ***Lucrați în grup!*** Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$ folosind tabelul integralelor nedefinite și proprietățile ei:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^3e^x + x^2}{x^3}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$;

c) $f(x) = a^x \cdot e^x$; d) $f(x) = \dfrac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$; f) $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + \cos 2x}$; h) $f(x) = \sqrt[8]{(8-3x)^6}$;

i) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}}$; j) $f(x) = \dfrac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$;

k) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}$.

## B₁

**5.** ***Lucrați în perechi!*** Să se determine funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă $f'(x) = 5e^{3x}$ și $f(0) = 4$.

**6.** Să se determine funcția $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, dacă $f'(x) = \sqrt{x}$ și $f(1) = 2$.

**7.** Pentru funcția $f: \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul $M\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$.

**8.** ***Lucrați în grup!*** Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$ folosind tabelul integralelor nedefinite și proprietățile ei:

a) $f(x) = 10^{-x} + \dfrac{x^2+2}{1+x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$;

c) $f(x) = \dfrac{3}{2+2x^2}$; d) $f(x) = \cos^2 x$.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

## C₁

**9.** ***Lucrați în perechi!*** Să se determine primitivele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| \cdot (2x-1)$.

**10.** Să se determine primitiva funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x \cdot e^x$, al cărei grafic trece prin punctul $\left(0, \dfrac{1}{1+\ln 2}\right)$.

**11.** ***Investigați!*** Fie graficele a două primitive ale funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Un grafic trece prin punctul $M_1(1, 2)$, iar celălalt – prin punctul $M_2(8, 4)$. Care dintre aceste două grafice este situat mai sus în sistemul cartezian de coordonate? Care este diferența dintre aceste primitive?

**12.** Un mobil se mișcă rectiliniu cu viteza $v(t) = \sqrt[3]{1+t}$ (timpul $t$ se măsoară în secunde, viteza $v$ – în metri pe secundă). Să se afle legea mișcării mobilului $s = s(t)$ și distanța parcursă de acesta în primele 7 secunde, dacă $s(0) = 0$.

**13.** Pentru funcția $f: D \to \mathbb{R}$ să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul indicat:

a) $f(x) = x^2$, $M(2, 1)$; b) $f(x) = \sqrt{x}$, $A(9, 1)$; c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$, $B(-1, 5)$.

# § 2 SCHIMBAREA DE VARIABILĂ ÎN CALCULUL PRIMITIVELOR

În unele cazuri, introducerea unei variabile noi de integrare reduce calculul acestor integrale la calculul unor integrale mai simple.

Această metodă se numeşte ***metoda substituției*** sau ***metoda schimbării de variabilă***. Ea se bazează pe

**Teorema 3**

Fie $I$, $J$ intervale deschise din $\mathbb{R}$ şi $\varphi: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$ funcții cu proprietățile:

1) $\varphi$ este derivabilă pe $I$;

2) $f$ admite primitive pe $J$ (fie $F: J \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa).

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive pe $I$, iar $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, adică

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + C. \qquad (1)$$

*Demonstrație*:

Deoarece funcțiile $F$, $\varphi$ sunt derivabile, rezultă că funcția $F \circ \varphi$ este derivabilă şi, în plus, $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Deci, conform definiției, $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. ►

**Observație**

Formula (1) se numeşte ***formula schimbării de variabilă*** în integrala nedefinită.

**Exercițiu rezolvat**

Să se calculeze:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int (7x-9)^{2017} \mathrm{d}x$;

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$; d) $\displaystyle\int e^{\cos x} \sin x \, \mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

a) Notăm $x - 1 = t$, atunci $x = t + 1$. De aici, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Conform formulei (1),

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \mathrm{d}x = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} \mathrm{d}t = \int \left( \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{t^2} \right) \mathrm{d}t = \int \left( t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C.$$

Revenind la variabila $x$, obținem:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| + \frac{1}{1-x} + C.$$

b) Notăm $7x - 9 = t$, atunci $x = \frac{1}{7}(t+9)$. De aici, $\mathrm{d}x = \frac{1}{7}\mathrm{d}t$.

Conform formulei (1), $\displaystyle\int (7x-9)^{2017} \mathrm{d}x = \int t^{2017} \frac{1}{7} \mathrm{d}t = \frac{1}{7} \cdot \frac{t^{2018}}{2\,018} + C.$

Revenind la variabila $x$, obținem:

$$\int (7x-9)^{2017} \mathrm{d}x = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2\,018}(7x-9)^{2018} + C = \frac{1}{14\,126}(7x-9)^{2018} + C.$$

c) Pentru a determina substituția, vom scrie integrala în modul următor:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}.$$

Notăm $t = \sin x$, deci $dt = \cos x\,dx$.

Atunci, $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

d) Notăm $t = \cos x$, deci $dt = -\sin x\,dx$.

Atunci, $\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$

## Exerciții propuse

***Profilul real***

### A₁

**1.** Să se calculeze primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (2x+3)^3$; b) $f(x) = (-4x+5)^{2023}$; c) $f(x) = (3x+1)^{\pi}$;

d) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+9}$; e) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$; f) $f(x) = \frac{3x^2-2x+7}{\sqrt{x^3-x^2+7x-2}}$;

g) $f(x) = \frac{1}{12x+5}$; h) $f(x) = e^{4-3x}$; i) $f(x) = \sin(12x+7)$;

j) $f(x) = \frac{3x}{4x^2+5}$; k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-9x^2}}$; l) $f(x) = \frac{1}{15x^2-7}$;

m) $f(x) = \frac{1}{6x^2+14}$; n) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$; o) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(3x+\frac{\pi}{4})}$.

**2.** Să se calculeze integrala:

a) $\int \frac{dx}{(1-3x)^4}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}}$; c) $\int \sqrt{4x+3}\,dx$;

d) $\int \sqrt[3]{(2-3x)^2}\,dx$; e) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$; f) $\int \cos\left(\frac{2x}{3}\right)dx$;

g) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$; h) $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^3}$; i) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$.

### B₁

**3.** Să se calculeze, utilizând metoda schimbării de variabilă, primitivele funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{4x+2}{x^2+x+3}$; b) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$; c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$;

d) $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$; e) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$; f) $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$;

g) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$; h) $f(x) = \frac{1}{x\cdot\sqrt{1+x^2}}$; i) $f(x) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$;

j) $f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; k) $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; l) $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

**4.** Să se calculeze, utilizând metoda schimbării de variabilă, integrala:

a) $\int (2x+1)e^{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \cos x e^{-\sin x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int x^{-\frac{1}{2}}e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int (x+\frac{1}{2})\cos(x^2+x)\,\mathrm{d}x$; e) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{1+2x^4}$;

g) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$; h) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^6}}$; i) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$;

j) $\int xe^{2x^2+1}\,\mathrm{d}x$; k) $\int x^2\sin x^3\,\mathrm{d}x$; l) $\int 5xe^{1+3x^2}\,\mathrm{d}x$.

**5.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x^4+\cos 2x$.

a) Să se încercuiască litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă propoziția este falsă:
„Funcția $f$ este o funcție ce posedă primitive.”

| A | F |
|---|---|

b) Să se calculeze $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Să se afle $F$, unde $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**6.** Să se calculeze integrala:

a) $\int x(1-3x)^2\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sin(3x-1)\,\mathrm{d}x$; c) $\int x\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int x^2\cdot\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$; e) $\int 5e^{1+2x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int \cos(3x+1)\,\mathrm{d}x$.

**7.** Fie funcția $f: D\to\mathbb{R},\ f(x)=2\cos 2x\cdot\sin x,\ D\in\mathbb{R}$. Una dintre primitivele funcției $f$ ia valoarea $-1$ pentru $x=\pi$. Să se determine pentru care valori ale lui $x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, această primitivă primește valoarea 0.

**8.** Fie funcția $f:(0, 2\pi)\to\mathbb{R},\ f(x)=2\sin^2 x-\sin 2x$. Să se sfle primitiva al cărei grafic trece prin punctul $A\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

## C₁

**9.** Să se calculeze, aplicând metoda schimbării de variabilă, primitivele funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\frac{1}{x\cdot\sqrt{x+1}}$; b) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$; c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}$;

d) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}$; e) $f(x)=\frac{x}{x^4+2x^2+5}$; f) $f(x)=x\sqrt{2x+1}$;

g) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-3x}}$; h) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$; i) $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt[3]{1-2x}}$;

j) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$; k) $f(x)=x\sqrt{5x^2-1}$; l) $f(x)=\sqrt{e^x-1}$.

**10.** ***Lucrați în perechi!*** Utilizând metoda schimbării de variabilă, să se calculeze integrala:

a) $\int x\sqrt{1+5x}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-4}\,\mathrm{d}x$; c) $\int x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$; e) $\int \frac{(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x}{1+\sin 2x}$; f) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

# § 3 INTEGRAREA PRIN PĂRȚI

**Teorema 4** Dacă funcțiile $u, v: I \to \mathbb{R}$ (intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$) sunt derivabile şi au derivate continue pe $I$, atunci funcțiile $uv$, $u'v$ şi $uv'$ admit primitive şi:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x \qquad (1)$$

sau, în notația diferențială, $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

*Demonstrație*:

Din egalitatea $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, $\forall x \in I$, rezultă:

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - u'(x)v(x). \qquad (2)$$

Deci, o primitivă a funcției $[u(x)v(x)]'$ pe intervalul $I$ este $u(x)v(x)$.

Conform condiției teoremei, funcția $u'(x)v(x)$ posedă primitivă pe intervalul deschis $I$. Deci, funcția $u(x)v'(x)$, de asemenea, posedă primitivă pe intervalul $I$. Integrând egalitatea (2), obținem relația (1). ►

**Observație** Relația (1) se numeşte ***formula integrării prin părți*** a integralei nedefinite.

Deoarece $u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u(x)$, $v'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v(x)$, această formulă poate fi scrisă sub forma $\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$ sau, prescurtat, $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze: a) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$; b) $\int x e^x \mathrm{d}x$; c) $\int \ln x \cdot x\,\mathrm{d}x$; d) $\int \cos x \cdot e^x \mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

a) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x = \left( u = \operatorname{arctg} x,\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,\ v = \int \mathrm{d}x,\ v = x \right) =$

$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{\mathrm{d}(x^2+1)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

b) $\int xe^x \mathrm{d}x = (u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x,\ v = \int e^x \mathrm{d}x = e^x) = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$

c) $\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \left( u = \ln x,\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x},\ \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x,\ v = \dfrac{x^2}{2} \right) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \int \dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + C.$

d) $\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = (u = \cos x,\ \mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x,\ v = e^x) =$

$= \cos x \cdot e^x + \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = (u = \sin x,\ \mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x,\ v = e^x) =$

$= \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x.$

Prin urmare, $2\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = (\cos x + \sin x)e^x \Leftrightarrow \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$

**2** Să se calculeze $I_n = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$.

*Rezolvare*:

Pentru $n = 1$, avem $I_1 = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

Fie $n > 1$. Înmulțind şi împărțind cu $a^2$, apoi adunând şi scăzând $x^2$ la numărător, obținem:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[ I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x \right].$$

Aplicăm formula integrării prin părți:

$$u=x,\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v=\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n},\quad v=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=-\frac{1}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

și obținem: $\displaystyle\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\cdot x+\int\frac{\mathrm{d}x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}.$

Deci, $\displaystyle I_n=\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right]$ pentru $n>1$. (3)

Așadar, integrala $I_n$ a fost exprimată prin $I_{n-1}$.

Formula (3) se numește ***formulă de recurență***.

De exemplu, pentru $n=2$, obținem:

$$I_2=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

**Observație**

Majoritatea integralelor care pot fi calculate cu ajutorul metodei integrării prin părți pot fi divizate în trei grupuri:

1) Integrale care conțin sub semnul lor în calitate de factor una dintre funcțiile: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

   Aceste integrale se calculează aplicând metoda integrării prin părți și considerând $u(x)$ una dintre funcțiile menționate.

2) Integrale de forma $\int P_n(x)\cos cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)\sin cx\,\mathrm{d}x$, $\int P_n(x)e^{cx}\mathrm{d}x$, unde $c\in\mathbb{R}^*$, $P_n(x)$ este funcție polinomială asociată polinomului $P(X)$ de grad $n$.

   Aceste integrale se calculează cu ajutorul metodei integrării prin părți, aplicată de $n$ ori, unde în calitate de $u(x)$ se ia $P_n(x)$. După fiecare aplicare a metodei integrării prin părți, gradul lui $P_n(x)$ se va micșora cu o unitate.

3) Integrale de forma $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $\int e^{cx}\sin bx\,\mathrm{d}x$, $\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$, $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$, $a, b, c\in\mathbb{R}^*$. Notând cu $I$ una dintre aceste integrale și aplicând de două ori metoda integrării prin părți, se obține o ecuație de gradul I în raport cu $I$.

**3** Să se calculeze $\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x$, unde funcția $x\to\sqrt{x^2+\alpha}$ se consideră definită pe intervalul $I$, pe care $x^2+\alpha>0$, $\alpha\neq 0$.

*Rezolvare*:

Avem $\displaystyle\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x+\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x.$

Pentru a calcula integrala $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x$ vom aplica metoda integrării prin părți.

Avem $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x=\int x\cdot(\sqrt{x^2+\alpha})'\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x.$

Am obținut relația $\displaystyle\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x$

și, deci, $\displaystyle\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x+\int\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x.$

Deoarece $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C$, deducem:

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+\alpha}+\frac{\alpha}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha})+C.$$

# Exerciții propuse

*Profilul real*

## A₁

1. Să se calculeze următoarele integrale nedefinite folosind metoda integrării prin părți:

a) $\int \ln x \mathrm{d}x$; b) $\int x\cos 2x \,\mathrm{d}x$; c) $\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$;

d) $\int x\sin x \,\mathrm{d}x$; e) $\int (2x-1)e^{3x} \mathrm{d}x$; f) $\int x2^x \mathrm{d}x$;

g) $\int (x+1)\ln x \,\mathrm{d}x$; h) $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$; i) $\int x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$;

j) $\int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x$; k) $\int \sqrt[3]{x} \ln x \,\mathrm{d}x$; l) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$;

m) $\int x \ln^2 x \,\mathrm{d}x$; n) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$; o) $\int x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$.

## B₁

2. *Lucrați în perechi!* Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}$; b) $f(x) = \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$; c) $f(x) = \arccos x$;

d) $f(x) = e^{3x}(\sin 2x - \cos 2x)$; e) $f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x$; f) $f(x) = (x^2 + 3x + 3)\cos x$.

3. Să se calculeze următoarele integrale nedefinite folosind metoda integrării prin părți:

a) $\int (1-3x-2x^2)e^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x$; b) $\int (x^2 - 4x + 5)\sin\frac{2x}{3} \mathrm{d}x$; c) $\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$;

d) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \mathrm{d}x,\ x \in (0, 1)$; e) $\int \frac{\ln x \,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; f) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $F'(x) = 0$, unde $F$ este una dintre primitivele funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$.

5. *Investigați!* Să se afle legea de dezagregare a radiului, dacă se știe că viteza de dezagregare este proporțională cu cantitatea lui inițială.

## C₁

6. Utilizând metoda integrării prin părți, să se calculeze integrala:

a) $\int \ln(2x+5)\mathrm{d}x$; b) $\int (1-2x)\cos\frac{x}{3} \mathrm{d}x$; c) $\int (2x+1)\ln(x+1)\mathrm{d}x$;

d) $\int x^2 \ln^3 x \,\mathrm{d}x$; e) $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x$; f) $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} \mathrm{d}x$.

7. Să se calculeze următoarele integrale nedefinite aplicând mai întâi schimbarea de variabilă, apoi integrarea prin părți:

a) $\int x \sin\sqrt{x} \mathrm{d}x$; b) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$; c) $\int x^3 e^{x^2} \mathrm{d}x$;

d) $\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$; e) $\int x \cdot e^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$; f) $\int x^8 e^{x^3} \mathrm{d}x$;

g) $\int x^7 \operatorname{arctg}(x^2)\mathrm{d}x$; h) $\int (\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2 \mathrm{d}x$; i) $\int e^{\sqrt{x}} \cos 2\sqrt{x} \,\mathrm{d}x$.

# Exerciții și probleme recapitulative

*Profilul real*

## $A_1$

**1.** ***Investigați!*** Să se demonstreze că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$ pe intervalul indicat:

a) $F(x)=4-\cos x,\ f(x)=\sin x,\ x\in(-\infty,+\infty)$;
b) $F(x)=\operatorname{tg}x-\sqrt{2},\ f(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$;
c) $F(x)=9-\frac{1}{x},\ f(x)=\frac{1}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$;
d) $F(x)=|x|,\ f(x)=-1,\ x\in(-\infty,0)$.

**2.** Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, folosind tabelul integralelor nedefinite și proprietățile de integrare:

a) $f(x)=\frac{1}{(3+2x)^4}$;
b) $f(x)=\frac{5}{\sqrt{7-3x}}$;
c) $f(x)=2\sin\frac{x}{5}+3\cos 6x$;
d) $f(x)=\frac{4}{(x+3)^2}+\frac{7}{\sin^2 3x}$.

**3.** ***Lucrați în grup!*** Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, folosind tabelul integralelor nedefinite și proprietățile de integrare:

a) $f(x)=(x+1)^2-1$;
b) $f(x)=\frac{5}{3x+2}$;
c) $f(x)=\frac{1}{3-x}$;
d) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 3x}$;
e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+x\sqrt[3]{x}+7$;
f) $f(x)=5^x-2\cos x$;
g) $f(x)=\frac{x^2}{5(x^2+1)}$;
h) $f(x)=e^{4x}+\frac{1}{\sin^2 7x}$;
i) $f(x)=e^{2x}-\frac{1}{1-x}$;
j) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[5]{x^4}$;
k) $f(x)=\frac{2\sqrt{x}-x^3\cdot e^x+3x^2}{x^3}$.

**4.** ***Lucrați în perechi!*** Pentru funcția $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^3}$, să se afle primitiva al cărei grafic trece prin punctul $A\left(-\frac{1}{2},3\right)$.

**5.** Pentru funcția $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, să se afle primitiva $F\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ al cărei grafic trece prin punctul $M\left(1,\frac{5}{2}\right)$.

## $B_1$

**6.** ***Lucrați în perechi!*** Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, aplicând metoda schimbării de variabilă:

a) $f(x)=\frac{3}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$;
b) $f(x)=\frac{3}{x\cdot\ln x}$.

**7.** Să se calculeze primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, aplicând metoda integrării prin părți:

a) $f(x)=e^x\cdot\sin x$;
b) $f(x)=\frac{x}{\sin^2 x}$;
c) $f(x)=x^2\cdot\sin x$;
d) $f(x)=x\cdot\arccos x$;
e) $f(x)=e^{2x}\cdot\cos 3x$;
f) $f(x)=\frac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$.

**8.** Panta tangentei duse la o curbă în orice punct de abscisă $x$ este egală cu $x$. Să se afle ecuația acestor curbe și să se determine curba care trece prin originea sistemului de coordonate.

**9.** ***Lucrați în perechi!*** Conform legii „creșterii naturale”, viteza de creștere a cantității de substanță este direct proporțională cu cantitatea sa. Să se afle formula pentru determinarea variației cantității de substanță $y$ în funcție de timp, dacă în momentul de timp $t=0$ cantitatea de substanță a fost de $y_0$.

**$C_1$**

**10.** Să se demonstreze că funcția $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x\cdot\frac{|x|}{2}$, este o primitivă a funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$.

**11.** Aflați funcția $f$, astfel încât $f''(x)=3x^2,\ f'(0)=1,\ f(0)=-1$.

**12.** Să se afle curba cu proprietatea că segmentul conținut de tangenta dusă la ea, determinat de punctul de tangență și de punctul de intersecție a acesteia cu axa absciselor, este divizat de axa ordonatelor în două segmente congruente.

**13.** Să se demonstreze că funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x\le 0\\ 1, & \text{dacă } x>0\end{cases}$ nu admite primitive.

**14.** ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale integralelor nedefinite în știință și tehnică.*

## Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

***Profilul real***

**1.** Completați casetele, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$\int (x^3-\sin 2x+6\sqrt{x})\,\mathrm{d}x=\boxed{\phantom{xxxx}}+\boxed{\phantom{xxxx}}+\boxed{\phantom{xxxx}}+\boxed{\phantom{xxxx}}.$$

**2.** Calculați primitivele funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, aplicând metoda schimbării de variabilă: $f(x)=x\cdot\sqrt{1+x}$.

**3.** Calculați integrala, aplicând metoda integrării prin părți:

a) $\int e^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x$;

b) $\int x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.

**4.** Determinați constantele reale $a$ și $b$, astfel încât funcția $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=e^{-x}\cdot(a\cos 4x+b\sin 4x)$, să fie o primitivă a funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-4x}\cos x$.

**5.** Viteza unui mobil variază conform legii $v(t)=Rt+a\sqrt{t},\ a,\ R\in\mathbb{R}_+$. Aflați distanța (în metri) parcursă de mobil în intervalul de timp $[0,\ 4]$ (măsurat în secunde), precum și accelerația lui în momentul de timp $t=4$.

# Primitive şi integrale nedefinite

### Primitiva unei funcţii

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis şi funcţia $f: I \to \mathbb{R}$.

Funcţia $F: I \to \mathbb{R}$ se numeşte primitivă a funcţiei $f$ pe $I$, dacă:

1) $F$ este derivabilă pe $I$;

2) $F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

### Integrala nedefinită

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, unde $F$ este o primitivă a funcţiei $f$ pe $I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, şi $C \in \mathbb{R}$.

### Proprietăţi ale integralei nedefinite

1° $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

2° $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$

3° $\int kf(x)\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\mathrm{d}x,\ k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$

4° $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

5° Dacă $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, atunci $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$, unde $u = \varphi(x)$ – funcţie derivabilă de $x$.

6° Fie $f: I \to \mathbb{R}\ (I \subseteq \mathbb{R})$, $F: I \to \mathbb{R}$ şi $F'(x) = f(x),\ \forall x \in I$, iar $k$ şi $b$ constante, $k \neq 0$. Atunci, $\int f(kx+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$.

7° Fie funcţiile $f, f': I \to \mathbb{R}\ (I \subseteq \mathbb{R})$, $f \neq 0,\ \forall x \in I$.

Atunci, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$.

### Metode de calcul al integralei nedefinite

**1.** *Schimbarea de variabilă*

Fie $I, J$ intervale deschise din $\mathbb{R}$ şi $\varphi: I \to J$, $f: I \to \mathbb{R}$ funcţii cu proprietăţile:

1) $\varphi$ este derivabilă pe $I$;

2) $f$ admite primitive pe $J$ (fie $F: J \to \mathbb{R}$ o primitivă a sa).

Atunci, funcţia $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ admite primitive pe $I$, iar $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcţiei $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$, adică

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

**2.** *Integrarea prin părţi*

Dacă funcţiile $u, v: I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile şi au derivate continue pe $I$, atunci funcţiile $uv$, $u'v$ şi $uv'$ admit primitive şi mulţimea lor de primitive satisfac relaţia:

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\mathrm{d}x \quad \left(\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u\right).$$

### Tabelul integralelor nedefinite uzuale

**1.** $\int 0\mathrm{d}x = C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

**2.** $\int 1\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

**3.** $\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{R}$

**4.** $\int x^\alpha\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \forall x \in (0, \infty),\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

**5.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,\ \forall x \in (0, +\infty)$

**6.** $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

**7.** $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

**8.** $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

**9.** $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

**10.** $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,\ \forall x \in \mathbb{R}$

**11.** $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\,x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

**12.** $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\,x + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**13.** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1,\ \forall x \in (-1, 1)$

**14.** $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}\,x + C = -\mathrm{arcctg}\,x + C_1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

**15.** $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

**16.** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \forall x \in (-a, a),\ a > 0$

**17.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a, a\},\ a \neq 0$

**18.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}| + C,\ a \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*$

**19.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C,\ a > 0,\ x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$

Modulul

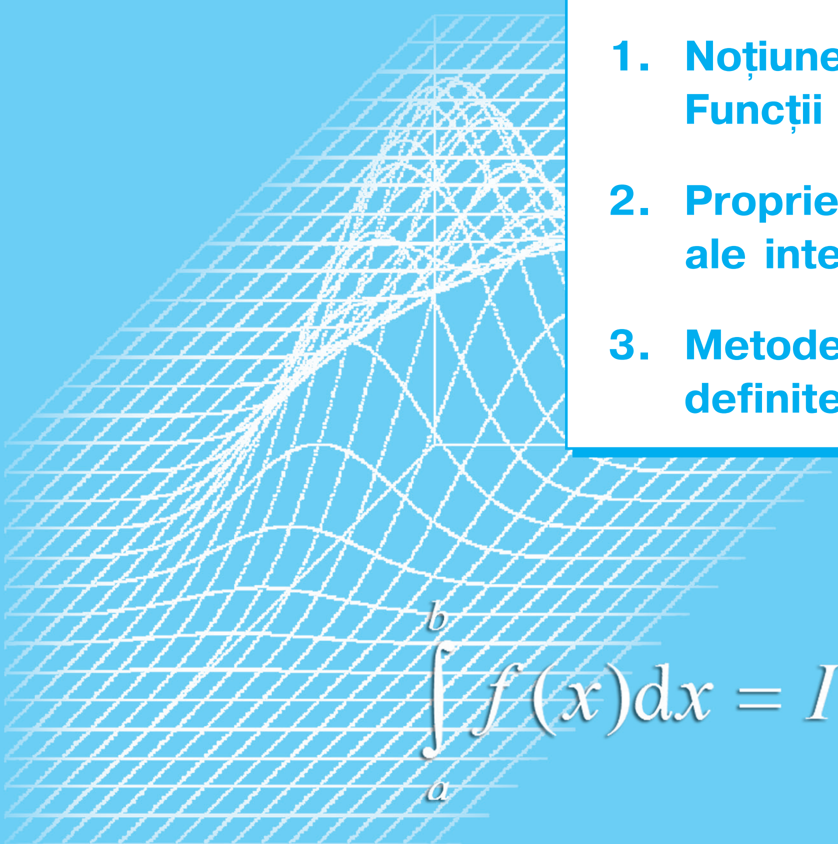
# 2 Integrale definite

*Adevărul matematic, fie la Paris sau la Toulouse, este acelaşi.*
B. Pascal

**Obiectivele modulului**

- identificarea integralei definite în diverse contexte;
- aplicarea formulei Leibniz–Newton la calculul integralei definite;
- utilizarea interpretării geometrice a integralei definite în rezolvări de probleme;
- utilizarea proprietăților integralelor definite în diverse contexte;
- calcularea integralelor definite folosind tabelul integralelor;
- calcularea integralelor definite aplicând:
  a) integrarea prin părți;
  b) schimbarea de variabilă;
- aplicarea integralei definite în diverse domenii.





$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

# § 1 NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ DEFINITĂ. FUNCȚII INTEGRABILE

## 1.1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală definită

În geometria elementară este cunoscută metoda de calcul al ariei unei figuri geometrice plane mărginite de segmente şi arce de cerc. În caz general, când figura plană este mărginită de curbe arbitrare, problema calculării ariei acesteia poate fi rezolvată numai aplicând metodele analizei matematice, şi anume metodele calculului integral.

Să considerăm domeniul plan $OAB$ mărginit de parabola $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, de axa $Ox$ şi de dreapta verticală ce trece prin punctul $A(1, 0)$ (fig. 2.1). Vom pune problema calculului ariei acestui domeniu prin metoda trecerii la limită, care este o metodă fundamentală a analizei matematice. Pentru a calcula această arie, vom diviza intervalul $[0, 1]$ în $n$ $(n \geq 2)$ segmente congruente de lungime $\frac{1}{n}$ prin $n+1$ puncte de diviziune $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, unde $x_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{0, n}$. Pe fiecare interval obținut $[x_k, x_{k+1}]$ construim un dreptunghi $P_k$ cu înălțimea $h_k$, unde $h_k = f(x_k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, şi lungimea bazei $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$. Atunci aria dreptunghiului $P_k$ este $f(x_k)\Delta x_k = \frac{k^2}{n^3}$.

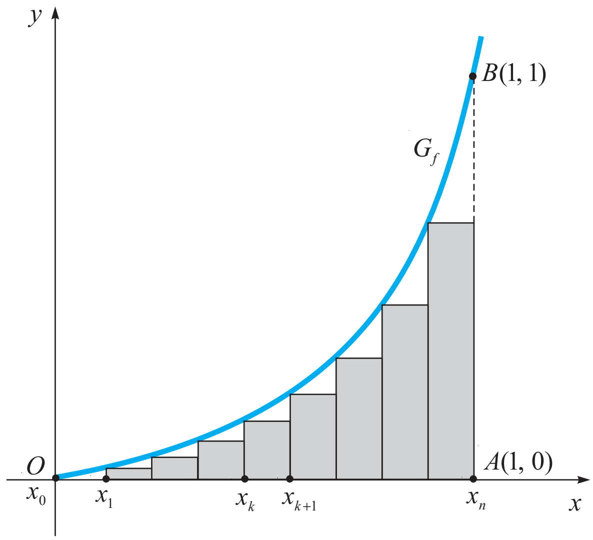


Fig. 2.1

Însumând ariile celor $n$ dreptunghiuri, vom obține un număr real

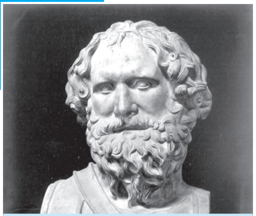
$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3},$$

care aproximează prin lipsă aria $\mathcal{A}(OAB)$ a domeniului $OAB$. Intuitiv, cu cât punctele de diviziune $x_k$ „sunt mai numeroase”, cu atât numărul $\sigma_n$ va aproxima mai exact aria domeniului $OAB$. Este firesc să considerăm că limita şirului $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ când $n \to \infty$ este $\mathcal{A}(OAB)$.

Folosind formula $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, obținem $\sigma_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$. Deci,

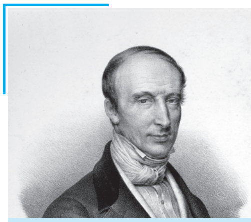
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Aşadar, prin definiție, aria domeniului plan $OAB$ este limita şirului $(\sigma_n)_{n\geq 1}$, unde $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$, adică $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{3}$.



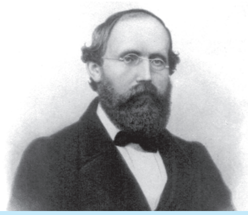
Arhimede din Siracuza (287–212 î.Hr.), filozof grec

Aceeaşi metodă de calcul al limitei unor sume de forma $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$, în cazul în care lungimile $\Delta x_k$ ale segmentelor respective tind simultan la zero, apare şi în multe alte probleme de matematică şi fizică, cum ar fi, de exemplu, problema calculului ariei unei suprafețe, volumului unui corp, lungimii graficului unei funcții etc.



August Luis Cauchy (1789–1857), matematician francez

Se presupune că formula (1) a fost cunoscută încă de Arhimede. Procedeul de calcul al ariei a fost reluat de A.L. Cauchy, care în 1823, cu acelaşi tip de sume, l-a extins la clasa funcțiilor continue. Esența problemei a fost înțeleasă abia de B. Riemann, care a considerat sume mai generale decât cele menționate aici şi a definit o clasă nouă de funcții, pentru care limita într-un anumit sens a acestor sume este finită.



Bernhard Riemann (1826–1866), matematician german

Astfel, aplicând noțiunea intuitivă de arie, în mod firesc, s-a ajuns la studierea limitei unor sume de o formă specială:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k}\ .$$

Limita sumelor de forma $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ joacă un rol important în analiza matematică şi în aplicațiile ei şi va fi studiată în continuare.

## 1.2. Integrala definită a unei funcții continue

Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.

În baza teoremei 2 (modulul 1), funcția $f$ admite primitive pe $[a, b]$. Fie $F, \Phi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ primitive ale funcției $f$ pe intervalul $[a, b]$. Din teorema 1 (modulul 1), funcțiile $F$ şi $\Phi$ se deosebesc una de cealaltă printr-o constantă arbitrară. Deci, pentru orice $x \in [a, b]$ şi orice constantă $C \in \mathbb{R}$ avem $F(x) = \Phi(x) + C$.

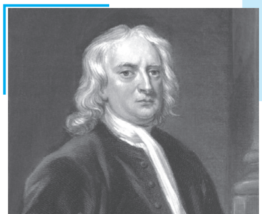
De aici rezultă că $F(b) - F(a) = [\Phi(b) + C] - [\Phi(a) + C] = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Egalitatea obținută $F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a)$ stabileşte că această diferență nu depinde de primitiva $F$ sau $\Phi$, dar depinde numai de funcția $f$ şi de numerele $a$ şi $b$. Acest fapt ne permite să introducem următoarea noțiune.

**Definiția 1** Fie $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției continue $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Numărul real $F(b) - F(a)$ se numeşte **integrală definită** a funcției $f$ de la $a$ la $b$ şi se notează $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Aşadar,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad (\textit{\textbf{formula Leibniz–Newton}}).$$

(Formula va fi demonstrată la secvența 1.3.)



Isaac Newton (1642–1727), fizician, matematician şi astronom englez

**Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz** (1646–1716), matematician german, unul dintre cei mai importanți filozofi de la sfârşitul secolului al XVII-lea şi începutul secolului al XVIII-lea, unul dintre întemeietorii iluminismului german. În matematică Leibniz elaborează, în 1675, bazele calculului diferențial şi integral independent de Newton, care enunțase deja principiile calculului infinitezimal (infiniților mici) într-o lucrare din 1666. Simbolurile matematice introduse de Leibniz în calculul diferențial şi integral se folosesc şi astăzi.

## Observații

**1.** Simbolul $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se citește: „Integrala de la $a$ la $b$ din $f(x)\mathrm{d}x$”.

**2.** Simbolul $\int$ se numește ***semn de integrare***. Numerele $a$ și $b$ se numesc ***limite de integrare***: $a$ – ***limită inferioară***, $b$ – ***limită superioară***; intervalul $[a, b]$ se numește ***interval de integrare***; $x$ se numește ***variabilă de integrare***, iar funcția $f$ – ***funcție de sub semnul de integrare*** sau ***integrand***; simbolul $f(x)dx$ se numește ***expresie de sub semnul de integrare***. Variabila $x$ poate fi înlocuită cu oricare altă variabilă: $u$, $v$, $s$, $t$ etc. Astfel:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(s)\mathrm{d}s = \ldots$$

**3.** Dacă $a = b$, atunci prin definiție se consideră că $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0.$

**4.** Pentru diferența $F(b) - F(a)$ se folosește notația $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, care se citește: „$F(x)$ în limitele de la $a$ la $b$”, și formula Leibniz–Newton se mai scrie:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b},$$

unde $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**5.** Pentru a calcula $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, mai întâi se află o primitivă $F$ a funcției $f$, apoi se calculează diferența $F(b) - F(a)$.

**6.** Integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ reprezintă un număr real, spre deosebire de integrala nedefinită $\int f(x)\mathrm{d}x$, care reprezintă mulțimea tuturor primitivelor funcției $f$ pe intervalul $[a, b]$.

**7.** În secvența 1.3 va fi dată o altă definiție a integralei definite, bazată pe așa-numitele „sume integrale” de o formă specială, obținute în secvența 1.1. În consecință, integrala $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ va căpăta un anumit suport geometric sau mecanic, care va permite utilizarea ei în secvența 1.4 și în modulul 3 la rezolvarea unor probleme de geometrie, fizică, economie etc.

## Exerciții rezolvate

**1** Să se calculeze integrala $\int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x.$

*Rezolvare*:

Funcția $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, este continuă pe $[-1, 2]$, deci admite primitiva $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in [-1, 2]$.

Aplicând formula Leibniz–Newton, avem:

$$\int_{-1}^{2} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = F(2) - F(-1) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

**2** Să se calculeze integrala $\int_2^3 \frac{dy}{y^2}$.

*Rezolvare*:

Funcția $f: [2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(y) = \frac{1}{y^2}$, este continuă pe $[2, 3]$, deci admite primitiva $F(y) = -\frac{1}{y}$, $y \in [2, 3]$.

În baza formulei Leibniz–Newton,

$$\int_2^3 \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}\Big|_2^3 = F(3) - F(2) = \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

**3** Să se calculeze integrala $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt$.

*Rezolvare*:

Primitiva funcției continue $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}$, este $F(t) = \sqrt{t} - \ln t$, $t \in [1, 4]$.

Prin urmare,

$$\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt = (\sqrt{t} - \ln t)\Big|_1^4 = F(4) - F(1) = (2 - \ln 4) - (1 - \ln 1) = 1 - 2\ln 2.$$

**4** Să se calculeze integrala $\int_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\, dx$.

*Rezolvare*:

Calculăm integrala nedefinită a funcției continue $f: [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$, și obținem primitivele acestei funcții:

$$\int (6x^2 - 2x + 1)\, dx = 6\int x^2 dx - 2\int x\, dx + \int dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C = 2x^3 - x^2 + x + C.$$

Considerăm primitiva $F: [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2x^3 - x^2 + x$.

Cum $F(-2) = -16 - 4 - 2 = -22$ și $F(0) = 0$, conform formulei Leibniz–Newton obținem:

$$\int_{-2}^0 (6x^2 - 2x + 1)\, dx = (2x^3 - x^2 + x)\Big|_{-2}^0 = F(0) - F(-2) = 22.$$

**5** Să se calculeze integrala $\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right) dx$.

*Rezolvare*:

Determinăm mulțimea primitivelor funcției de sub simbolul integralei:

$$\int \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right) dx = \sqrt{3}\int \sqrt{x}\, dx - 2\int \frac{dx}{2x+3} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+3| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \ln|2x+3| + C.$$

Considerăm o primitivă $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \ln|2x+3|$.

Cum $F(3) = \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} - \ln 9 = \frac{2}{3} \cdot 3^2 - \ln 3^2 = 6 - 2\ln 3$, $F(0) = -\ln 3$, obținem:

$$\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{2}{2x+3}\right) dx = F(3) - F(0) = 6 - 2\ln 3 + \ln 3 = 6 - \ln 3.$$

**6** Să se calculeze integrala $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x.$

*Rezolvare*:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos x-\sin 3x)\mathrm{d}x=\left(2\sin x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right)-\left(-2\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+2\cdot 1-\frac{1}{3}\cdot 0=3.$$

**7** Să se calculeze integrala $\int_0^1(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x.$

*Rezolvare*:

Mulțimea primitivelor funcției de sub simbolul integralei este:

$$\int(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x=\int 2^{3x}\mathrm{d}x-4\cdot\int 4^x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2}-4\cdot\frac{4^x}{\ln 4}=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}-\frac{2\cdot 4^x}{\ln 2}+C.$$

Considerăm o primitivă $F(x)=\frac{2^{3x}}{3\ln 2}-\frac{2\cdot 4^x}{\ln 2}.$

Atunci,

$$\int_0^1(2^{3x}-4^{x+1})\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=\left(\frac{8}{3\ln 2}-\frac{8}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{3\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\right)=-\frac{16}{3\ln 2}+\frac{5}{3\ln 2}=-\frac{11}{3\ln 2}.$$

*Teoremele ce urmează stabilesc câteva din proprietățile integralei definite a unei funcții continue.*

Vom face la început următoarea remarcă: dacă $b>a$, atunci prin definiție se consideră că $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x=F(a)-F(b)$, unde $F\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$.

**Teorema 1**

Fie $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$. Dacă în integrala definită schimbăm ordinea de integrare, atunci integrala își schimbă semnul în opus, adică $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

*Demonstrație*:

Dacă $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, $a<b$, este o funcție continuă pe $[a, b]$, atunci (teorema 2, modulul 1) ea posedă primitive. Fie $F\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f$ pe $[a, b]$.

Deci, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=-[F(a)-F(b)]=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$ ►

**Teorema 2**

**(proprietatea de liniaritate a integralei definite)**

Fie funcțiile $f, g\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$ și $\lambda$, $\mu$ numere reale arbitrare. Atunci, $\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

*Demonstrație*:

Dacă funcțiile $f$ şi $g$ sunt continue pe $[a, b]$, atunci şi funcția $h = \lambda f + \mu g$ este continuă şi admite primitive pe $[a, b]$. Fie $H = \lambda F + \mu G$ o primitivă pe $[a, b]$ a funcției $h$, unde $F$ şi $G$ sunt primitive pe $[a, b]$ ale funcțiilor $f$ şi, respectiv, $g$. Aplicând formula Leibniz–Newton, obținem:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = H(b) - H(a) = (\lambda F(b) + \mu G(b)) - (\lambda F(a) + \mu G(a)) =$$

$$= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Din teorema 2, în particular, luând $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $\mu = 0$ sau $\lambda = 1$ şi $\mu = \pm 1$, obținem:

**Corolarul 1**

Dacă funcția $f$ este continuă pe $[a, b]$, atunci şi funcția $\lambda f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, este continuă pe $[a, b]$ şi $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (*integrala este omogenă*).

**Corolarul 2**

Dacă $f$ şi $g$ sunt funcții continue pe $[a, b]$, atunci şi funcțiile $f + g$ şi $f - g$ sunt continue pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(*integrala este aditivă în raport cu funcția de sub semnul de integrare*).

**Observație**

Prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ se obține că pentru orice funcții $f_1, f_2, \ldots, f_n$: $[a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$ şi orice numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(n \geq 1)$ are loc egalitatea

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x.$$

**Exercițiu rezolvat**

Să se calculeze integrala:

a) $I = \int_1^2 \frac{3 - 2x - 4x^2}{x}\mathrm{d}x$; b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}\right)\mathrm{d}x$; c*) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

a) Transformând funcția de sub semnul de integrare şi aplicând proprietatea de liniaritate a integralei definite, obținem:

$$I = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - 2 - 4x\right)\mathrm{d}x = 3\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} - 2\int_1^2 \mathrm{d}x - 4\int_1^2 x\mathrm{d}x = 3(\ln x)\Big|_1^2 - 2(x)\Big|_1^2 - \left(4 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= 3(\ln 2 - \ln 1) - 2(2 - 1) - 2(2^2 - 1) = 3\ln 2 - 2 - 6 = -8 + 3\ln 2.$$

b) Din proprietatea de liniaritate a integralei avem:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)} = -2\left(\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos 0\right) + \left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) + (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}.$$

c*) Cum $8\sin^4 x = 2(2\sin^2 x)^2 = 2(1-\cos 2x)^2 = 2 - 4\cos 2x + 2\cos^2 2x = 3 - 4\cos 2x + \cos 4x$, din proprietatea de liniaritate a integralei definite obținem:

$$I = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x\, dx = 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - 2 + 0 = \frac{3\pi - 8}{4}.$$

## 1.3. Integrala definită ca limită a sumelor integrale

În secvența 1.1 am observat că aria unei figuri geometrice plane poate fi obținută aproximând figura cu reuniuni finite de dreptunghiuri. Pentru aceasta, împărțim intervalul $[a, b]$, care reprezintă domeniul de definiție al funcției $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, în intervale parțiale și construim dreptunghiuri care au ca bază intervalele parțiale și ca înălțime – valoarea funcției într-un punct arbitrar al bazei (fig. 2.1).

Considerăm intervalul $[a, b]$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

**Definiții 2**

- Se numește **diviziune** a intervalului $[a, b]$ orice mulțime finită și ordonată de puncte $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$, unde $n \geq 1$ și $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.
- Punctele $x_k$, $k = \overline{0, n}$, se numesc **puncte de diviziune**.
- Intervalele $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, se numesc **intervale elementare** sau **intervale parțiale** ale diviziunii $T$.
- Numărul pozitiv $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = \overline{0, n-1}$, se numește **lungimea** intervalului elementar $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, iar numărul pozitiv $\|T\| = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$ – cea mai mare dintre lungimile tuturor intervalelor elementare – se numește **norma** diviziunii $T$.

**Exemple**

1. Mulțimea $T = (1, 2, 3, ..., 10)$ este o diviziune a intervalului $[1, 10]$ cu $\|T\| = 1$.

2. Mulțimea $T = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, 1\right)$ este o diviziune a intervalului $[0, 1]$, astfel încât $\|T\| = \frac{3}{4}$.

**Definiția 3**

Fie $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$. Se numește **sistem de puncte intermediare** asociat diviziunii $T$ orice sistem finit $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ de puncte cu proprietatea $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

**Definiția 4**

Fie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție, $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ și $\xi = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $T$. **Sumă Riemann** sau **sumă integrală** asociată funcției $f$, diviziunii $T$ și sistemului de puncte intermediare $\xi$ se numește numărul real

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + ... + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

**Exercițiu rezolvat**

Să se calculeze suma integrală a funcției $f\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3x$, unde $[1, 3]$ este divizat în $n$ părți egale, iar punctele intermediare sunt luate în capetele de dreapta ale intervalelor elementare.

*Rezolvare*:

Considerăm diviziunea $T=(x_0, x_1, ..., x_n)$, unde $1=a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b=3$. Lungimile intervalelor elementare sunt egale, deci $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$ şi punctele de diviziune vor fi $x_k = a+\frac{b-a}{n}k=1+\frac{2}{n}k,\ k=0, 1, ..., n.$

Punctele intermediare $\xi_k$ coincid cu capetele de dreapta ale intervalelor $[x_k, x_{k+1}]$, deci $\xi_k = x_{k+1}=1+\frac{2}{n}(k+1),\ k=0, 1, ..., n-1$ şi suma Riemann va fi:

$$\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(2+3\xi_k)\cdot\frac{2}{n}\right]=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[2+3(1+\frac{2}{n}(k+1))]=$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(5+\frac{6}{n}(k+1))=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}5+\frac{12}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)=$$

$$=\frac{2}{n}\cdot 5n+\frac{12}{n^2}(1+2+3+...+n)=10+\frac{12}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n=10+\frac{6}{n}(1+n)=10+\frac{6}{n}+6=16+\frac{6}{n}.$$

**Observație**

*Interpretarea geometrică a sumei Riemann*. Dacă $f\colon [a, b]\to[0, +\infty)$ este o funcție continuă pe $[a, b]$, atunci produsul $f(\xi_k)\Delta x_k$ reprezintă geometric aria dreptunghiului $D_k$ cu baza $\Delta x_k$ şi înălțimea $f(\xi_k)$. Prin urmare, suma Riemann $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ reprezintă aria figurii $D=\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k$, alcătuită din dreptunghiurile $D_0, D_1, ..., D_{n-1}$ (fig. 2.2).

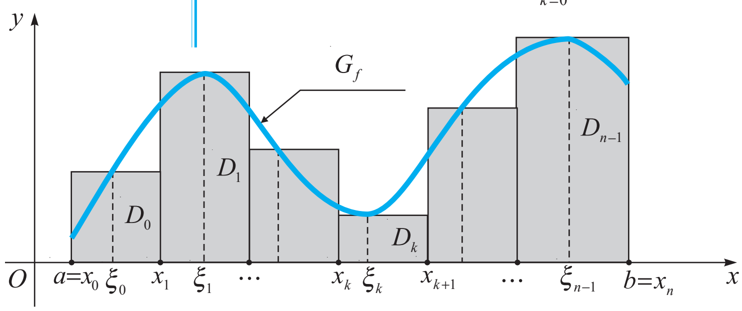


Fig. 2.2

Este evident că această arie $\sigma(T,\xi)$ aproximează aria domeniului plan mărginit de dreptele $x=a,\ x=b$, de axa $Ox$ şi de graficul funcției $f\colon [a, b]\to[0, +\infty)$. Aproximarea va fi cu atât mai exactă, cu cât bazele dreptunghiurilor $D_k,\ k=\overline{0, n-1}$, vor fi mai mici, adică dacă norma $\|T\|$ va fi din ce în ce mai mică.

Considerăm suma integrală $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$. Vom adăuga pe $[a, b]$ alte puncte de diviziune, astfel încât $\|T\|\to 0$. Atunci, suma integrală $\sigma(T,\xi)$ variază şi, în caz general, poate să se apropie de un oarecare număr $I\in\mathbb{R}$.

**Definiția 5**

**(limita sumei integrale în sens Cauchy** sau **în limbajul $\varepsilon-\delta$)**
Numărul $I\in\mathbb{R}$ se numeşte **limita sumei integrale** $\sigma(T,\xi)$ când $\|T\|\to 0$, dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există numărul $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, astfel încât pentru orice diviziune $T$ cu $\|T\|<\delta$ şi pentru orice sistem de puncte intermediare $\xi$ rezultă că $|\sigma(T,\xi)-I|<\varepsilon$.

Se notează: $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi)=I.$

**Definiția 6**

Se spune că funcția $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ **este integrabilă (în sens Riemann)** pe $[a, b]$ dacă suma integrală asociată funcției $f$ posedă limită finită: $I=\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi),\ I\in\mathbb{R}$.
Numărul $I$ se numeşte **integrală definită (integrală Riemann)** a funcției $f$ pe intervalul $[a, b]$.

Aşadar,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k}\ .$$

**Teorema 3** **(formula Leibniz–Newton)**

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, care admite primitive pe $[a, b]$, și $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă oarecare a funcției $f$. Atunci:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (\textit{\textbf{formula Leibniz–Newton}}).$$

*Demonstrație*:

Fie $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$. Conform teoremei lui Lagrange a creşterilor finite (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul IV, secvența 6.3) aplicată funcției $F$ pe intervalul elementar $[x_k, x_{k+1}]$, există punctul $c_k \in (x_k, x_{k+1})$, astfel încât $F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(c_k)(x_{k+1} - x_k)$. Cum $F$ este o primitivă a funcției $f$ pe $[a, b]$, rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

Prin urmare, $F(x_{k+1}) - F(x_k) = f(c_k)\Delta x_k$, $k = \overline{0, n-1}$.

Însă funcția $f$ este integrabilă pe $[a, b]$. În baza definiției 6, există limita finită $I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$, unde $I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, şi această limită, conform definiției 5, nu depinde nici de forma diviziunii $T$, nici de modul de alegere a sistemului de puncte intermediare $\xi$, adică putem considera $\xi_k = c_k$, $k = \overline{0, n-1}$. Pentru această alegere a sistemului de puncte intermediare $\xi$, limita $I$ rămâne neschimbată. Calculând suma integrală asociată diviziunii $T$ şi sistemului de puncte intermediare $\xi = (c_0, c_1, ..., c_{n-1})$, obținem mărimea constantă

$$\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k)) = F(b) - F(a).$$

Deci, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = F(b) - F(a)$. ►

**Observații**

**1.** Cum orice funcție continuă posedă primitive, teorema 3 stabileşte că în cazul unei funcții continue „integrala Riemann” coincide cu „integrala definită” din secvența 1.2.

**2.** Integrala în sens Riemann se defineşte pentru o clasă de funcții nu neapărat continue pe un interval.

**Exemple**

**1** Funcția constantă $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$, este integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ şi $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

Într-adevăr, oricare ar fi diviziunea $T$ şi punctele intermediare $\xi_k$, obținem $f(\xi_k) = c$.

Deci, $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} c\Delta x_k = c \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = c(x_n - x_0) = c(b - a)$ şi

$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = c(b - a)$.

Aşadar, funcția $f$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b - a)$.

**2** Funcția lui Dirichlet $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ nu este integrabilă pe niciun interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, unde $a < b$.

*Demonstrație*:

Fie $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ şi $\xi' = (\xi'_0, \xi'_1, ..., \xi'_{n-1})$, $\xi'' = (\xi''_0, \xi''_1, ..., \xi''_{n-1})$ două sisteme de puncte intermediare cu $\xi'_k, \xi''_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Dacă fiecare $\xi_k'$ este număr rațional, atunci $D(\xi_k')=1$ şi, deci,

$$\sigma(T,\xi')=\sum_{k=0}^{n-1}D(\xi_k')\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=x_n-x_0=b-a,$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi')=b-a.$

Dacă însă fiecare $\xi_k''$ este număr irațional, atunci $D(\xi_k'')=0$ şi, deci, suma integrală corespunzătoare $\sigma(T,\xi'')=\sum\limits_{k=0}^{n-1}D(\xi_k'')\Delta x_k=0.$ Prin urmare, $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi'')=0.$

Deoarece pentru sisteme diferite $\xi'$ şi $\xi''$ de puncte intermediare sumele integrale au limite diferite, rezultă că nu există $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sigma(T,\xi)$ şi, deci, funcția $D$ nu este integrabilă pe $[a, b]$.

Prezentăm, fără demonstrație, două rezultate importante din teoria calculului integral.

**Teorema 4** **(condiția necesară de integrabilitate)**

Dacă funcția $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci ea este mărginită pe acest interval.

**Observații**

**1.** Teorema 4 poate fi formulată şi astfel: *Dacă funcția* $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ *nu este mărginită pe* $[a, b]$, *atunci funcția f nu este integrabilă pe acest interval.*

De exemplu, funcția $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x\in(0, 1]\\ 0, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$ este nemărginită pe $[0, 1]$, deoarece $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$. Deci, funcția $f$ nu este integrabilă pe $[0, 1]$.

**2.** Condiția ca funcția $f$ să fie mărginită pe $[a, b]$ este doar necesară, dar nu şi suficientă pentru integrabilitatea funcției $f$. De exemplu, există funcții $f$ mărginite pe $[a, b]$ (funcția lui Dirichlet), dar neintegrabile pe acest interval.

**Teorema 5** **(clase de funcții integrabile)**

a) Orice funcție $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

b) Orice funcție $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze integrala:

a*) $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin s\,\mathrm{d}s}{2+\cos s}$;  b*) $\int\limits_1^{e}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;  c) $\int\limits_{-13}^{0}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x-1}}$;  d) $\int\limits_0^{1}\dfrac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

a*) Determinăm o primitivă $F(s)$, $s\in[0,\pi]$, a funcției $f\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(s)=\dfrac{\sin s}{2+\cos s}$:

Cum $\int\dfrac{\sin s\,\mathrm{d}s}{2+\cos s}=-\int\dfrac{\mathrm{d}(2+\cos s)}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s)+C$, rezultă că $F(s)=-\ln(2+\cos s)$.

Deci, $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\sin s\mathrm{d}s}{2+\cos s}=-\ln(2+\cos s)\Big|_0^{\pi}=F(\pi)-F(0)=-\ln(2+\cos\pi)+\ln(2+\cos 0)=\ln 3.$

b*) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^e \ln x\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_1^e = \frac{1}{2}(\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}.$

c) $$\int_{-13}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2x-1}} = -\int_{-13}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-2x}} = -\int_{-13}^{0}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{-2}\cdot\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\Bigg|_{-13}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(1-2x)^{\frac{2}{3}}\Big|_{-13}^{0} = \frac{3}{4}(1-27^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{4}(1-9) = -6.$$

d) Calculăm primitivele funcției $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$. Pentru aceasta, calculăm integrala nedefinită: $\displaystyle\int\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = \int\frac{x^3+1-1}{x+1}\mathrm{d}x = \int\frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}\mathrm{d}x =$

$$= \int\left(x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + C.$$

Considerăm primitiva $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(x+1)$, $x\in[0, 1]$. Conform formulei Leibniz–Newton, $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2\right) - (0 - \ln 1) = \frac{5}{6} - \ln 2.$

**2** Să se demonstreze (utilizând definițiile 5 şi 6) că funcția $f\colon [a, b]\to[-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, este integrabilă pe orice interval $[a, b]\subset\mathbb{R}$.

*Demonstrație*:

Fie $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ şi $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, puncte intermediare arbitrare. Conform teoremei lui Lagrange a creşterilor finite, aplicată pe fiecare interval elementar $[x_k, x_{k+1}]$ primitivei $F\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, $F(x) = \sin x$, a funcției $f$, există punctele $c_k\in(x_k, x_{k+1})$, astfel încât

$$\sin x_{k+1} - \sin x_k = \cos c_k(x_{k+1} - x_k),\quad k = \overline{0, n-1}.$$

De aici rezultă:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos c_k\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(\sin x_{k+1} - \sin x_k) = \sin x_n - \sin x_0 = \sin b - \sin a.$$

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta_k$$

Cum $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\xi_k\Delta x_k$, putem scrie:

$$\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a) = \sum_{k=0}^{n-1}(\cos\xi_k - \cos c_k)\Delta x_k.$$

Conform teoremei lui Lagrange, aplicată funcției $f$ pe $[\xi_k, c_k]$ (sau pe $[c_k, \xi_k]$), există punctul $\Theta_k\in(\xi_k, c_k)$, astfel încât $\cos\xi_k - \cos c_k = -\sin\Theta_k(\xi_k - c_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Întrucât derivata $f'(x) = -\sin x$ este mărginită pe $[a, b]$, obținem:

$$|\cos\xi_k - \cos c_k| = |\sin\Theta_k||\xi_k - c_k| \le 1\cdot\Delta x_k \le \max_{0\le k\le n-1}\Delta x_k = \|T\|.$$

Prin urmare,

$$|\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a)| \le \sum_{k=0}^{n-1}|\cos\xi_k - \cos c_k|\Delta x_k \le \|T\|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \|T\|(b-a).\quad (2)$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ considerăm $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$. Atunci, din relația (2) rezultă că pentru orice diviziune $T$ cu $\|T\| < \delta$ și pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare $\xi$ are loc inegalitatea $|\sigma(T, \xi) - (\sin b - \sin a)| \le \|T\|(b-a) < \delta(b-a) = \varepsilon$.

În baza definițiilor 5 și 6, funcția $f\colon [a, b] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$, este integrabilă pe $[a, b]$ și $\int\limits_a^b \cos x\, \mathrm{d}x = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = \sin b - \sin a$. ►

## 1.4. Interpretarea geometrică a integralei definite

**Definiția 7**

Fie numerele reale $a, b$, $a < b$, și funcția continuă $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$. Domeniul plan mărginit de graficul funcției $f$, de axa absciselor $Ox$ și de dreptele verticale $x = a$ și $x = b$ se numește **subgrafic al funcției** $f$ (fig. 2.2).

Sumele integrale $\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ ale funcției continue și pozitive $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ reprezintă geometric aria domeniului $D = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} D_k$, alcătuit din dreptunghiurile $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ (fig. 2.2).

Aceste sume aproximează cu o anumită eroare aria $\mathscr{A}$ a subgraficului funcției $f$ (fig. 2.2). Cum egalitatea aproximativă $\mathscr{A} \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ este cu atât mai exactă, cu cât norma $\|T\|$ este mai mică, intuitiv, trecând la limită cu $\|T\| \to 0$ în această egalitate aproximativă, ea va deveni o egalitate exactă:

$$\boxed{\mathscr{A} = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

**Rețineți!**

Integrala definită a unei funcții $f$ continue și pozitive pe un interval $[a, b]$ reprezintă geometric aria $\mathscr{A}$ a subgraficului funcției $f$ pe intervalul $[a, b]$ (fig. 2.2).

**Probleme rezolvate**

**1** Să se afle aria subgraficului funcției $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (secvența 1.1, fig. 2.1).

*Rezolvare*:

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

**2** Să se determine aria subgraficului funcției $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ (fig. 2.3).

*Rezolvare*:

$$\mathscr{A} = \int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\left.\sqrt{(x+1)^3}\right|_0^3 = \frac{2}{3}(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}) =$$

$$= \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$$

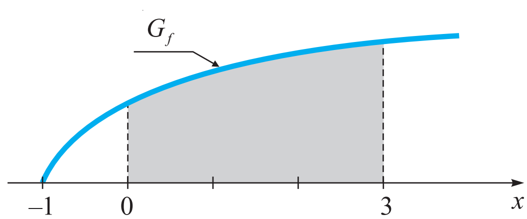


Fig. 2.3

**3** Să se afle aria subgraficului funcției $f\colon [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)(3-x)$, reprezentat în figura 2.4.

*Rezolvare*:

$$\mathscr{A} = \int_{-1}^{3}(x+1)(3-x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{3}(3+2x-x^2)\mathrm{d}x = \left(3x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= (9+9-9) - \left(-3+1+\frac{1}{3}\right) = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

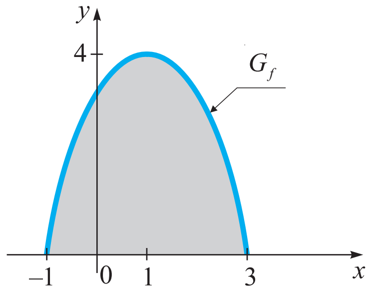


Fig. 2.4

## Exerciții propuse

***Profilul real***

### A₁

Aplicând formula Leibniz–Newton, să se calculeze integrala:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**1.** a) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 \mathrm{d}x$; b) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} x^3 \mathrm{d}x$; c) $\int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x$;

d) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} x^5 \mathrm{d}x$; e) $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$;

g) $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{-8}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$;

i) $\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}}$; j) $\int_1^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$.

**2.** *Lucrați în perechi!*

a) $\int_{-1}^{1}(3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x$; b) $\int_1^3 (2-x)^2 \mathrm{d}x$;

c) $\int_0^1 x(x-1)^2 \mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{2}(3x-2)(2-x)\mathrm{d}x$;

e) $\int_0^1 (3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} - 1)\mathrm{d}x$; f) $\int_1^4 \frac{1-3x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

**3.** a) $\int_1^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$; b) $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$;

c) $\int_1^2 \frac{3x^2+x+4}{x^3}\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{0}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2x+1)}\right)\mathrm{d}x$; f) $\int_{-1}^{2}\left(x-2+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-1}^{0}\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$;

i) $\int_{-3}^{-2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$; j) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$.

**4.** a) $\int_0^{\ln 2} e^x \mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^{1} e^{-x}\mathrm{d}x$; c) $\int_{-\ln 2}^{\ln\sqrt{2}} e^{2x}\mathrm{d}x$; d) $\int_{-1}^{0} 2^x \mathrm{d}x$;

e) $\int_0^{\log_3 4} 3^{2x}\mathrm{d}x$; f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$; g) $\int_{-\pi}^{2\pi}\sin 3x\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$;

i) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$; j) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{6}\mathrm{d}x$; k) $\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$; l) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 3x}$;

m) $\int_0^{\pi}(\sin x + \cos x)^2 \mathrm{d}x$; n) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2 x - \cos^2 x)\mathrm{d}x$;

o) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$; p) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

**5.** *Lucrați în grup!* Să se calculeze aria subgraficului funcției: a) $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$;

b) $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

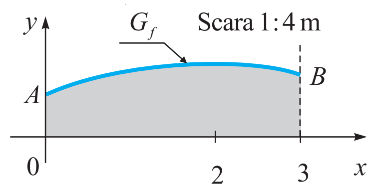
c) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$.

**6.** *Investigați!* În desen este reprezentat unul dintre cei doi pereți laterali ai unei sere. Curba $AB$ este dată de funcția $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{12}(6+4x-x^2)$.

a) Să se afle aria celor doi pereți laterali ai serei.

b) Să se estimeze cantitatea de vopsea necesară pentru a vopsi exteriorul pereților laterali, consumul fiind de 150 g pentru 1 m².

c) Să se estimeze costul vopselei dacă prețul unui kilogram este de 25 lei.



## B₁

**7.** Să se calculeze integrala:

a) $\int_{-3}^{0}\sqrt[3]{1+3x}\,\mathrm{d}x$; b) $\int_{-6}^{-1}\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int_{0}^{6}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+4}}$;

d) $\int_{-3}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-5x}}$; e) $\int_{0}^{1}(2-3x)^3\,\mathrm{d}x$; f) $\int_{0}^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{(3x+1)^5}$;

g) $\int_{e}^{e^3}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$; h) $\int_{1}^{e}\frac{\ln^4 x}{x}\mathrm{d}x$; i) $\int_{e}^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$;

j) $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{5x^2-1}}$; k) $\int_{0}^{2}\frac{(2x+1)\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$; l) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{tg}^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

m) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; n) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\arcsin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$; o) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{ctg}\,x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

p) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$; q) $\int_{0}^{\sqrt[3]{4}}\frac{x^2\mathrm{d}x}{16+x^6}$; r) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$;

s) $\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$; t) $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$; u) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{4-x^2}$;

v) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1+4\sin^2 x}$; w) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}$; x) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16+9x^2}}$;

y) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$; z) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+\sin^2 x}}$.

**8.** ***Lucrați în perechi!*** Să se calculeze integrala:

a) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x$; b) $\int_{\frac{1}{3}}^{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$;

c) $\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x$; d) $\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x-1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x$; f) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4(1+4x^2)}+\frac{x}{1+4x^2}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int_{0}^{1}\left(1-\frac{2x+3}{x^2+3x+4}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{3x+6}+\frac{1}{6x+3}\right)\mathrm{d}x$.

**9.** Să se calculeze aria subgraficului funcției:

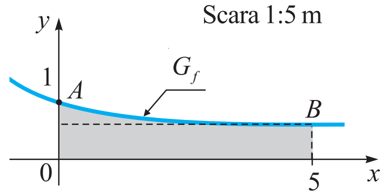
a) $f\colon\left[\frac{1}{2},2\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$;

b) $f\colon[1,8]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{x}$;

c) $f\colon[-\ln 3,\ln 4]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x}$.

**10.** ***Lucrați în grup!***

Pentru construirea unui bloc de locuit trebuie săpată temelia pe panta unui deal. Secțiunea transversală a săpăturii pentru temelia blocului este reprezentată în desen. Panta dealului este dată de curba $AB$, definită prin funcția




$f\colon[0,5]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{275}(2x^2-32x+275)$.

a) Să se determine aria (în metri pătrați) secțiunii transversale a săpăturii.

b) Să se afle volumul (în metri cubi) cantității de pământ care trebuie transportat de la șantier, dacă blocul de locuit va avea lungimea de aproximativ 110 metri.

c) Să se estimeze cheltuielile firmei de construcție, dacă pentru întregul lanț tehnologic (săpare, transportare etc.) proiectul prevede cheltuieli de până la 5 lei pentru 1 $m^3$ de pământ.

## C₁

**11.** ***Investigați!*** Utilizând definițiile 5 și 6 și metoda aplicată în exercițiul rezolvat **2** (pagina 32), să se demonstreze că funcția $f$ este integrabilă și să se calculeze integrala definită a acesteia, dacă:

a) $f\colon[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x},\ b>a>0$;

b) $f\colon[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$;

c) $f\colon[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$.

**12.** ***Investigați!*** Să se arate că funcția $f$ nu este integrabilă:

a) $f\colon[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=1\\ \frac{1}{x-1}, & \text{dacă } 1<x\le 2;\end{cases}$

b) $f\colon[0,e]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x=0\\ \ln x, & \text{dacă } 0<x\le e.\end{cases}$

$$\mathcal{A}=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

# § 2 PROPRIETĂȚILE PRINCIPALE ALE INTEGRALELOR DEFINITE

Vom formula şi vom demonstra unele dintre proprietățile de bază ale integralelor definite. Aceste proprietăți pot fi stabilite în cazul general al funcțiilor integrabile pe un interval, însă demonstrațiile respective necesită eforturi considerabile, fiindcă sunt bazate pe noțiuni şi rezultate mult mai profunde. În demonstrațiile proprietăților care urmează, uneori se va presupune suplimentar că ***funcțiile din enunțul proprietăților sunt continue***, deci şi integrabile. Această presupunere simplifică esențial demonstrațiile proprietăților, fiindcă funcțiile continue admit primitive.

Proprietățile integralei definite a unei funcții continue, stabilite în teoremele 1 şi 2 şi în corolarele 1 şi 2 (secvența 1.2), rămân adevărate şi pentru cazul funcțiilor integrabile pe un interval. Vom continua lista acestor proprietăți.

**Teorema 6** **(proprietatea de aditivitate a integralei definite)**

Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$, $I$ – interval) şi $a, b, c \in I$, $a \le c \le b$. Dacă funcția $f$ este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, atunci $f$ este integrabilă pe intervalele $[a, c]$ şi $[c, b]$ şi are loc egalitatea: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$

*Demonstrație*:

Fie funcția $f$ continuă pe intervalul $I$ şi $a \le c \le b$. Atunci, funcția $f$ este integrabilă pe fiecare dintre intervalele $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$ (teorema 5) şi admite primitive pe $I$ (teorema 2, modulul 1). Fie $F\colon I \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f$ pe $I$. Conform formulei Leibniz–Newton,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

şi, astfel, egalitatea din enunț este stabilită. ►

**Exercițiu rezolvat**

Pentru funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ să se calculeze integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

a) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } -1 \le x \le 1 \\ 2 - x, & \text{dacă } 1 < x \le 2; \end{cases}$

b) $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$;

c) $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$.

*Rezolvare*:

a) Funcția $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } -1 \le x \le 1 \\ 2 - x, & \text{dacă } 1 < x \le 2, \end{cases}$ este continuă pe $[-1, 2]$, deci şi integrabilă. Conform teoremei 6 şi formulei Leibniz–Newton,

$$\int_{-1}^{b} f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 (2 - x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

b) Funcția $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$, este continuă, deci şi integrabilă şi poate fi explicitată astfel: $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{dacă } -2 \le x \le -1 \\ 2, & \text{dacă } -1 < x < 1 \\ 2x, & \text{dacă } 1 \le x \le 3. \end{cases}$

Aplicând de două ori proprietatea de aditivitate a integralei definite, obținem:

$$\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (-2x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 2\mathrm{d}x + \int_1^3 2x\mathrm{d}x = -x^2\Big|_{-2}^{-1} + 2x\Big|_{-1}^1 + x^2\Big|_1^3 = 3 + 4 + 8 = 15.$$

c) Funcția $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$, este continuă pe $[0, \pi]$ și poate fi scrisă astfel: $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ dacă } 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ \sin x, \text{ dacă } \frac{\pi}{4} < x \le \pi. \end{cases}$

Din proprietatea de aditivitate a integralei definite, rezultă:

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \sqrt{2}.$$

**Teorema 7** **(proprietatea de invarianță a semnului integralei definite)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, este integrabilă pe $[a, b]$ și $f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ge 0$.

*Demonstrație*:

Pentru orice diviziune $T = (x_0, x_1, ..., x_n)$ a intervalului $[a, b]$ și orice alegere a punctelor intermediare $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, deoarece $f(\xi_k) \ge 0$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k > 0$, obținem că $\sigma(T, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. Trecând în ultima inegalitate la limită cu $\|T\| \to 0$, obținem $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. ►

**Teorema 8** **(proprietatea de monotonie a integralei definite)**

Dacă funcțiile $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, sunt integrabile pe $[a, b]$ și $f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

*Demonstrație*:

Conform ipotezei teoremei, $g(x) - f(x) \ge 0$ pentru orice $x \in [a, b]$. Aplicând proprietățile de liniaritate și de invarianță a semnului integralei, obținem:

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x \ge 0.$$

Prin urmare, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. ►

**Teorema 9** **(integrabilitatea modulului funcției)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, este integrabilă pe $[a, b]$, atunci și funcția $|f|: [a, b] \to \mathbb{R}$, $|f|(x) = |f(x)|$, este integrabilă pe $[a, b]$ și are loc inegalitatea:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**Teorema 10** **(evaluarea sumelor Riemann)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $a \le b$, este mărginită pe $[a, b]$ și $m \le f(x) \le M$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci pentru orice diviziune $T$ a intervalului $[a, b]$ și orice sistem $\xi$ de puncte intermediare are loc inegalitatea dublă: $m(b-a) \le \sigma(T, \xi) \le M(b-a)$. În particular, dacă funcția $f$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

**Teorema 11** **(teorema de medie pentru funcții integrabile)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $m \le f(x) \le M$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci există numărul $\mu \in [m, M]$, astfel încât $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.

**Teorema 12** **(teorema de medie pentru funcții continue)**

Dacă funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$.

*Demonstrație*:

Dacă $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue $f$, atunci $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$. Aplicând teorema lui Lagrange a creşterilor finite funcției derivabile $F$ (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul IV, secvența 6.3), rezultă că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$.

Prin urmare, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = f(c)(b-a)$. ►

**Observații**

**1.** Numărul $M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se numeşte ***valoare medie*** a funcției $f$ pe $[a, b]$. Teorema 12 stabileşte că pentru funcții continue valoarea medie este atinsă de funcția $f$ într-un punct oarecare $c \in (a, b)$.

**2.** *Teoremele de medie au următoarea interpretare geometrică*: aria subgraficului funcției continue şi pozitive $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ este egală cu aria unui dreptunghi cu baza $b-a$ şi înălțimea $\mu = f(c)$, adică $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$.

Altfel spus, ariile figurilor colorate (fig. 2.5) sunt egale.

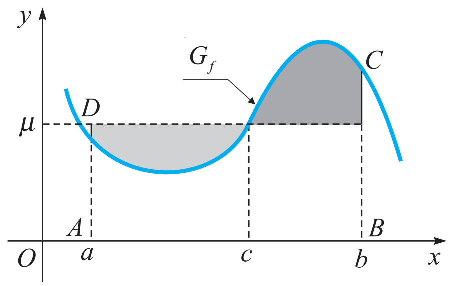



Fig. 2.5

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_1^{\sqrt[5]{2}} \left(x^4 + \frac{1}{x^6}\right)\mathrm{d}x$; b) $\int_{-1}^{1} \frac{4e^{2x} - 9}{2e^x + 3}\mathrm{d}x$; c*) $\int_1^2 \sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2} + 12}\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

a) Aplicând proprietatea de liniaritate a integralei definite (teorema 2) şi formula lui Leibniz–Newton, obținem:

$$\int_1^{\sqrt[5]{2}} \left(x^4 + \frac{1}{x^6}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt[5]{2}} x^4\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt[5]{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^6} = \frac{x^5}{5}\Big|_1^{\sqrt[5]{2}} + \frac{x^{-6+1}}{-6+1}\Big|_1^{\sqrt[5]{2}} = \frac{x^5}{5}\Big|_1^{\sqrt[5]{2}} - \frac{1}{5x^5}\Big|_1^{\sqrt[5]{2}} =$$

$$= \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}.$$

b) Cum $4e^{2x}-9=(2e^x)^2-3^2=(2e^x-3)(2e^x+3)$, obținem:

$$\int_{-1}^{1}\frac{4e^{2x}-9}{2e^x+3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{(2e^x-3)(2e^x+3)}{2e^x+3}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(2e^x-3)\mathrm{d}x=2\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2e^x\Big|_{-1}^{1}-3x\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2(e-e^{-1})-3(1+1)=2e-\frac{2}{e}-6=\frac{2(e^2-3e-1)}{e}.$$

c*) Observăm că $9x^2+12+\dfrac{4}{x^2}=\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^2$ și dacă $x\in[1,\,2]$, atunci $3x+\dfrac{2}{x}>0$.

Prin urmare, $\sqrt{9x^2+\dfrac{4}{x^2}+12}=\sqrt{\left(3x+\dfrac{2}{x}\right)^2}=\left|3x+\dfrac{2}{x}\right|=3x+\dfrac{2}{x}$. Deci,

$$\int_1^2\sqrt{9x^2+\frac{4}{x^2}+12}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left(3x+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int_1^2x\mathrm{d}x+2\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{3x^2}{2}\Bigg|_1^2+2\ln x\Big|_1^2=$$

$$=\frac{3}{2}(2^2-1)+2(\ln 2-\ln 1)=\frac{9}{2}+2\ln 2.$$

**2** Să se determine semnul integralei:

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sin x^2\mathrm{d}x$; b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

a) Dacă $x\in(0,\sqrt{3})$, atunci $x^2\in(0,\,3)\subset(0,\,\pi)$ și, deci, $\sin x^2>0$. Aplicând teorema de medie funcției continue $f\colon[0,\sqrt{3}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x^2$, rezultă că există cel puțin un punct $c\in(0,\sqrt{3})$, astfel încât $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sin x^2\mathrm{d}x=\sqrt{3}\sin c^2>0$.

b) Pentru orice $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ avem $x^{10}\ln x<0$. Cum funcția $f\colon\left[\dfrac{1}{2},1\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{10}\ln x$, este continuă, conform teoremei 12, rezultă că există cel puțin un punct $c\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, astfel încât $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{10}\ln x\,\mathrm{d}x=(c^{10}\ln c)\left(1-\frac{1}{2}\right)<0$.

**3** Să se compare integralele $I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{100}x\,\mathrm{d}x$ și $I_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Considerăm funcția $f\colon\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin^{10}x-\sin^{100}x$.

Deoarece $\sin^{10}x>\sin^{100}x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, și egalitatea $\sin^{10}x=\sin^{100}x$ pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ este posibilă doar pentru $x=0$ și $x=\dfrac{\pi}{2}$, rezultă că $f(x)>0$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Din teorema 12, aplicată funcției continue $f\colon\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, rezultă că există cel puțin un punct $c\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $I_2-I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{10}x-\sin^{100}x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(c)>0$. Deci, $I_2>I_1$.

**4** Să se determine valoarea medie a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 2\sin x + 3\cos x$, pe $[\pi, 2\pi]$.

*Rezolvare*:

$$M[f] = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi - \pi}\int_\pi^{2\pi}(5 - 2\sin x + 3\cos x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}(5x + 2\cos x + 3\sin x)\Big|_\pi^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(10\pi + 2) - \frac{1}{\pi}(5\pi - 2) = 5 + \frac{4}{\pi}.$$

**5** Să se determine punctul $c$ din teorema de medie aplicată funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, pe $[-2, 4]$.

*Rezolvare*:

Deoarece funcția $f$ este continuă, conform teoremei 12, există cel puțin un punct $c \in (-2, 4)$, astfel încât $\int_{-2}^{4} x^2 \mathrm{d}x = 6c^2$. Cum $\int_{-2}^{4} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{4} = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} = 24$, obținem $6c^2 = 24 \Leftrightarrow c^2 = 4$, adică $c \in \{-2, 2\}$. Soluția care aparține intervalului (–2, 4) este $c = 2$.

**6** Fie funcția continuă $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$ și $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Să se demonstreze că există cel puțin un punct $x_0 \in (0, 2)$, astfel încât $f(x_0) = x_0$.

*Rezolvare*:

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - 2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 (f(x) - x)\mathrm{d}x = 0$. Din teorema de medie rezultă că există cel puțin un punct $x_0 \in (0, 2)$, astfel încât $(f(x_0) - x_0)(2 - 0) = 0$. Deci, $f(x_0) = x_0$.

## Exerciții propuse

***Profilul real***

### $A_1$

Să se calculeze:

**1.** a) $\int_1^4 (x^2 - 2\sqrt{x})\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 (3\sqrt{x} + x)\mathrm{d}x$;

c) $\int_{-1}^0 (2x - \sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; d) $\int_1^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_{-1}^1 (x^2 - 8\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; f) $\int_9^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{13}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int_1^{16} \left(\frac{8}{x^2} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)\mathrm{d}x$.

**2.** a) $\int_1^2 \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$; b) $\int_{-8}^{-1} \frac{(1-x)^2}{x \cdot \sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

c) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1+x)^3}{x^4}\mathrm{d}x$; d) $\int_1^{16} \frac{x-1}{x^2}\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_{-1}^1 (1+x)(1+2x)(1-x)\mathrm{d}x$; f) $\int_{-1}^0 (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)\mathrm{d}x$;

g) $\int_{-4}^5 (\sqrt{x+20} - \sqrt{x+4})\mathrm{d}x$; h) $\int_{-9}^0 (\sqrt{25+x} + \sqrt{9+x})\mathrm{d}x$;

i) $\displaystyle\int_{-3}^{13}\frac{dx}{\sqrt{x+12}-\sqrt{x+3}}$; j) $\displaystyle\int_{-5}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{10-3x}+\sqrt{1-3x}}$;

k) $\displaystyle\int_{0}^{1}(3e^{3x}-4e^{2x})dx$; l) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(e^{2x}-e^{-2x})^2\,dx$;

m) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\frac{e^{-x}(e^{5x}+e^{-x})}{e^{2x}}dx$; n) $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$;

o) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}dx$; p) $\displaystyle\int_{2}^{3}\sqrt{x^4+x^{-4}+2}\,dx$;

q) $\displaystyle\int_{0}^{1}2^{x}(3^{x}+1)dx$; r) $\displaystyle\int_{0}^{1}(3^{x}-1)^2\,dx$.

**3.** ***Lucrați în perechi!***

a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}}\left(\frac{3}{\cos^2 3x}+\frac{2}{\sin^2 2x}\right)dx$;

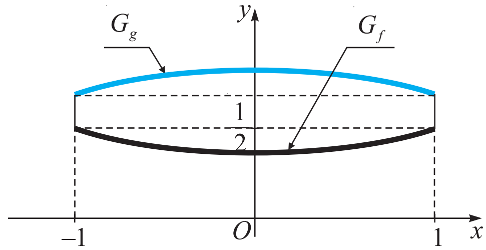
b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{10}}\left(\frac{3}{\cos^2 3x}-\frac{8}{\sin^2 8x}+\frac{60}{\pi}\right)dx$.

**4.** ***Lucrați în grup!***

În desen este reprezentată lentila unui telescop la scara 1 : 1 m. Curbele ce mărginesc suprafețele lentilei sunt date de funcțiile:

$f\colon[-1, 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{20}(9+x^2)$;

$g\colon[-1, 1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{59}{5}-x^2\right)$.




a) Să se afle diametrul lentilei.
b) Să se determine grosimea marginii lentilei.
c) Să se afle grosimea lentilei în centrul acesteia.
d) Să se determine aria secțiunii transversale a lentilei.

## B₁

**5.** ***Investigați!*** Să se arate că funcția $f$ este continuă și să se calculeze integrala definită a acesteia:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{4}f(x)dx,\ f\colon[-1, 4]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ dacă } x\in[-1, 0)\\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x\in[0, 4];\end{cases}$$

b) $\displaystyle\int_{-8}^{4}f(x)dx,\ f\colon[-8, 4]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}, \text{ dacă } x\in[-8, 0)\\ 3\sqrt{x}, \text{ dacă } x\in[0, 4];\end{cases}$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{3}f(x)dx,\ f\colon[-1, 3]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}x^3, \text{ dacă } x\in[-1, 1]\\ x^2, \text{ dacă } x\in(1, 2)\\ 4, \text{ dacă } x\in[2, 3].\end{cases}$$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx$, unde $f\colon[-1, 1]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}x^2+x, \text{ dacă } x\in[-1, 0]\\ x^3-x, \text{ dacă } x\in(0, 1];\end{cases}$$

e) $\displaystyle\int_{0}^{2}f(x)dx$, unde $f\colon[0, 2]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}4(1-x)^3, \text{ dacă } x\in[0, 1)\\ 3\sqrt{x-1}, \text{ dacă } x\in[1, 2];\end{cases}$$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{2\sqrt[3]{6}}f(x)dx$, unde $f\colon[-1, 2\sqrt[3]{6}]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}x^2\sqrt{1+x^3}, \text{ dacă } x\in[-1, 2]\\ \dfrac{9x^2}{\sqrt{1+x^3}}, \text{ dacă } x\in(2, 2\sqrt[3]{6}];\end{cases}$$

g) $\displaystyle\int_{1}^{4}f(x)dx$, unde $f\colon[1, 4]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}2, \text{ dacă } x=1\\ \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}}, \text{ dacă } x\in(1, 4];\end{cases}$$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)dx$, unde $f\colon[0, \pi]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}, \text{ dacă } x\in[0, \pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}\\ 2, \text{ dacă } x=\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$$

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx$, unde $f\colon[-1, 1]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}1-2x+3x^2, \text{ dacă } x\in[-1, 0]\\ 1+2x-3x^2, \text{ dacă } x\in(0, 1];\end{cases}$$

j) $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx$, unde $f\colon[-1, 1]\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x^2}, \text{ dacă } x\in[-1, 0)\\ \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \text{ dacă } x\in[0, 1];\end{cases}$$

k) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, unde $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \min\{x, 2-x\}, \ \forall x \in [0, 2];$

l) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$, unde $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \max\{x, \ 2-x\}, \ \forall x \in [0, 2].$

**6.** Să se calculeze:

a) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x;$ b) $\int_{-1}^1 |2x+1|\,\mathrm{d}x;$

c) $\int_0^1 |1-3x|\,\mathrm{d}x;$ d) $\int_{-1}^1 |x^3|\,\mathrm{d}x;$

e) $\int_{-2}^2 |x^2-1|\,\mathrm{d}x;$ f) $\int_{-2}^3 |x^2-x-2|\,\mathrm{d}x;$

g) $\int_{-1}^2 (x^2-|x|)\mathrm{d}x;$ h) $\int_{-1}^2 (|x|+|1-x|)\mathrm{d}x;$

i) $\int_0^4 (|1+x|-|2-x|)\mathrm{d}x;$ j) $\int_0^2 |1-x^3|\,\mathrm{d}x;$

k) $\int_{-1}^2 |x-x^3|\,\mathrm{d}x;$ l) $\int_0^3 \left|\frac{2-x}{1+x}\right|\mathrm{d}x;$

m) $\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x;$ n) $\int_{-1}^1 \sqrt{e^{2x}+e^{-2x}-2}\,\mathrm{d}x;$

o) $\int_{-1}^1 \sqrt{9^x-2\cdot 3^x+1}\,\mathrm{d}x;$ p) $\int_{-1}^2 (|2-2^x|-|2^x-1|)\mathrm{d}x;$

q) $\int_{-1}^2 \max\{x, x^2\}\mathrm{d}x.$

**7.** ***Lucrați în perechi!*** Fără a calcula integrala, să se determine semnul ei:

a) $\int_{-1}^0 \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x;$ b) $\int_\pi^{2\pi} \arcsin(\sin x)\,\mathrm{d}x;$

c) $\int_2^{\frac{3}{2}} \log_2(x-1)\,\mathrm{d}x;$ d) $\int_{-2}^{-1} (\pi^x - e^x)\mathrm{d}x.$

**8.** Să se compare integralele definite:

a) $I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{tg}^5 x\,\mathrm{d}x$ și $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}^{10} x\,\mathrm{d}x;$

b) $I_1 = \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x$ și $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x;$

c) $I_1 = \int_0^1 \cos x^2\mathrm{d}x$ și $I_2 = \int_0^1 \cos x^5\mathrm{d}x.$

**9.** Să se calculeze valoarea medie a funcției:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 3\cos 3x - 4\cos^2 2x$, pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right];$

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2^x(4^x - 2^x + 1)$, pe $[-1, 1]$.

**10.** Se consideră funcția $f\colon [1, 12] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \int_1^2 (12s^5 - 6ts^2 + t^2 - 2)\mathrm{d}s,$$

unde pentru $t \in \{1, 2, ..., 12\}$ valoarea $y = f(t)$ reprezintă prețul unui produs (în lei) pe piață în luna $t$ a anului, în funcție de cerere și ofertă.

a) Să se determine funcția $f$.

b) Să se afle prețul produsului în lunile ianuarie și decembrie.

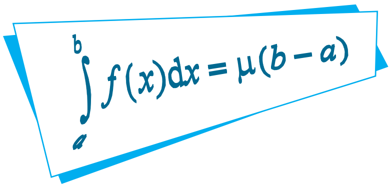
c) Să se determine în ce lună a anului prețul este minim.

d) Să se afle valoarea minimă a prețului produsului.

**11.** ***Lucrați în grup!*** Să se calculeze punctul $c$ din teorema de medie pentru integrala definită:

a) $\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x;$

b) $\int_0^{2\pi} (2+3\sin x)\mathrm{d}x;$




c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x;$

d) $\int_1^3 (3x^2-2x-1)\,\mathrm{d}x.$

## C₁

**12.** Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât

$\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 6$ și $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 8.$

Să se calculeze $\int_4^5 (3f(x)+2x)\mathrm{d}x.$

**13.** ***Investigați!*** Fie $f\colon [2, 5] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 39$. Să se demonstreze că există punctul $c \in (2, 5)$, astfel încât $f(c) = c^2$.

# § 3 METODE DE CALCUL AL INTEGRALEI DEFINITE

În acest paragraf, pentru calculul integralelor definite vom utiliza unele metode studiate în modulul 1 (Integrale nedefinite).

## 3.1. Integrarea prin părți

În această secvență, primitiva funcției $f$ va fi determinată cu ajutorul metodei integrării prin părți, studiată în modulul 1. Amintim că formula de integrare prin părți este: $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$, unde $u$ și $v$ sunt funcții derivabile cu derivate $u'$ și $v'$ continue pe un interval, iar clasele de funcții care pot fi integrate prin această metodă sunt date în observația respectivă din § 3 al modulului 1.

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze integrala $\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Pentru a obține o primitivă a funcției continue $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{2x}$, calculăm integrala nedefinită a funcției $f$ utilizând metoda integrării prin părți. Fie $u = x+1$, $\mathrm{d}v = e^{2x}\mathrm{d}x$. Atunci, $\mathrm{d}u = (x+1)'\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ și $v = \int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}$. În baza formulei de integrare prin părți pentru integrale nedefinite, avem:

$$\int (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = \left\{ uv - \int v\mathrm{d}u \right\} = \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x} + C.$$

Așadar, una dintre primitivele funcției $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^{2x}$, este funcția $F\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x}$. Deoarece $F(1) = \frac{3}{4}e^2$, $F(0) = \frac{1}{4}$, din formula Leibniz–Newton rezultă:

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}(3e^2 - 1).$$

**2** Să se calculeze integrala $I = \int_0^{\pi} (x^2 + x + 1)\cos x\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Integrând de două ori prin părți, vom obține:

$$\int (x^2+x+1)\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 + x + 1 & \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (x^2+x+1)'\mathrm{d}x & v = \int \cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)\mathrm{d}x & v = \sin x \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ uv - \int v\mathrm{d}u \right\} = (x^2+x+1)\sin x - \int (2x+1)\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{matrix} u = 2x+1, & \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = (2x+1)'\mathrm{d}x & v = \int \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x & v = -\cos x \end{matrix} \right\} =$$

$$= (x^2+x+1)\sin x - [-(2x+1)\cos x + 2\int \cos x\,\mathrm{d}x] =$$

$$= (x^2+x+1)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x = (x^2+x-1)\sin x + (2x+1)\cos x + C.$$

Deci, una dintre primitivele funcției continue $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+x+1)\cos x$, este funcția $F\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2+x-1)\sin x + (2x+1)\cos x$.

Cum $F(\pi) = (\pi^2 + \pi - 1)\sin \pi + (2\pi + 1)\cos \pi = -(2\pi + 1)$, $F(0) = -\sin 0 + \cos 0 = 1$, din formula Leibniz–Newton rezultă că $I = F(\pi) - F(0) = -2(\pi + 1)$.

Integrala definită poate fi calculată prin metoda integrării prin părți, utilizând formula stabilită în următoarea teoremă:

**Teorema 13**

Fie $u: [a, b] \to \mathbb{R}$ și $v: [a, b] \to \mathbb{R}$ funcții derivabile pe $[a, b]$ cu derivatele $u': [a, b] \to \mathbb{R}$ și $v': [a, b] \to \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$. Atunci, este adevărată formula

$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}(v(x)) = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}(u(x)),$$

numită ***formula de integrare prin părți*** pentru integrala definită.

**3** Să se calculeze integrala $\int_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Prezentăm schema calculelor pentru rezolvarea exercițiului **3** prin aplicarea formulei de integrare prin părți:

$$\int_1^e (3x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} u=\ln x & \mathrm{d}v=(3x^2+1)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=(\ln x)'\mathrm{d}x & v=\int(3x^2+1)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x} & v=x^3+x \end{matrix}\right\} = (x^3+x)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e (x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= e^3+e-\int_1^e (x^3+x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = e^3+e-\int_1^e (x^2+1)\mathrm{d}x = e^3+e-\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_1^e = \frac{2}{3}(e^3+2).$$

**4** Să se calculeze integrala $I = 2\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Vom exemplifica o metodă de aplicare a schemei care nu utilizează notațiile respective pentru $u$ și $\mathrm{d}v$. Metoda se aplică în cazul în care una dintre funcțiile de sub semnul integralei poate fi scrisă cu ajutorul diferențialei. Vom scrie expresia $2x\mathrm{d}x$ astfel: $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2)$.

Aplicând formula integrării prin părți pentru integrale definite, obținem:

$$I = 2\int_0^{\sqrt{3}} x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{arctg}x\,\mathrm{d}(x^2) = x^2\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2\mathrm{d}(\mathrm{arctg}x) = 3\mathrm{arctg}\sqrt{3} - 0 - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{3} - \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \pi - (x-\mathrm{arctg}x)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi - (\sqrt{3}-\mathrm{arctg}\sqrt{3}) = \pi + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

**Observație**

Majoritatea integralelor care pot fi calculate cu ajutorul metodei integrării prin părți pot fi divizate în trei grupuri, evidențiate în modulul 1 la p. 17.

## 3.2. Schimbarea de variabilă sau metoda substituției

În această secvență, integrala definită a funcției $f$ va fi calculată cu ajutorul metodei substituției pentru integrale definite, conform formulelor stabilite în următoarele teoreme.

**Teorema 14**

Fie $\varphi: [a, b] \to \mathbf{I}$ și $f: \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:
a) funcția $f$ este continuă pe intervalul $\mathbf{I}$;
b) funcția $\varphi$ este derivabilă cu derivata $\varphi'$ continuă pe $[a, b]$.

Atunci, este adevărată formula: $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t,$

numită ***prima formulă a schimbării de variabilă***.

Pentru calculul integralei definite prin prima formulă a schimbării de variabilă se parcurge următoarea schemă de calcul:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} t=\varphi(x), & \text{Limite noi:} \\ \mathrm{d}t=\varphi'(x)\mathrm{d}x. & t_1=\varphi(a),\ t_2=\varphi(b). \end{array}\right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t.$$

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Aplicăm schema de calcul și obținem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} t=\sin x=\varphi(x), & \text{Limite noi:} \\ \mathrm{d}t=(\sin x)'\mathrm{d}x, & \varphi(0)=\sin 0=0, \\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x. & \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1. \end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt[3]{t^2}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right|_0^1 = \left.\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}\right|_0^1 = \frac{3}{5}\left(1^{\frac{5}{3}}-0\right) = \frac{3}{5}.$$

**2** Să se calculeze integrala $\int_0^1 x(3x^2-1)^5\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Conform schemei de calcul, avem:

$$\int_0^1 x(3x^2-1)^5\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} t=3x^2-1=\varphi(x), & \text{Limite noi:} \\ \mathrm{d}t=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=6x\,\mathrm{d}x, & \varphi(0)=-1, \\ x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{d}t. & \varphi(1)=2. \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-1}^2 t^5\,\mathrm{d}t = \left.\frac{1}{6}\cdot\frac{t^6}{6}\right|_{-1}^2 = \frac{1}{36}\left(2^6-(-1)^6\right) = \frac{63}{36} = \frac{7}{4}.$$

**3** Să se calculeze integrala $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Avem:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} t=\operatorname{arctg} x=\varphi(x), & \text{Limite noi:} \\ \mathrm{d}t=(\operatorname{arctg} x)'\mathrm{d}x, & \varphi(0)=\operatorname{arctg}0=0, \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}. & \varphi(1)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}. \end{array}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{192}.$$

**4** Să se calculeze integrala $\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

*Rezolvare*:

$$\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^3} = \left\{\begin{array}{ll} t=1+x^3=\varphi(x), & \text{Limite noi:} \\ \mathrm{d}t=(1+x^3)'\mathrm{d}x, & \varphi(0)=1, \\ \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x. & \varphi(1)=2. \end{array}\right\} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \left.\frac{1}{3}\ln|t|\right|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 2-\ln 1) = \frac{1}{3}\ln 2.$$

**5** Să se calculeze integrala $\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$.

*Rezolvare*:

Aplicăm prima formulă a schimbării de variabilă și obținem:

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)} = \left\{\begin{array}{ll} t=\ln x=\varphi(x), & \text{Limite noi:} \\ \mathrm{d}t=(\ln x)'\mathrm{d}x, & \varphi(1)=\ln 1=0, \\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{x}. & \varphi(e)=\ln e=1. \end{array}\right\} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg}t\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

Există situații în care calculul integralei definite devine mai simplu dacă în integrală se face substituția $x=\psi(t)$, dar nu inversa $t=\psi^{-1}(x)=\varphi(x)$ ca în teorema 14.

**Teorema 15**

Fie $\varphi\colon [\alpha, \beta]\to[a, b]$ și $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:
a) funcția $f$ este continuă pe $[a, b]$;
b) funcția $\varphi$ este derivabilă și inversabilă cu derivata $\varphi'$ continuă pe $[\alpha, \beta]$ și $\varphi^{-1}(a)=\alpha,\ \varphi^{-1}(b)=\beta$.
Atunci, este adevărată formula: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$,
numită ***a doua formulă a schimbării de variabilă***.

Prezentăm schema de calcul a integralei definite prin utilizarea formulei a doua a schimbării de variabilă:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} x=\varphi(t)\Rightarrow t=\varphi^{-1}(x), & \text{Limite noi:} \\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t. & \alpha=\varphi^{-1}(a),\ \beta=\varphi^{-1}(b). \end{matrix}\right\}=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze integrala $\int\limits_0^1 x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:
Aplicăm schema de calcul și obținem:

$$\int\limits_0^1 x(2x-1)^5\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} t=2x-1=\varphi^{-1}(x), & \text{Limite noi:} \\ x=\frac{1}{2}(t+1)=\varphi(t), & \alpha=\varphi^{-1}(0)=-1, \\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}(t+1)'\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}t. & \beta=\varphi^{-1}(1)=1. \end{matrix}\right\}=\int\limits_{-1}^1\left[\frac{1}{2}(t+1)\cdot t^5\cdot\frac{1}{2}\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_{-1}^1(t^6+t^5)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(\frac{t^7}{7}+\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{14}.$$

**2** Să se calculeze integrala $\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:
Conform schemei de calcul, avem:

$$\int\limits_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} t=e^x=\varphi^{-1}(x), & \text{Limite noi:} \\ x=\ln t=\varphi(t), & \alpha=\varphi^{-1}(0)=e^0=1, \\ \mathrm{d}x=(\ln t)'\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t}{t}. & \beta=\varphi^{-1}(\ln\sqrt{3})=e^{\ln\sqrt{3}}=\sqrt{3}. \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{t\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}}{1+t^2}=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t\Big|_1^{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

**3** Să se calculeze integrala $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

*Rezolvare*:

Avem: $$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix} x=\sin t=\varphi(t), & \text{Limite noi:} \\ t=\arcsin x=\varphi^{-1}(x), & \alpha=\varphi^{-1}(0)=\arcsin 0=0, \\ \mathrm{d}x=(\sin t)'\,\mathrm{d}t=\cos t\,\mathrm{d}t. & \beta=\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}. \end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)-0=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

**4** Să se calculeze integrala $\int_1^{27}\frac{dx}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

*Rezolvare*:

Alegem schimbarea de variabilă $x=t^6$, astfel încât să se extragă ambii radicali, şi obţinem:

$$\int_1^{27}\frac{dx}{\sqrt[6]{x}(1+\sqrt[3]{x})}=\left\{\begin{array}{ll} t=\sqrt[6]{x}=\varphi^{-1}(x), & \text{Limite noi:}\\ x=t^6=\varphi(t), & \alpha=\varphi^{-1}(1)=1,\\ dx=(t^6)'dt=6t^5dt. & \beta=\varphi^{-1}(27)=\sqrt{3}.\end{array}\right\}=$$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{6t^5dt}{t(1+t^2)}=6\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4-1+1}{1+t^2}dt=6\int_1^{\sqrt{3}}\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=$$

$$=6(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3})-6\left(\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg}1\right)=6\cdot\frac{\pi}{3}-6\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+4.$$

**5** Să se calculeze integrala $\int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{a}\frac{dx}{x^4(a^2+x^2)}$.

*Rezolvare*:

Aplicăm succesiv prima şi a doua formulă a schimbului de variabilă şi obţinem:

$$\int_{\frac{a}{\sqrt{3}}}^{a}\frac{dx}{x^4(a^2+x^2)}=\left\{\begin{array}{ll} x=a\operatorname{tg}t=\varphi(t), & \text{Limite noi:}\\ t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}=\varphi^{-1}(x), & \alpha=\varphi^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6},\\ dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}. & \beta=\varphi^{-1}(a)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.\end{array}\right\}=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{a\,dt}{\cos^2 t}}{a^4\operatorname{tg}^4 t\cdot\frac{a}{\cos t}}=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3 t\,dt}{\sin^4 t}=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\sin^2 t)\cos t\,dt}{\sin^4 t}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} s=\sin t=\varphi(t), & \text{Limite noi:}\\ ds=(\sin t)'dt, & \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\\ ds=\cos t\,dt. & \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{(1-s^2)ds}{s^4}=\frac{1}{a^4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(s^{-4}-s^{-2})ds=\frac{1}{a^4}\left(-\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{s}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{1}{a^4}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{a^4}\left(-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{\sqrt{2}}{3a^4}(1+\sqrt{2}).$$

**6** Să se calculeze integrala: a) $I_1=\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,dx$; b) $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}$.

*Rezolvare*:

a) Aplicăm de două ori formula de integrare prin părţi pentru integrala definită şi obţinem:

$$I_1=\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 3x\,d(e^{2x})=\frac{1}{2}\left[\sin 3xe^{2x}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{2x}d(\sin 3x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{2\pi}\sin 3\pi-0)-\frac{3}{2}\int_0^{\pi}e^{2x}\cos 3x\,dx=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 3x\,d(e^{2x})=$$

$$=-\frac{3}{4}\left[e^{2x}\cos 3x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{2x}\mathrm{d}(\cos 3x)\right]=-\frac{3}{4}(e^{2\pi}\cos 3\pi-\cos 0)+\frac{3}{4}\int_0^{\pi}e^{2x}(-3)\sin 3x\,\mathrm{d}x=$$

$$=-\frac{3}{4}(-e^{2\pi}-1)-\frac{9}{4}\int_0^{\pi}e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(e^{2\pi}+1)-\frac{9}{4}I_1.$$

Astfel $I_1=\frac{3}{4}(e^{2\pi}+1)-\frac{9}{4}I_1$. De aici, $\frac{13}{4}I_1=\frac{3}{4}(e^{2\pi}+1)$, adică $I_1=\frac{3}{13}(e^{2\pi}+1)$.

b) Pentru a calcula integrala $I_2$, vom considera şi integrala $I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}$. Adunând şi scăzând integralele $I_2$ şi $I_3$, obţinem, respectiv:

$$I_2+I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4};$$

$$I_2-I_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}\ln 2.$$

Din sistemul de ecuaţii $\begin{cases}I_2+I_3=\frac{\pi}{4}\\ I_2-I_3=-\frac{1}{2}\ln 2\end{cases}$ rezultă că $I_2=\frac{1}{8}(\pi-2\ln 2)$, $I_3=\frac{1}{8}(\pi+2\ln 2)$.

## Exerciţii propuse

***Profilul real***

### A₁

**1.** Utilizând formula de integrare prin părţi, să se calculeze integrala definită:

a) $\int_0^{\pi}x\cos x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_0^{2\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x$; d) $\int_1^e x^2\ln x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int_1^4\sqrt{x}\ln x\,\mathrm{d}x$; f) $\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;

g) $\int_0^{\pi}(x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{-1}^1 xe^{-x}\,\mathrm{d}x$;

i) $\int_{-\frac{3}{2}}^0(3x+1)e^{-2x}\mathrm{d}x$; j) $\int_{\pi}^{2\pi}(1-2x)\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

k) $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$; l) $\int_1^2\log_2 x\,\mathrm{d}x$;

m) $\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$; n) $\int_0^1 x\cdot 2^x\,\mathrm{d}x$.

**2.** Folosind substituţia indicată, să se calculeze integrala definită:

a) $\int_{-1}^1 x(1+x)^4\mathrm{d}x$, $1+x=t$; b) $\int_{-1}^0\frac{x\,\mathrm{d}x}{(2+x)^3}$, $2+x=t$;

c) $\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$, $2x+1=t$; d) $\int_0^1\sqrt{4+5x}\,\mathrm{d}x$, $4+5x=t$;

e) $\int_0^{\frac{1}{3}}2^{1-3x}\mathrm{d}x$, $1-3x=t$; f) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1+7x}}$, $1+7x=t$;

g) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$, $\frac{x}{2}=t$; h) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\frac{x}{3}}$, $\frac{x}{3}=t$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

### B₁

**3.** Aplicând formula de integrare prin părţi, să se calculeze integrala definită:

a) $\int_2^4(2x-1)\ln x\,\mathrm{d}x$; b) $\int_0^2 x\ln(2+x)\mathrm{d}x$; c) $\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$; d) $\int_0^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$; e) $\int_0^{\frac{1}{2}}\arccos x\,\mathrm{d}x$;

f) $\int_0^1 x\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$; g) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$; h) $\int_1^{\sqrt{3}}x^3e^{x^2}\mathrm{d}x$; i) $\int_0^{\sqrt{2}}x^5e^{-x^2}\mathrm{d}x$; j) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

k) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3}\mathrm{d}x$; l) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\mathrm{d}x$; m) $\int\limits_1^e \ln^3 x\,\mathrm{d}x$; n) $\int\limits_0^1 x^3 e^{-x}\mathrm{d}x$; o) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} (3x^2-5x-2)e^{2x}\mathrm{d}x$;

p) $\int\limits_{-2}^0 (1-3x-x^2)\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{d}x$; q) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; r) $\int\limits_0^{\pi} e^x\cos x\,\mathrm{d}x$; s) $\int\limits_e^{e^2} \ln x\,\mathrm{d}x$; t) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x\,\mathrm{d}x$.

**4.** ***Lucrați în perechi!*** Utilizând formulele de schimbare de variabilă, să se calculeze integrala definită:

a) $\int\limits_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$; b) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$; c) $\int\limits_1^{64} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$; d) $\int\limits_1^2 x^2\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-2x}\,\mathrm{d}x$; f) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^6}$; g) $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$; h) $\int\limits_0^1 x^9\sqrt{1+3x^5}\,\mathrm{d}x$;

i) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$; j) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$; k) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x$; l) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$;

m) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$; n) $\int\limits_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3}$; o) $\int\limits_{e^e}^{e^{\sqrt{e}}} \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$; p) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$;

q) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$; r) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$.

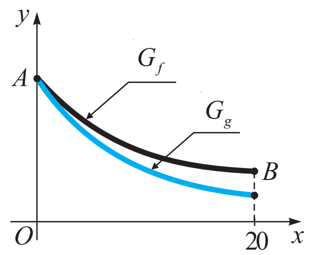
**5.** Să se efectueze în mod convenabil schimbul de variabilă și să se calculeze integrala definită:

a) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{\ln 3}^{3\ln 2} \sqrt{1+e^x}\,\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^7 \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{x+1}\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$;

e) $\int\limits_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$; f) $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; g) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; h) $\int\limits_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{x+1}}$.

**6.** ***Lucrați în grup!*** În desen sunt reprezentate două puncte $A$ și $B$ de pe coasta unui munte (scara 1 : 100 m). Curba $AB$ este dată de funcția $f\colon [0, 20]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{288}{(x+6)^2}$.

În punctul $A$ se află un izvor, care curge pe panta muntelui și se revarsă în mare formând o cascadă. Pe parcursul anilor, fluxul apei a tăiat în stânca muntelui un defileu, a cărui poziție actuală este descrisă de funcția $g\colon [0, 20]\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{200}{(x+5)^2}$.




a) Să se determine altitudinea punctelor $A$ și $B$ față de nivelul mării, reprezentat de axa $Ox$.

b) Să se afle înălțimea cascadei.

c) Să se determine aria secțiunii defileului pe întregul curs al râulețului.

d) Să se estimeze cantitatea de rocă spălată de fluxul apei de pe versant, dacă lățimea defileului este de 3 m.

## C1

**7.** Să se demonstreze că valorile $a\in\mathbb{R},\ a\geq 2$, verifică inecuația $\int\limits_1^a (a-4x)\,\mathrm{d}x\leq -4$.

**8.** ***Investigați!*** Să se determine extremele funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\int\limits_x^{2x+1}(1+2t)\,\mathrm{d}t$.

*Profilul real*

## A₁

**1.** Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_{-1}^{2}(x-6x^2)\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{1}(2x+1)(3x-2)\mathrm{d}x$; c) $\int_{-1}^{0}(1-3x)^2\mathrm{d}x$; d) $\int_{1}^{4}(\sqrt{x}-3x^2)\mathrm{d}x$;

e) $\int_{0}^{1}(6\sqrt[5]{x}+4\sqrt[3]{x})\mathrm{d}x$; f) $\int_{1}^{9}\frac{1+x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; g) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left(2\sin x-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}\right)\mathrm{d}x$.

**2.** ***Lucrați în perechi!*** Să se calculeze aria subgraficului funcției $f$:

a) $f:\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x$;

b) $f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+x^2$;

c) BAC $f:[0,4]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

**3.** ***Investigați!*** Să se determine punctul $a\in[1,6]$ astfel încât dreapta $x=a$ să împartă aria terenului agricol reprezentat prin subgraficul funcției $f:[1,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, în două părți de arii egale. Să se calculeze aria terenului, dacă scara pe fiecare axă de coordonate este $1:10$ m. Să se estimeze valoarea aproximativă a distanței dintre punctul de diviziune $a\in[1,6]$ și capătul din stânga al terenului.

## B₁

**4.** Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_{-1}^{1}(8x^3-x^2+4x-3)\mathrm{d}x$; b) $\int_{0}^{9}(4\sqrt[3]{3x}-6\sqrt{x})\mathrm{d}x$; c) $\int_{\frac{1}{3}}^{1}\left(\frac{6}{3x+1}-2x^2\right)\mathrm{d}x$; d) $\int_{0}^{1}\left(5x\sqrt{x}-\frac{14}{\sqrt[3]{7x-8}}\right)\mathrm{d}x$;

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{\cos^2 2x}-\sin 3x\right)\mathrm{d}x$; f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}}(3\sin^2 x\cos x+\cos 2x)\,\mathrm{d}x$; g) $\int_{-1}^{0}x\sqrt{4-5x}\,\mathrm{d}x$; h) $\int_{-2}^{5}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{3+x}}$;

i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{11\sin x+25}\cos x\mathrm{d}x$; j) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{3\cos 2x+1}}$; k) $\int_{-1}^{0}xe^{-3x}\mathrm{d}x$; l) $\int_{1}^{e}x^3\ln x\mathrm{d}x$; m) $\int_{0}^{1}(x^2+x)e^{2x}\mathrm{d}x$;

n) $\int_{-1}^{1}(x^2-x)\cos\pi x\mathrm{d}x$; o) $\int_{-1}^{1}|2-3x|\,\mathrm{d}x$; p) $\int_{-1}^{2}(|x|+|1-x|)\mathrm{d}x$; q) $\int_{0}^{3}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$, (BAC, 2018).

**5.** ***Lucrați în perechi!***
Să se calculeze integrala definită:

a) $\int_{-2}^{3}f(x)\mathrm{d}x,\ f:[-2,3]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ dacă } x\in[-2,0]\\ x^3, \text{ dacă } x\in(0,1)\\ x, \text{ dacă } x\in[1,3].\end{cases}$

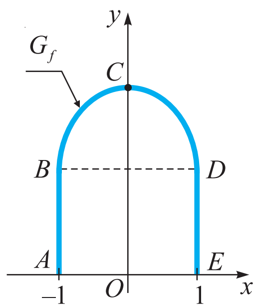
b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x,\ f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}, \text{ dacă } x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\\ \frac{\sin x}{1+4\cos^2 x}, \text{ dacă } x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$

**6.** Curba $AB$ definită de graficul funcției $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, reprezintă pista pentru desfășurarea unei competiții de skateboard, scara pe fiecare axă de coordonate fiind $1:4$ m. Subgraficul funcției $f$ reprezintă secțiunea transversală a pistei.

a) Să se afle aria secțiunii transversale a pistei.

b) Să se determine cantitatea de beton utilizată la turnarea pistei, dacă lungimea ei este de 9 m.

**7.** În desen este reprezentată fereastra unui palat, unde curba $BC$ este definită de funcția $f:[-1,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{5}(25+8x-2x^2)$.




a) Să se determine dimensiunile $AE$, $AB$ și $OC$ ale ferestrei, dacă scara pe fiecare axă de coordonate este $1:1$ m.

b) Să se determine aria ferestrei.

c) Să se afle cantitatea de sticlă necesară pentru cele 15 ferestre ale palatului, dacă se știe că 90% din suprafața unei ferestre este acoperită cu sticlă.

d) Să se estimeze costul sticlei necesare, dacă prețul unui metru pătrat de sticlă decorativă este de 500 de lei.

**C₁**

**8.** ***Investigați!*** Să se demonstreze afirmația: dacă funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci

$$\int_a^b [f(a+b-x) - f(x)]\mathrm{d}x = 0.$$

**9.** Fie $f\colon [1, 2] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, astfel încât $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{15}{4}$. Să se demonstreze că există cel puțin un $c \in (1, 2)$, astfel încât $f(c) = c^3$.

**10.** BAC Calculați $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$, unde $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4\ln x - x$.

**11.** ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale subgraficului funcției în design*.

## Test sumativ

*Timp efectiv de lucru: 45 de minute*

### *Profilul real*

**1.** Completați casetele astfel încât să obțineți o propoziție adevărată:

$$\int_0^1 (x^3 + x)\mathrm{d}x = (\boxed{\phantom{xx}} - \boxed{\phantom{xx}})\Big|_0^1 = \boxed{\phantom{xx}}.$$

**2.** Încercuiți litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

„$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^1 x^2\,\mathrm{d}x$.” **A** | **F**

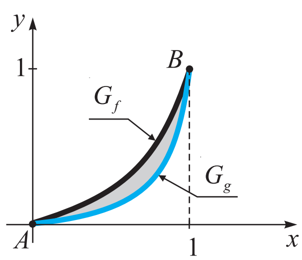
**3.** Utilizând formula Leibniz–Newton, calculați:
a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos 2x - \frac{1}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$;
b) $\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 3\sqrt{1+8x}\right)\mathrm{d}x$.

**4.** Utilizând formula de integrare prin părți, calculați: a) $\int_0^1 x\ln(x+1)\mathrm{d}x$;
b) $\int_{-1}^0 (x^2 - x - 2)e^{-2x}\mathrm{d}x$.

**5.** Utilizând formulele schimbării de variabilă și unele transformări elementare, calculați:
a) $\int_{-1}^6 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{2+x}}$;
b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^3 x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^4 x}$.

**6.** Secțiunea transversală a unei pârtii de săniuș este reprezentată în desen (la scara 1 : 100 m pe fiecare axă) prin curbele ce unesc punctele $A$ și $B$, date de funcțiile $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{\frac{21}{10}}$.

a) Calculați aria secțiunii transversale a pârtiei.
b) Estimați cantitatea de zăpadă care a fost împrăștiată pe pârtie, dacă lățimea ei variază între 1,5 și 2 m.



# Integrale definite

**Intervalul**
$[a, b],\ a, b \in \mathbb{R}$

**Diviziune a intervalului**
$T = (x_0, x_1, \ldots, x_n),\ n \geq 1,$
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

**Norma diviziunii**
$\| T \| = \max\limits_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k,$
unde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$

**Funcția**
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

**Sistem de puncte intermediare**
$\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$
$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{0, n-1}$

**Sumă integrală**
$\sigma(T, \xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$

**Limita sumei integrale**
$I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi)$

**Funcție integrabilă**
$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
$\lim\limits_{\|T\| \to 0} \sigma(T, \xi) = I,\ I \in \mathbb{R}$

**Integrală definită din funcția *f* pe [*a*, *b*]**
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = I = \lim\limits_{\|T\| \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,\ I \in \mathbb{R}$

**Interpretarea geometrică**
$\mathcal{A} = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – aria subgraficului funcției $f\colon [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$

**Condiția necesară de integrabilitate**
$f$ – mărginită pe $[a, b]$

**Clase de funcții integrabile pe [*a*, *b*]**
a) funcțiile continue;
b) funcțiile monotone.

**Proprietăți ale integralei definite**

1° a) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2° $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x$ – aditivitatea în raport cu intervalul de integrare.

3° $\int\limits_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ – liniaritatea integralei definite.

4° Dacă $f(x) \geq 0,\ x \in [a, b]$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

5° Dacă $f(x) \leq g(x),\ x \in [a, b]$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

6° $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

7° Dacă $m \leq f(x) \leq M,\ x \in [a, b]$, atunci $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

8° Dacă $m \leq f(x) \leq M,\ (x \in [a, b])$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu(b-a)$, unde $\mu \in [m, M]$ (teorema de medie pentru funcții integrabile).

9° Dacă $f$ este continuă pe $[a, b]$, atunci $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$, unde $c \in (a, b)$ (teorema de medie pentru funcții continue).

10° Numărul $M[f] = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se numește valoare medie a funcției $f$ pe $[a, b]$.

**Formule și metode de calcul al integralei definite**

a) Formula Leibniz–Newton:
$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, unde $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f$.

b) Metoda integrării prin părți: $\int\limits_a^b u\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\mathrm{d}u$.

c) Metoda substituției:
1) $\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t$
2) $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

Modulul

# 3

# Aplicații ale integralelor definite

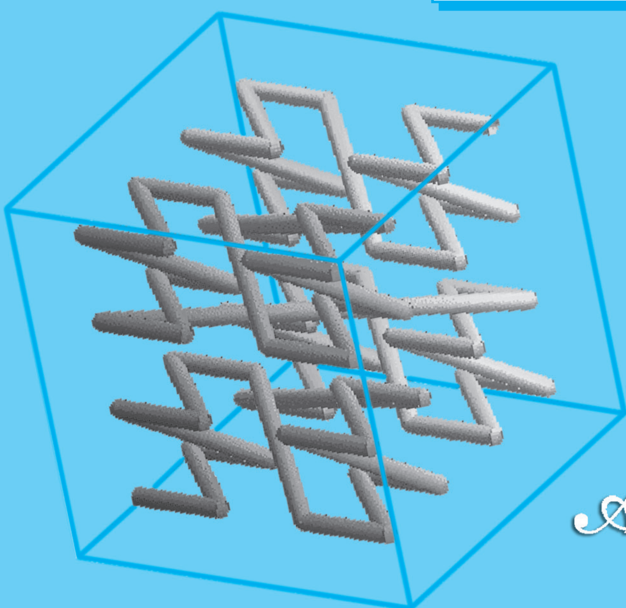
*Marea carte a naturii poate fi citită doar de cei ce știu limba în care a fost scrisă. Şi această limbă este matematica.*

Galileo Galilei

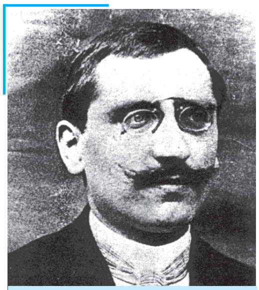
**Obiectivele modulului**

- aplicarea integralei definite la calculul ariei subgraficului unei funcții;
- aplicarea integralei definite la calculul volumului unui corp de rotație.





$$\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Henri-Léon Lebesgue (1875–1941), matematician francez

Problemele de calcul al ariilor unor suprafețe plane și de rotație, al lungimilor graficelor unor funcții sau al volumelor unor corpuri de rotație au stat la baza dezvoltării calculului integral.

A.L. Cauchy şi B. Riemann au fundamentat teoria clasică a calculului integral pentru o funcție reală de o variabilă reală. Ulterior, H.-L. Lebesgue a inițiat teoria modernă a noțiunilor de integrală, lungime şi arie.

Pentru a defini aria unor figuri sau corpuri geometrice, volumul unor corpuri geometrice sau lungimea graficelor unor funcții, vom folosi figuri şi corpuri geometrice cunoscute: dreptunghiul şi trunchiul de con (pentru arie), cilindrul (pentru volum), segmentul (pentru lungime).

# § 1 ARIA SUBGRAFICULUI UNEI FUNCȚII

În modulul 2 s-a constatat că integrala definită $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ reprezintă geometric aria domeniului plan delimitat de graficul unei funcții continue $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a, b]$, de axa absciselor şi de dreptele de ecuație $x=a$ şi $x=b$. Mulțimea punctelor acestui domeniu plan se numeşte ***subgraficul funcției f*** şi se notează

$\Gamma_f=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq f(x)\}$,

$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (fig. 3.1). Această mulțime are arie, şi aria sa este:

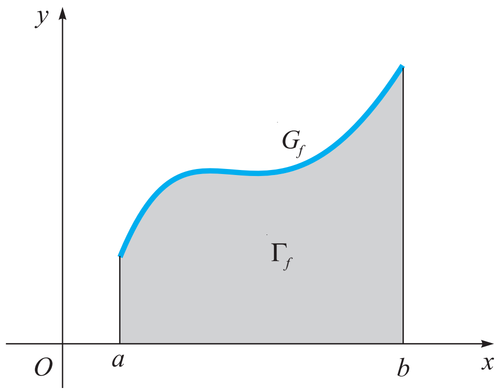



Fig. 3.1

$$\boxed{\mathcal{A}(\Gamma_f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\,. \qquad (1)$$

Vom examina un mod intuitiv de deducere a formulei (1).

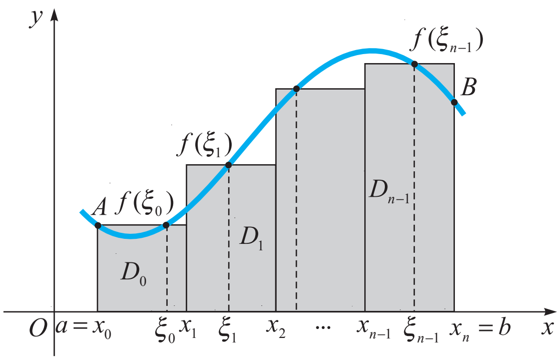



Fig. 3.2

Considerăm graficul unei funcții $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ pozitive pe $[a, b]$ (fig. 3.2). Divizăm intervalul $[a, b]$ în $n$ intervale (nu neapărat congruente) cu ajutorul punctelor de diviziune $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. Notăm această diviziune cu $T=(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$. În fiecare interval elementar $[x_k, x_{k+1}]$ de lungime $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$ fixăm un punct arbitrar $\xi_k$, $k=\overline{0, n-1}$. Vom nota cu $D_k$ dreptunghiul cu baza $[x_k, x_{k+1}]$ şi înălțimea $f(\xi_k)$, $k=\overline{0, n-1}$. Atunci, din punct de vedere geometric,

numărul real $\sigma(T,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor $D_k$. Intuitiv, considerând diviziuni $T$ de normă din ce în ce mai mică, sumele respective $\sigma(T,\xi)$ vor aproxima cu o eroare din ce în ce mai mică aria mulțimii $\Gamma_f$. Deoarece $\sigma(T,\xi)$ este o sumă Riemann, iar $f$ – o funcție continuă, deci integrabilă, cele menționate anterior argumentează într-o oarecare măsură că aria mulțimii $\Gamma_f$ poate fi calculată aplicând formula (1).

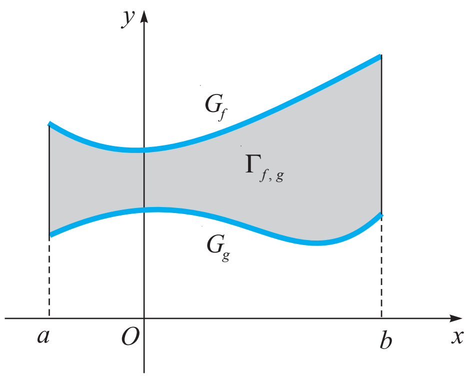


Fig. 3.3

**1.** Să considerăm funcțiile continue $f, g\colon [a, b]\to\mathbb{R}$, astfel încât $0\le g(x)\le f(x),\ \forall x\in[a, b]$.
Atunci, mulțimea $\Gamma_{f,g}=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ g(x)\le y\le f(x)\}$ (fig. 3.3), delimitată de graficele funcțiilor $f$, $g$ și de dreptele $x=a$, $x=b$, paralele cu axa $Oy$, are arie și

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x}\,. \qquad (2)$$

Formula (2) se obține nemijlocit din (1) folosind relația

$$\mathscr{A}(\Gamma_{g,f})=\mathscr{A}(\Gamma_f)-\mathscr{A}(\Gamma_g).$$

**Observație**

Dacă funcția continuă $f$ nu este pozitivă $(f(x)\le 0,\ \forall x\in[a, b])$, atunci graficul ei este situat sub axa $Ox$ (fig. 3.4).

Notăm prin $\Gamma_f^-$ mulțimea $\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ f(x)\le y\le 0\}$.

Graficul funcției $-f$ este situat deasupra axei $Ox$, deoarece $-f(x)=|f(x)|\ge 0$. Graficele funcțiilor $f$ și $-f$ sunt simetrice față de axa $Ox$, deci ariile suprafețelor $abBA$ și respectiv $abB'A'$ sunt egale. Dar suprafața $abB'A'$ este subgraficul funcției $-f=|f|$ și aria lui este egală cu integrala acestei funcții:

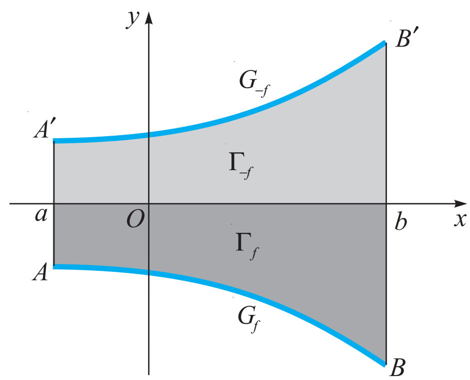


Fig. 3.4

$$\mathscr{A}(\Gamma_{-f})=\int_a^b[-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Prin urmare,

$$\boxed{\mathscr{A}(\Gamma_f^-)=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}\,.$$

**2.** Să examinăm cazul în care cel puțin una dintre cele două funcții este negativă. Fie, de exemplu, $f(x)\ge 0,\ g(x)<0,\ \forall x\in[a, b]$ (fig. 3.5).

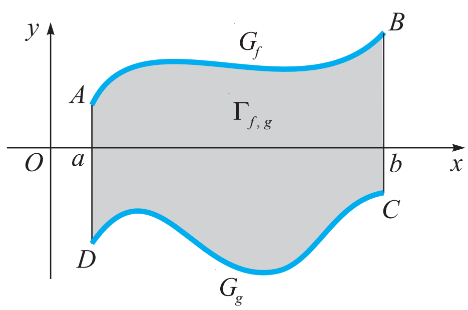


Fig. 3.5

Observăm că aria domeniului $ABCD$ este suma ariilor

$$\mathcal{A}(abBA)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ şi } \mathcal{A}(DCba)=-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Prin urmare, $\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x.$

Aşadar, formula (2) este adevărată şi în acest caz.

Similar se studiază şi cazul când ambele funcţii sunt negative. În această situaţie, aria mulţimii $\Gamma_{f,g}$ se calculează aplicând formula (2) pentru $g(x)\geq f(x)$, $\forall x\in[a, b]$.

**Consecinţă**

Dacă se renunţă la condiţia $g(x)\geq f(x)$, $\forall x\in[a, b]$, atunci aria mulţimii plane delimitate de graficele funcţiilor $f$, $g$ şi de dreptele $x=a$, $x=b$ (fig. 3.6) este

$$\boxed{\mathcal{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x}. \qquad (3)$$

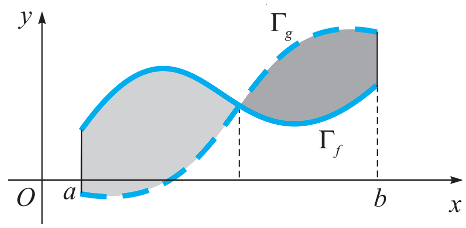


Fig. 3.6

**Probleme rezolvate**

**1** Să se determine aria triunghiului $OAB$ cu vârfurile $O(0, 0)$, $A(a, b)$ şi $B(a, b')$, $b'>b$.

*Rezolvare*:

Constatăm că dreapta $OA$ este graficul funcţiei $f\colon[0, a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{b}{a}x$, iar dreapta $OB$ – graficul funcţiei $g\colon[0, a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{b'}{a}x$ (fig. 3.7).

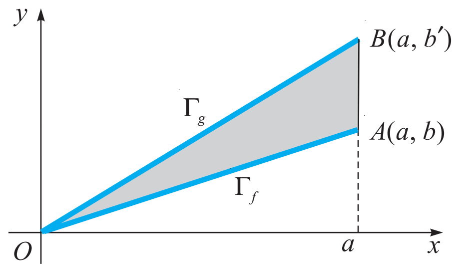


Fig. 3.7

Folosim formula (2) şi obţinem: $\mathcal{A}(\Delta OAB)=\int_0^a\left(\frac{b'}{a}x-\frac{b}{a}x\right)\mathrm{d}x=\frac{b'-b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{b'-b}{2}a.$

**2** Să se afle aria figurii delimitate de dreptele $y=0$, $y=\frac{1}{3}x$, $x=1$ şi $x=3$.

*Rezolvare*:

Figura obţinută este trapezul $ABCD$ cu $BC=1$, $AD=\frac{1}{3}$, $AB=2$ (fig. 3.8). Aria trapezului $ABCD$ este

$$\mathcal{A}=\int_1^3\frac{1}{3}x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{3\cdot 2}\bigg|_1^3=\frac{4}{3}.$$

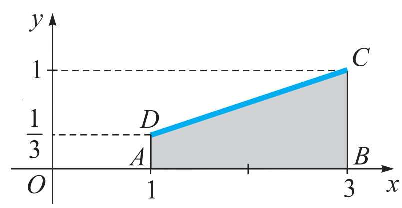


Fig. 3.8

**3** Să se determine aria suprafeţei cuprinse între graficele funcţiilor $f, g\colon[0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=2$ (fig. 3.9).

*Rezolvare*:

Rezolvăm sistemul $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2 \end{cases}$ şi aflăm coordonatele punctului de intersecţie a acestor grafice: $M(\sqrt{2}, 2)$.

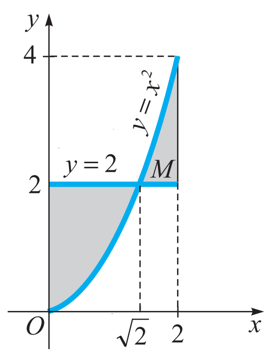


Fig. 3.9

Aplicând formula (3), obținem:

$$\mathscr{A}=\int_0^2 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^2(x^2-2)\mathrm{d}x=$$

$$=2x\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}}^2-2x\Big|_{\sqrt{2}}^2=\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

**Observație**

Pentru stabilirea semnului funcției $f$ pe intervalul pe care integrăm folosim proprietățile funcțiilor continue.

***Concluzie:*** Pentru a calcula aria suprafeței plane delimitate de graficul unei funcții continue $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuație $x=a$ şi $x=b$, vom proceda astfel:

• verificăm dacă ecuația $f(x)=0$ are soluții în intervalul $[a, b]$;

• dacă nu există soluții, stabilim semnul funcției $f$ pe intervalul $[a, b]$. În acest caz obținem $\mathscr{A}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ sau $\mathscr{A}=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, după cum este funcția pe acest interval: pozitivă sau negativă;

• dacă există $c\in(a, b)$ soluție a ecuației $f(x)=0$, stabilim semnul funcției pe fiecare interval $[a, c]$, respectiv $[c, b]$, şi apoi calculăm aria, cunoscând că $\int_a^b=\int_a^c+\int_c^b$.

**Observație**

Dacă o placă plană omogenă (corp a cărui grosime se poate neglija şi care are masa proporțională cu aria sa) este determinată de graficul funcției $f\colon [a, b]\to\mathbb{R}$ (coincide cu subgraficul $\Gamma_f$), atunci coordonatele centrului de greutate $(x_0, y_0)$ al acestei plăci (fig. 3.10) sunt:

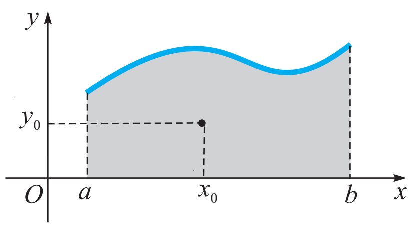



Fig. 3.10

$$\boxed{x_0=\frac{1}{\mathscr{A}}\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,\quad y_0=\frac{1}{2\mathscr{A}}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x},\quad (4)$$

unde $\mathscr{A}$ este aria subgraficului funcției $f$:

$$\mathscr{A}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**4** Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene care coincide cu subgraficul funcției $f\colon[0, a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{ax}$ $(a>0)$ (fig. 3.11).

*Rezolvare*:

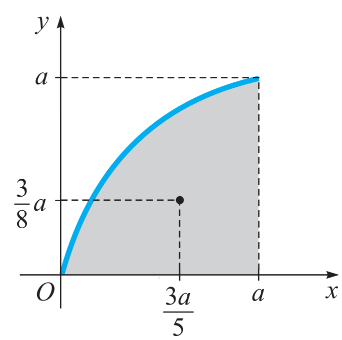



Fig. 3.11

Calculăm aria subgraficului funcției $f$:

$$\mathscr{A}=\int_0^a\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^2.$$

Calculăm integralele:

$$\int_0^a xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{5}a^3;$$

$$\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^a ax\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}x^2\Big|_0^a=\frac{a^3}{2}.$$

Aplicăm formulele (4): $x_0 = \dfrac{\frac{2}{5}a^3}{\frac{2}{3}a^2} = \dfrac{3}{5}a,\ y_0 = \dfrac{\frac{a^3}{2}}{2\cdot\frac{2}{3}a^2} = \dfrac{3}{8}a.$

*Răspuns*: $\left(\dfrac{3}{5}a,\ \dfrac{3}{8}a\right)$

## Exerciții propuse

### *Profilul real*

### $A_1$

**1.** Să se afle aria figurii mărginite de graficul funcției și dreptele indicate:

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+4,\ x=0$ și $x=1$;

b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\cos x,\ x=0$ și $x=\pi$;

c) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin 2x,\ x=0$ și $x=\dfrac{\pi}{4}$;

d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x},\ x=1$ și $x=e$;

e) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x+3e^x,\ x=0$ și $x=\pi$;

f) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ x=1$ și $x=4$;

g) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-1)^2+1,\ x=0$ și $x=1$.

$$\mathscr{A}(\Gamma_{f,g})=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

**2.** Să se afle aria figurii mărginite de graficele funcțiilor:

a) $f,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=16-x^2,\ g(x)=0$;

b) $f,\ g\colon [0,\ 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^4,\ g(x)=0$, și dreapta $x=2$;

c) $f,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=7-x^2,\ g(x)=x^2-1$;

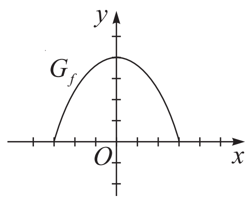
d) $f,\ g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-1,\ g(x)=5-x$;

e) $f,\ g\colon [0,\ 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{-x},\ g(x)=e^{2x}$, și dreapta $x=1$;

f) $f,\ g\colon [-1,\ 1]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|,\ g(x)=1$.

**3.** ***Lucrați în perechi!*** Să se determine numărul real $a,\ a>0$, astfel încât aria subgraficului funcției $f\colon [0,\ a]\to\mathbb{R},\ f(x)=x+3$, să fie egală cu 4.

**4.** În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției continue și pare $f\colon [-3,\ 3]\to[0,\ 4]$ pentru care $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=7$.

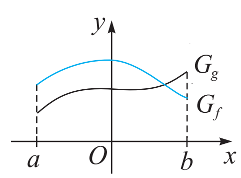



Scrieți în casetă valoarea numerică a ariei figurii mărginite de graficul funcției $f$ și de axa absciselor.

$\mathscr{A}=$ ☐

### $B_1$

**5.** În sistemul de axe ortogonale alăturat sunt reprezentate graficele funcțiilor $f,\ g\colon [a,\ b]\to\mathbb{R}$ continue. Folosind desenul, scrieți în casetă unul din semnele <, >, =, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată. Argumentați răspunsul.




$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ☐ $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

**6.** Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-1$. Determinați valoarea numerică a ariei figurii mărginite de graficul funcției $f$, dreapta $x=1$ și axa $Ox$.

**7.** ***Investigați!*** Să se arate că aria subgraficului funcției $f\colon [0,\ \pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+e^x$, este mai mare decât aria subgraficului funcției $g\colon [0,\ 1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-2x+9$.

**8.** Să se determine aria figurii delimitate de graficele funcțiilor:

a) $f, g: [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$, și dreapta $x = 0$;

b) $f, g: \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{tg} x,\ g(x) = 3\sqrt{\frac{x}{\pi}}$;

c) $f, g: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x,\ g(x) = 3^x$, și dreptele $x = 0,\ x = 2$.

**9.** Se consideră pătratul $P$ cu lungimea laturii $2a,\ a > 0$. Laturile pătratului sunt paralele cu axele de coordonate și diagonalele lui se intersectează în originea sistemului de axe ortogonale $xOy$. Parabola $y = x^2$ împarte pătratul $P$ în două mulțimi de puncte: $R_1$ și $R_2$.

a) Să se afle ariile mulțimilor de puncte $R_1$ și $R_2$.

b) Să se demonstreze că nu există valori ale variabilei $a$ astfel încât mulțimile de puncte $R_1$ și $R_2$ să aibă aceeași arie.

**10.** *Lucrați în grup!* Fie funcția $f: [0, 30] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{40} + \frac{3}{4}x + 20$.

a) Să se traseze graficul funcției $f$.

b) Să se hașureze subgraficul funcției $f$.

c) Să se determine aria (în metri pătrați) a unui lot de pământ de forma subgraficului funcției $f$.

d) Să se determine costul acestui lot, dacă se știe că prețul unui ar de pământ este de 30 de mii de lei.

**11.** BAC *Lucrați în perechi!* După ce s-a croit un costum, una dintre bucățile de stofă rămase este de forma unei figuri mărginite de liniile

$f, g: \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$.

Calculați aria acestei bucăți de stofă (1 unitate de măsură = 1 dm).

**12.** BAC Fie funcția $f: [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

Determinați valoarea numerică a ariei subgraficului funcției $f$.

**13.** Se consideră funcția $f: [1, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x(x^2 + 3x + 2)$. Să se determine numărul real $a > 1$, știind că aria suprafeței determinate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = a$ este egală cu $(13e^3 - 3e)$ u. p.

**14.** *Investigați!* Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se arate că funcția $F: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, este o primitivă a funcției $f$.

b) Să se arate că orice primitivă $G$ a funcției $f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

**15.** BAC Fie funcția $f: [0, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - x^2$. Să se afle $m \in \mathbb{R}$, astfel încât dreapta $y = mx$ să împartă aria subgraficului funcției $f$ în două mulțimi de puncte de arii egale.

**16.** *Lucrați în perechi!* Interiorul subgraficului funcției $f: [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, este divizat de graficul funcției $g: [2, 3] \to \mathbb{R},\ g(x) = 2\sqrt{2x}$, în două mulțimi de puncte. Să se calculeze aria fiecărei mulțimi de puncte.

$$\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$

## $C_1$

**17.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene care coincide cu subgraficul funcției:

a) $f: [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x}$;

b) $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$;

c) $f: [-2, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

**18.** Să se demonstreze că aria subgraficului funcției $f: \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x + e^x$, este egală cu aria subgarficului funcției $g: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x + e^{x - \frac{\pi}{2}}$.

**19.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = x - \frac{1}{x}$. Să se determine aria figurii mărginite de graficul funcției $f$, de asimptota oblică a graficului funcției $f$ și de dreptele $x = 1,\ x = 2$.

## § 2 VOLUMUL UNUI CORP DE ROTAȚIE

Un corp de rotație este caracterizat de o axă de rotație şi de o generatoare. Vom studia corpurile de rotație cu axa de rotație $Ox$ şi generatoarea care este graficul unei funcții $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

**Definiție**

Fie $f\colon [a, b] \to [0, +\infty)$ o funcție continuă. Mulțimea

$$C_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le f^2(x),\ a \le x \le b\}$$

se numeşte **corp de rotație determinat de funcția $f$** sau **corpul obținut prin rotirea subgraficului funcției $f$ în jurul axei $Ox$** (fig. 3.12).

**Observație**

Orice punct $(x, f(x))$ al graficului funcției $f$ descrie un cerc cu centrul în punctul $x$ şi de rază $f(x)$ (fig. 3.12).

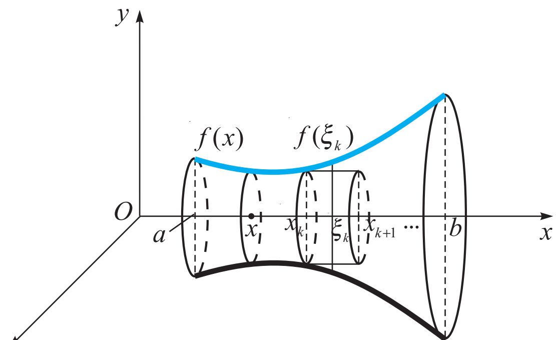


Fig. 3.12

Fie $T = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ şi pe fiecare interval elementar $[x_k, x_{k+1}]$ considerăm un punct $\xi_k$, $k = \overline{0, n-1}$. Atunci, dreptunghiul cu baza $[x_k, x_{k+1}]$ şi de înălțime $f(\xi_k)$, fiind rotit în jurul axei $Ox$, descrie un cilindru. Volumul acestui cilindru este $\pi f^2(\xi_k)\Delta x_k$, unde $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$. Suma volumelor cilindrilor obținuți este $\sigma(T, \xi) = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k)\Delta x_k$ şi reprezintă o sumă Riemann pentru funcția $\pi f^2$, diviziunea $T$ şi sistemul de puncte intermediare $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$. Intuitiv, dacă norma diviziunii $T$ este din ce în ce mai mică, atunci $\sigma(T, \xi)$ aproximează din ce în ce mai bine volumul corpului de rotație $C_f$. Astfel, cele menționate anterior justifică într-o oarecare măsură că ***volumul corpului de rotație $C_f$ poate fi calculat cu formula***:

$$\boxed{\mathcal{V}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}. \qquad (1)$$

**Observație**

Formula (1) este adevărată şi în cazul când $f$ este o funcție negativă. Într-adevăr, funcția $-f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ este pozitivă şi atunci

$$\mathcal{V}(C_f) = \mathcal{V}(C_{-f}) = \pi \int_a^b [-f(x)]^2 \mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

**Probleme rezolvate**

**1** Să se determine volumul corpului sferic de rază $r$ $(r > 0)$.

*Rezolvare*:

Fie $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Prin rotirea subgraficului $G_f$ al funcției $f$ în jurul axei $Ox$ obținem un corp sferic cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale $xOy$ şi de rază $r$ (fig. 3.13). Evident, funcția $f$ este continuă, deci integrabilă.

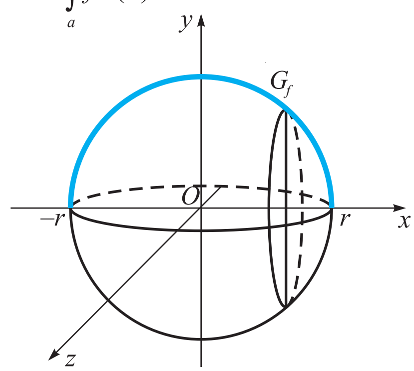


Fig. 3.13

Atunci, conform formulei (1),

$$\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\pi\left(-r^3+\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4\pi r^3}{3}.$$

**2** Să se afle volumul unui trunchi de con cu razele bazelor $r$ şi $R$ şi înălțimea $H$.

*Rezolvare*:

Pentru a obține trunchiul de con cu razele bazelor $r$ şi $R$ şi înălțimea $H$, vom roti segmentul $AB$ în jurul axei $Ox$ (fig. 3.14). Cum ecuația dreptei $AB$ este $y=\frac{R-r}{H}x+r$, rezultă că trunchiul de con este corpul de rotație determinat de graficul funcției $f\colon [0, H]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{R-r}{H}x+r$. Prin urmare, volumul corpului de rotație obținut este:

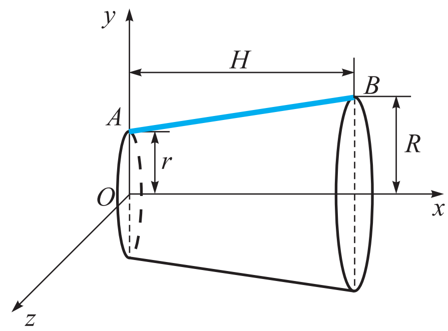


Fig. 3.14

$$\mathcal{V}=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2\mathrm{d}x=\left\{\begin{matrix}\frac{R-r}{H}x=t,\ x=\frac{H}{R-r}t,\ \mathrm{d}x=\frac{H}{R-r}\mathrm{d}t\\ x=0\Rightarrow t=0,\ x=H\Rightarrow t=R-r\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{\pi H}{R-r}\int_0^{R-r}(t+r)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi H}{3(R-r)}(t+r)^3\Big|_0^{R-r}=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

**Observație**

Dacă în ultima formulă $r=0$, obținem volumul conului cu raza bazei $R$ şi înălțimea $H$, adică $\mathcal{V}=\frac{\pi R^2H}{3}$, iar dacă $r=R$, obținem volumul cilindrului cu raza bazei $R$ şi înălțimea $H$, adică $\mathcal{V}=\pi R^2H$.

## Exerciții propuse

***Profilul real***

### $A_1$

**1.** Să se afle volumul corpului de rotație $G_f$ determinat de funcția:

a) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

b) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\sqrt{x}$;

c) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\cos x}$;

d) $f\colon [0, \sqrt{\ln 2}]\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{x^2}$;

e) $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\sin x}\cdot e^{\cos x}$;

f) $f\colon [-1, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}, & \text{dacă } -1\le x\le 0\\ \sin\pi x+1, & \text{dacă } 0<x\le 1;\end{cases}$

g) $f\colon [0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1+x^2}}$;

h) $f\colon [0, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x^2-4x+3|$;

i) $f\colon [0, 2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}e^{-x^2}$;

j) $f\colon [1, e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

$$\mathcal{V}(C_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

**2.** Să se afle numărul natural $n$, astfel încât volumul corpului de rotație $G_f$ determinat de funcția $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(n\arccos x)$, să fie $\frac{2\pi}{3}$.

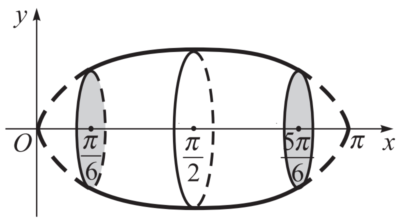
**3.** ***Lucrați în perechi!*** Să se afle volumul corpului de rotație $G_f$ determinat de funcția:

a) $f:[0,\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x$; b) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1$; c) $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{tg} x$.

## B₁

**4.** ***Lucrați în grup!*** Fie funcția $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x+3, & 0\le x\le 2\\ -\frac{5}{2}x+10, & 2\le x\le 4.\end{cases}$

a) Să se traseze graficul funcției $f$.
b) Să se hașureze subgraficul funcției $f$.
c) Să se interpreteze geometric corpul de rotație în jurul axei $Ox$ determinat de funcția $f$.
d) Să se determine volumul acestui corp.




**5.** Să se afle volumul unui butoi, știind că doagele lui au forma unui arc de sinusoidă $y=a\sin x\ (a>0)$, iar lungimea butoiului este $\frac{2\pi}{3}$.

**6.** Să se determine capacitatea (volumul) unei pâlnii generate prin rotirea subgraficului funcției $f:[1,e]\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x\ln x$, în jurul axei $Ox$.

## C₁

**7.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le 0\\ x\cdot e^x+1, & x>0.\end{cases}$

a) Să se arate că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$;

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[-2,-1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$;

c) Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

**8.** Se consideră funcția $f:[0,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[0,1],\\ \frac{e}{x}, & x\in[1,e].\end{cases}$

a) Să se traseze graficul funcției $f$;
b) Să se determine aria subgraficului funcției $f$;
c) Să se determine volumul corpului generat prin rotația în jurul axei $Ox$ a subgraficului funcției $f$.

**9.** ***Lucrați în grup!*** Proiect *Aplicații ale integralei definite în diverse domenii.*

# Exerciții și probleme recapitulative

***Profilul real***

## A₁

**1.** Să se determine aria subgraficului funcției:

a) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=x-x^2$;

b) $f:\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin 3x$;

c) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$;

d) $f:[0,e-1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x+1}$;

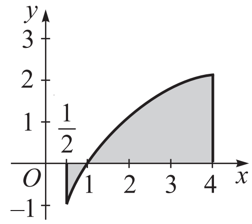
e) $f:[1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2+2x-1$;

f) $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2x+1}$;

g) $f:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos 2x$;

h) $f:[0,\ln 2]\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$.

**2.** În desenul alăturat este reprezentată figura mărginită de graficul $f\colon \left[\frac{1}{2}, 4\right] \to \mathbb{R}$ și dreptele de ecuație $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$ și $x = 4$.




Folosind integrala definită, scrieți în casetă formula cu ajutorul căreia se poate calcula aria figurii colorate.

$$\mathcal{A}_f = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$$

**3.** Să se determine aria suprafeței cuprinse între graficele funcțiilor $f$, $g$, dacă:

a) $f, g\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2 - x$;

b) $f, g\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = e^x$, și dreptele $x = 0$, $x = 2$;

c) $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, și dreptele $x = 0$, $x = 1$.

**4.** ***Investigați!*** Să se arate că ariile subgraficelor funcțiilor $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, și $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$, sunt egale.

**5.** ***Lucrați în perechi!*** Fie funcția $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$.

a) Să se traseze graficul funcției $f$.

b) Să se hașureze subgraficul funcției $f$.

c) Să se afle aria unei mese care are forma subgraficului funcției $f$.

$$\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

## $B_1$

**6.** ***Investigați!*** Să se arate că aria subgraficului funcției $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x$, este mai mare decât aria subgraficului funcției $g\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + \cos x$.

**7.** a) Să se determine valoarea lui $a \in \mathbb{R}_+$ astfel încât aria subgraficului funcției $f\colon [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 + 2x$, să fie egală cu 1.

b) Fie funcția $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + x + 1$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile reale ale lui $a$, astfel încât aria subgraficului funcției $f$ să fie egală cu 3.

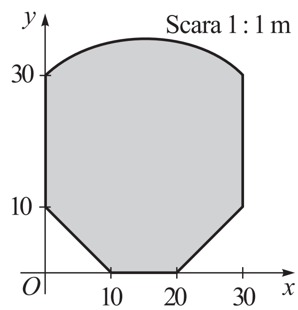
**8.** Fie funcția $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Să se determine $m \in [0, 2]$, astfel încât dreapta $y = mx$ să împartă subgraficul funcției $f$ în două mulțimi de aceeași arie.

**9.** ***Lucrați în perechi!***

Un teren are forma mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor

$$f, g\colon [0, 30] \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{3}{2}x + 30,\ g(x) = \begin{cases} -x + 10, & 0 \le x \le 10 \\ 0, & 10 < x \le 20 \\ x - 20, & 20 < x \le 30. \end{cases}$$

Să se determine aria acestui teren și costul lui, dacă se știe că prețul unui ar este de 30 de mii de lei.




**10.** Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$. Determinați valorile reale ale lui $a \in (0, 1)$, pentru care dreapta de ecuație $y = a$ împarte figura mărginită de graficul funcției $f$ și de dreapta de ecuație $y = 0$ în două figuri de arii egale.

**11.** Să se afle volumul corpului de rotație în jurul axei $Ox$ determinat de funcția:

a) $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$;

b) $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos\frac{x}{2}$;

c) $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;

d) $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

**12.** Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene determinate de subgraficul funcției $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^x$.

**13.** Calculați aria figurii mărginite de graficul funcției $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 2x^2$, axa $Ox$ și dreptele definite de ecuațiile $x = -1$ și $x = 2$.

**14.** Să se determine valorile parametrului real $a$ pentru care dreapta verticală $x = a$ împarte subgraficul funcției $f\colon [2, 8] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{x}$, în două părți de arii egale.

**15.** Să se afle aria figurii mărginite de graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x}$, axa $Ox$ și dreapta definită de ecuația $x = -1$.

**16.** Să se afle aria figurii mărginite de graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 3$ și $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + 1$.

**17.** Să se afle, utilizând integrala definită, formula de calcul a ariei discului de rază $r$.

**18.** Determinați valorile reale ale lui $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$, pentru care $\sin\alpha - 2\int_0^{\alpha} \cos 2x\, dx = 0$.

**19.** Calculați volumul corpului de rotație determinat de funcția $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$.

**20.** Să se afle aria figurii mărginite de graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin|x|$ și $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x| - \pi$.

**21.** Să se formuleze exemple de aplicare a integralei definite în fizică și alte domenii.

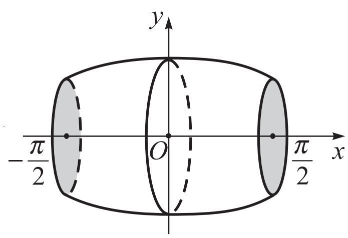
## $C_1$

**22.** Fie funcțiile $f, g\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + x^2,\ g(x) = 1 + ax,\ a > 0$. Să se determine numărul real $a$, astfel încât ariile subgraficelor funcțiilor $f$ și $g$ să fie egale.

**23.** Fie funcția $f\colon [0, \lambda] \to \mathbb{R},\ \lambda > 0,\ f(x) = xe^{-x}$. Să se afle aria $\mathscr{A}(\lambda)$ a subgraficului funcției $f$ și $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda)$.

**24.** ***Investigați!*** Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x$. Să se afle aria mulțimii delimitate de graficul funcției $f$ și de dreapta care trece prin punctele $M_1(x_1, f(x_1))$ și $M_2(x_2, f(x_2))$, unde $x_1$ este punctul de maxim al funcției $f$, iar $x_2$ – punctul ei de minim.

**25.** Să se determine volumul unui butoi, știind că doagele lui au forma graficului funcției $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\cos x + b\ (a, b > 0)$.




$$\mathscr{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx$$

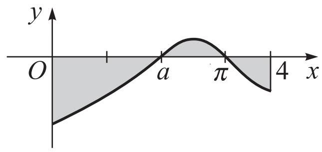
$$\mathscr{V}(C_f) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

## Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

***Profilul real***

1. În desenul alăturat este reprezentată figura mărginită de graficul funcției $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$ şi de dreptele $x=0$ şi $x=4$. Folosind integrala definită, scrieți în casetă formula cu ajutorul căreia se poate calcula aria figurii colorate.




$\mathcal{A}_f = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$

2. Determinați aria figurii mărginite de graficele funcțiilor:

a) $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x^2,\ g(x)=0;$

b) $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3-x,\ g(x)=x^2+x.$

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=e^x+3x^2$. Determinați numărul natural $n$, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-e^x$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuații $x=0$ şi $x=n$ are aria egală cu $n^2-n+1$.

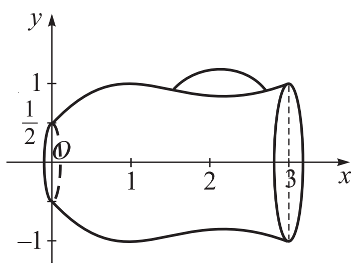
4. Aflați volumul corpului de rotație în jurul axei $Ox$ determinat de funcția:

a) $g:\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ g(x)=\sin 2x;$

b) $g:[1, e]\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{x}\ln x.$

5. Determinați volumul unui urcior care se obține prin rotirea în jurul axei $Ox$ a subgraficului funcției $f:[0, 3]\to\mathbb{R}$,

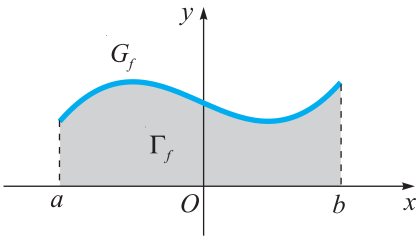
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}, & \text{dacă } 0\le x\le 2\\[2mm] \dfrac{3}{2}x^2-7x+\dfrac{17}{2}, & \text{dacă } 2\le x\le 3.\end{cases}$$



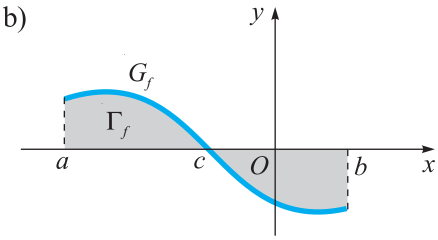
**Funcție continuă $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$**

### Subgraficul funcției $f$

a)




b)




### Aria subgraficului funcției $f$

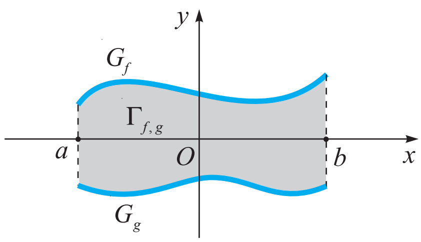
a) $\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

b) $\mathcal{A}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

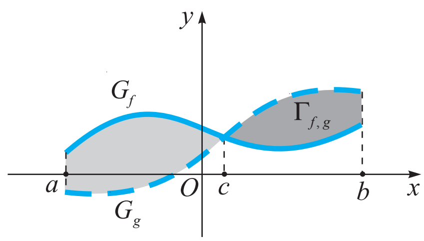
**$f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ – funcții continue pe $[a, b]$**

### Mulțimi delimitate de graficele a două funcții și de dreptele $x = a$, $x = b$

a)




b)



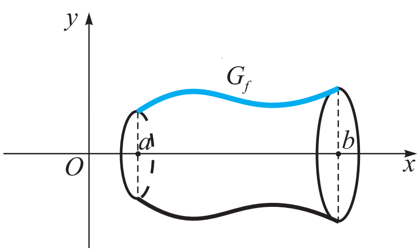

### Aria mulțimii delimitate de graficele a două funcții și de dreptele $x = a$, $x = b$

a) $\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

b) $\mathcal{A}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x =$

$= \int_a^c (f(x) - g(x))\mathrm{d}x - \int_c^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

### Corp de rotație în jurul axei $Ox$




### Volumul corpului de rotație în jurul axei $Ox$

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

Modulul

# 4

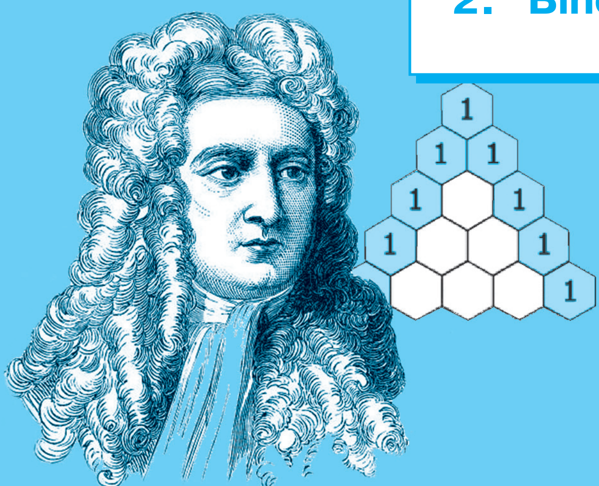
# Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton

*Învățătura – ca aurul – are preț oriunde.*
Epictet

**Obiectivele modulului**

- identificarea în diverse contexte a noțiunilor *mulțime ordonată*, *factorial*, *aranjamente*, *permutări*, *combinări de elemente ale unor mulțimi numerice finite*;
- utilizarea legilor combinatoricii, a aranjamentelor, permutărilor, combinărilor şi a proprietăților acestora în rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, problemelor din diferite domenii;
- *aplicarea binomului lui Newton sau/şi a formulei termenului general în situații reale şi/sau modelate;
- *folosirea proprietăților coeficienților binomiali şi ale dezvoltării binomului la putere la rezolvarea problemelor.

1. Elemente de combinatorică
2. Binomul lui Newton



# § 1 ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

## 1.1. Mulțimi ordonate

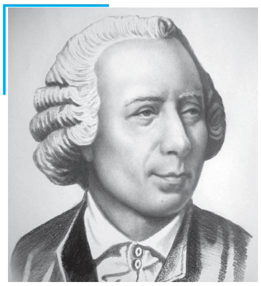
**Problema 1.** E necesar de a asigura 150 000 de apartamente noi cu numere de telefonie fixă, fiecare număr fiind format din şase cifre distincte. Se va reuşi, oare, dacă se ştie că numărul de telefon poate să înceapă şi cu 0?

**Problema 2.** La o sesiune de comunicări s-au înregistrat 7 referate. În câte moduri se poate face programarea susținerii lor?

**Problema 3.** În clasa a XII-a învață 24 de elevi. În fiecare zi, o echipă formată din 3 elevi este de serviciu. În câte moduri poate fi formată această echipă?

Observăm că în aceste tipuri de probleme se solicită aranjarea într-o ordine specială a elementelor unei mulțimi finite, determinarea dintr-o mulțime finită de elemente a numărului de submulțimi de elemente care posedă anumite proprietăți, realizarea unei oarecare combinații de elemente etc. Domeniul matematicii care studiază astfel de probleme se numeşte ***combinatorică***. Astfel de probleme se numesc ***probleme de combinatorică***.

Probleme de combinatorică apar atât în viața cotidiană, cât şi în diverse domenii ale ştiinței şi tehnicii: la studiul teoriei probabilităților, teoriei numerelor, logicii matematice, informaticii, fizicii, chimiei etc. În unele cazuri, vom căuta cel puțin o soluție a problemei, în altele – toate soluțiile ei sau soluția optimă, sau numai numărul de soluții etc. Pentru unele probleme de combinatorică se va demonstra că ele nu au soluții. De exemplu, *Leonard Euler* a formulat problema, iar mai târziu s-a demonstrat că nu e posibil de aranjat 36 de ofițeri care au 6 tipuri de grade militare vizând 6 categorii de trupe militare (câte un ofițer cu gradul respectiv din trupa militară respectivă), pe 36 de pătrățele ale unui careu $(6\times 6)$, astfel încât în fiecare linie şi în fiecare coloană să fie reprezentate toate categoriile de trupe militare şi toate tipurile de grade militare.



Leonard Euler (1707–1783), matematician şi fizician elvețian

În figura 4.1 este reprezentată soluția acestei probleme pentru 4 categorii de trupe militare ($A$, $B$, $C$, $D$) şi pentru 4 tipuri de grade militare ($a$, $b$, $c$, $d$). *Completați tabelul şi finalizați rezolvarea!*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Aa* | *Bd* | | *Dc* |
| | *Ac* | *Da* | *Cd* |
| *Cc* | | *Ad* | |
| | *Ca* | *Bc* | *Ab* |

Fig. 4.1

Probleme de combinatorică apar şi în jocurile sportive. În special, ele sunt frecvente în jocurile de şah şi dame.

În continuare vom studia probleme simple de combinatorică (fără repetarea elementelor).

Vom considera mulțimi numerice finite. În special, vom lucra cu mulțimi ordonate. Fiecare mulțime are o structură internă, care include atât elementele ei, cât şi ordinea de amplasare a acestora. Elementele unei mulțimi pot fi ordonate în diverse moduri. De exemplu, elementele mulțimii $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ pot fi aranjate astfel: $\{a_4, a_3, a_2, a_1\}$, $\{a_2, a_1, a_3, a_4\}$, $\{a_1, a_2, a_4, a_3\}$ etc. Fiecare din aceste mulțimi, deşi conține aceleaşi elemente, diferă prin ordinea de dispunere a acestora.

**Definiție**

Mulțimea finită $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se numeşte **mulțime ordonată** dacă elementele ei sunt aranjate într-o ordine bine determinată. Cu alte cuvinte, mulțimea $M$ se numeşte **ordonată** dacă fiecărui element al ei i se asociază un anumit număr natural de la 1 la $n$, astfel încât elementelor diferite ale lui $M$ le corespund numere diferite.

Una şi aceeaşi mulțime finită poate fi ordonată în diverse moduri. De exemplu, mulțimea elevilor din clasa a X-a poate fi ordonată după înălțimea elevilor (crescător sau descrescător), după masa corporală (crescător sau descrescător) sau în ordinea alfabetică a numelor lor.

**Observații**

**1.** S-a convenit ca mulțimile ordonate, obținute din mulțimea dată, să se scrie între paranteze rotunde.

*Exemplu*

$\{1, 2, 3\}$

(1, 2, 3) (1, 3, 2) (3, 2, 1) (2, 3, 1) (2, 1, 3) (3, 1, 2)

**2.** Două mulțimi ordonate sunt ***egale*** dacă conțin aceleaşi elemente şi au aceeaşi ordine de dispunere a acestora.

*Exemplu*

Mulțimile ordonate $(a, b, c, d)$ şi $(a, b, c, e)$ sunt diferite. De asemenea, sunt diferite mulțimile ordonate (8, 9, 10) şi (8, 10, 9).

> Produsul primelor $n$ numere naturale nenule se notează cu $n!$, adică
> $$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Notația $n!$ se citeşte „en factorial”.

**Exemple**

$1! = 1;\ 2! = 1 \cdot 2 = 2;\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;\ 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

**Observație**

Prin definiție, considerăm că $0! = 1$.

Mai târziu, vom argumenta această definiție. În particular,

$$n! = (n-1)! \cdot n \text{ pentru } n \geq 1 \text{ sau}$$
$$n! = (n-2)! \cdot (n-1)n \text{ pentru } n \geq 2, \text{ sau}$$
$$n! = (n-3)! \cdot (n-2)(n-1)n \text{ pentru } n \geq 3, \text{ sau}$$
$$n! = (n-4)! \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \text{ pentru } n \geq 4 \text{ ş.a.m.d.}$$

**Exemple**

**1** $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 90.$

**2** $\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!} = \dfrac{(n-2)! \cdot (n-1)}{(n-2)!} = n-1.$

**3** $\dfrac{(2n)!}{(2n-1)!} = \dfrac{(2n-1)! \cdot 2n}{(2n-1)!} = 2n.$

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația $\dfrac{(n+2)!}{2(n-1)!} = 15(n+2).$

*Rezolvare*:

DVA: $\begin{cases} n+2 \geq 0 \\ n-1 \geq 0 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 1, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

În DVA avem:

$$\frac{(n+2)!}{2(n-1)!} = 15(n+2) \Leftrightarrow \frac{(n-1)! \cdot n(n+1)(n+2)}{2(n-1)!} = 15(n+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n(n+1)(n+2) = 30(n+2) \Leftrightarrow n(n+1) = 30 \Leftrightarrow n^2 + n - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -6 \notin \text{DVA}, \\ n = 5 \in \text{DVA}. \end{array}\right.$$

*Răspuns*: $S = \{5\}$.

## 1.2. Aranjamente

Fie mulțimea $M=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, card $M=n$.

Luăm $m$ elemente oarecare din cele $n$ $(0 \le m \le n)$ ale mulțimii $M$ și formăm diferite mulțimi ordonate.

**Definiție**

Submulțimile ordonate ale mulțimii $M$, card $M = n$, având fiecare câte $m$ elemente, unde $0 \le m \le n$, se numesc **aranjamente de $n$ elemente luate câte $m$**.

Numărul de aranjamente de $n$ elemente luate câte $m$ se notează $A_n^m$.

Prin definiție, considerăm că $A_n^0 = 1$.

**Exercițiu rezolvat**

Fie mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$. Să se calculeze numărul $A_3^2$.

*Rezolvare*:

Din trei elemente 0, 2, 3 $(n=3)$, luate câte două elemente $(m=2)$, se pot forma 6 submulțimi ordonate: (0, 2), (2, 0), (0, 3), (3, 0), (2, 3), (3, 2). Așadar, $A_3^2 = 6$.

Să calculăm numărul de aranjamente a $n$ elemente luate câte $m$, adică să găsim o formulă pentru calculul numărului $A_n^m$.

Evident că $A_n^1 = n$. Un element din $n$ elemente date poate fi ales în $n$ moduri, iar cu un element se poate forma numai o mulțime ordonată.

Pentru a repartiza oricare $m+1$ elemente, luate din $n$ elemente date, pe $m+1$ locuri, se pot lua mai întâi oricare $m$ elemente și aranja pe primele $m$ locuri. Aceasta se poate realiza în $A_n^m$ moduri. De fiecare dată, la o astfel de selectare a $m$ elemente din cele $n$ date, rămân $n-m$ elemente, fiecare dintre ele putând fi puse pe locul al $(m+1)$-lea. Deci, pentru fiecare din cele $A_n^m$ moduri de aranjare a elementelor pe primele $m$ locuri, obținem $n-m$ posibilități prin care al $(m+1)$-lea loc este ocupat de unul dintre cele $n-m$ elemente rămase. De aici rezultă că $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$. Luând în considerare că $A_n^1 = n$, obținem succesiv:

$$A_n^2 = n(n-1),$$
$$A_n^3 = n(n-1)(n-2),$$
$$A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3), \ ...,$$
$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \ ... \ (n-m+1).$$

Astfel, am demonstrat

**Teorema 1**

Dacă $m$ și $n$ sunt numere naturale, astfel încât $0 \le m \le n$, atunci

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

În practică, e mai comod să aplicăm o altă formulă pentru calculul numărului $A_n^m$.

Cum $n(n-1)(n-2) \ ... \ (n-m+1) = n(n-1)(n-2) \ ... \ (n-m+1) \times$

$\times \dfrac{(n-m)\cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)\cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{n!}{(n-m)!}$, obținem:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.} \qquad (1)$$

Pentru $m=0$ formula (1) dă $A_n^0 = 1$, iar pentru $m=n$ din (1) obținem $A_n^n = n!$. Așadar, teorema 1 și formula (1) sunt adevărate pentru orice $m$ și $n$, unde $0 \le m \le n$.

Deci, problema 1 din secvența 1.1 se rezolvă astfel:

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{4!\cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{4!} = 151\,200.$$

Prin urmare, sunt posibile 151 200 de numere de telefon de tipul menționat, iar răspunsul este afirmativ.

## 1.3. Permutări

**Problema 4.** Fie mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$. Să se calculeze numărul $A_3^3$.

*Rezolvare*:

Din elementele 0, 2, 3, luate câte trei, se pot forma 6 submulțimi ordonate:

$$(0, 2, 3), (0, 3, 2), (3, 0, 2), (3, 2, 0), (2, 3, 0), (2, 0, 3).$$

Deci, $A_3^3=6=1\cdot 2\cdot 3=3!$.

Observăm că aceste aranjamente se obțin la schimbarea locurilor celor trei elemente date. Astfel, am obținut permutări.

**Definiție**

Aranjamentele de $n$ elemente luate câte $n$ ale mulțimii $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se numesc **permutări de *n* elemente** ale acestei mulțimi.

Numărul de permutări de $n$ elemente se notează $P_n$.

Ținând cont că $A_n^n=n!$, în baza definiției permutărilor, obținem:

$$\boxed{P_n=n!,\ n\in\mathbb{N}^*.} \qquad (2)$$

Aşadar, am demonstrat

**Teorema 2**

Dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $P_n=n!$.

Deci, problema 2 propusă în secvența 1.1 poate fi rezolvată aplicând noțiunea de permutări.

Avem $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Atunci, $P_7=7!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5\,040$.

Prin urmare, există 5 040 de moduri de programare a susținerii celor 7 referate în cadrul sesiunii.

Din formulele (1) şi (2) obținem următoarea formulă: $\boxed{A_n^m=\dfrac{P_n}{P_{n-m}}.}$

**Observație**

Vom considera că mulțimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod, adică $P_0=1$. Deci, $0!=1$. Astfel, formula (2) este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

## 1.4. Combinări

**Problema 5.** Fie mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$. Să se determine toate submulțimile ei.

*Rezolvare*:

Obținem următoarele submulțimi:

a) mulțimea vidă: $\varnothing$;

b) submulțimi având fiecare câte un element: $\{0\}, \{2\}, \{3\}$;

c) submulțimi având fiecare câte două elemente: $\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{2, 3\}$;

d) însăşi mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$.

Aşadar, mulțimea $B=\{0, 2, 3\}$ are în total opt submulțimi.

**Definiție**

Submulțimile mulțimii $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, având fiecare câte $m$ elemente, unde $0\le m\le n$, se numesc **combinări de *n* elemente luate câte *m***.

Numărul combinărilor de $n$ elemente luate câte $m$ se notează $C_n^m$ sau $\binom{n}{m}$.

Pentru problema 5 avem: $C_3^0=1$, $C_3^1=3$, $C_3^2=3$, $C_3^3=1$, iar numărul tuturor submulțimilor (*cardinalul booleanului*) mulțimii $B=\{0, 2, 3\}$ este $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8=2^3$.

Observăm că $C_n^0 = 1,$ deoarece oricare mulţime $M$ are numai o submulţime fără nici un element, şi anume – mulţimea vidă. $C_n^1 = n,$ deoarece o mulţime cu $n$ elemente are exact $n$ submulţimi cu câte un singur element.

**Observaţie**

Pentru a nu confunda combinările cu aranjamentele, ţinem cont de faptul că:
- la combinări, submulţimile unei mulţimi date nu sunt ordonate, iar la aranjamente toate submulţimile acesteia sunt ordonate;
- elementele aranjamentelor se scriu între paranteze rotunde, iar cele ale combinărilor – între acolade.

De exemplu, aranjamentele (1, 2) şi (2, 1) se consideră diferite, deşi sunt formate din aceleaşi elemente, iar submulţimile $\{1, 2\}$ şi $\{2, 1\}$ se consideră ca una şi aceeaşi combinare.

Prin urmare, combinările sunt submulţimi ale mulţimii date care diferă numai prin elemente, fără a se lua în considerare ordinea lor.

Să găsim o formulă pentru calculul numărului de combinări de $n$ elemente luate câte $m$, adică pentru calculul numărului $C_n^m$.

Considerăm toate submulţimile a câte $m$ elemente ale mulţimii $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Ordonăm fiecare dintre aceste submulţimi în toate modurile posibile şi vom obţine toate submulţimile ordonate ale lui $M$ care au câte $m$ elemente. Se ştie că numărul acestor submulţimi este $A_n^m$. Cum numărul tuturor submulţimilor lui $M$ a câte $m$ elemente este $C_n^m$, iar fiecare submulţime poate fi ordonată în $P_m$ moduri, rezultă că $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$.

Deci, $\boxed{C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}.}$

Din formulele (1) şi (2) obţinem:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}} \quad \text{sau} \quad \boxed{C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}.}$$

Astfel, am demonstrat

**Teorema 3**

Dacă $m$ şi $n$ sunt numere naturale şi $0 < m < n,$ atunci

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3}$$

**Observaţie**

Pentru $m = 0$, formula (3) dă $C_n^0 = 1,$ iar pentru $m = n$ din (3) obţinem $C_n^n = 1.$

Aşadar, teorema 3 şi formula (3) sunt adevărate pentru orice $m$ şi $n,$ $0 \le m \le n.$

Prin urmare, problema 3 din secvenţa 1.1 se rezolvă astfel:

$$C_{24}^3 = \frac{24!}{3!(24-3)!} = 2\,024.$$

Deci, echipa de serviciu din clasă poate fi formată în 2 024 de moduri.

***Proprietăţi ale numerelor $C_n^m$***

Sunt adevărate egalităţile:

1° $C_n^m = C_n^{n-m},$ $0 \le m \le n,$ $m, n \in \mathbb{N}$ – *formula combinărilor complementare*;

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1},$ $0 \le m < n,$ $m, n \in \mathbb{N}$ – *formula de recurenţă pentru calculul numărului de combinări*;

3° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n,$ $n \in \mathbb{N}$ – *numărul tuturor submulţimilor mulţimii $M$* formate din $n$ elemente este egal cu $2^n$, adică $\operatorname{card} \mathcal{B}(M) = 2^n$.

*Exerciții.* 1. Demonstrați proprietățile 1°–2° aplicând formula pentru $C_n^m$.
2. Demonstrați proprietatea 3° aplicând metoda inducției matematice.

**Observații**

1. O altă deducere a proprietății 3° va fi propusă în paragraful următor.
2. Aceste proprietăți exprimă diferite relații între submulțimile unei mulțimi finite.

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$.

*Rezolvare*:

$$\text{DVA: } \begin{cases} 2n \geq 0 \\ 2n \geq 7 \\ 2n \geq 5 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \geq 3{,}5, \\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

În DVA avem:

$$C_{2n}^7 > C_{2n}^5 \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{7!(2n-7)!} > \frac{(2n)!}{5!(2n-5)!} \Leftrightarrow \frac{5!(2n-5)!}{7!(2n-7)!} > 1 \Leftrightarrow \frac{5!(2n-7)! \cdot (2n-6)(2n-5)}{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot (2n-7)!} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2n-6)(2n-5) > 42 \Leftrightarrow 4n^2 - 22n - 12 > 0 \Leftrightarrow 2n^2 - 11n - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n > 6, \\ n < -0{,}5. \end{array}\right.$$

Ținând cont de DVA, obținem: $n > 6,\ n \in \mathbb{N}$.

*Răspuns*: $S = \{7, 8, 9, 10, ...\}$.

## 1.5. Regulile fundamentale ale combinatoricii

### 1.5.1. *Regula multiplicității (înmulțirii)*

**Problema 6.** În clasa a XII-a sunt 12 băieți și 15 fete. În câte moduri pot fi alcătuite echipe mixte la competițiile liceale de volei, formate din 4 băieți și 2 fete?

*Rezolvare*:

Patru băieți din cei 12 pot fi aleși în $C_{12}^4$ moduri, iar două fete din cele 15 pot fi alese în $C_{15}^2$ moduri.

În acest caz, echipele respective pot fi formate în

$$C_{12}^4 \cdot C_{15}^2 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{14 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 495 \cdot 105 = 51\,975 \text{ (moduri).}$$

*Răspuns*: 51975 de moduri.

La rezolvarea acestei probleme am folosit ***regula multiplicității*** (sau ***regula înmulțirii***).

**Teorema 4**

Dacă mulțimile $A$ și $B$ sunt finite, atunci cardinalul produsului cartezian $A \times B$ este egal cu produsul cardinalelor acestor mulțimi:

$$\operatorname{card}(A \times B) = \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} B.$$

**Teorema 5**

Dacă mulțimile $B_1, B_2, ..., B_k$ sunt finite, atunci este verificată egalitatea:

$$\operatorname{card}(B_1 \times B_2 \times ... \times B_k) = \operatorname{card} B_1 \cdot \operatorname{card} B_2 \cdot ... \cdot \operatorname{card} B_k.$$

### 1.5.2. *Regula adunării*

**Problema 7.** Câți divizori naturali are numărul 770?

*Rezolvare*:

Descompunem numărul 770 în produs de factori primi: $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$. Astfel, numărul 770 are patru divizori naturali primi (numerele 2, 5, 7, 11).

Numărul divizorilor naturali formați din produsul a câte doi factori primi este $C_4^2 = 6$ (adică numerele 10, 14, 22, 35, 55, 77), iar numărul divizorilor naturali formați din produsul a câte trei factori primi este $C_4^3 = 4$ (adică numerele 70, 110, 154, 385).

Divizori ai numărului 770 sunt şi numerele 1 şi 770.

Aşadar, numărul 770 are în total $4+6+4+1+1=16$ (divizori naturali).

*Răspuns*: 16 divizori naturali.

La rezolvarea acestei probleme am folosit ***regula adunării***.

**Teorema 6**

Dacă mulțimile finite $A$ şi $B$ sunt disjuncte, adică $A \cap B = \varnothing$, atunci cardinalul reuniunii mulțimilor $A$, $B$ este egal cu suma cardinalelor acestor mulțimi:

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B.$$

**Teorema 7**

Dacă mulțimile finite $B_1, B_2, ..., B_k$ sunt disjuncte două câte două, adică $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, atunci este verificată egalitatea:

$$\text{card}(B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k) = \text{card}\, B_1 + \text{card}\, B_2 + ... + \text{card}\, B_k.$$

**Problemă rezolvată**

Din 2 contabili şi 8 economişti trebuie să se formeze o comisie de 6 persoane. În câte moduri poate fi formată această comisie, dacă în componența ei trebue să fie cel puțin un contabil?

*Rezolvare*:

Dacă în comisie va fi un singur contabil, această comisie, conform regulii multiplicității, poate fi formată în $C_2^1 \cdot C_8^5 = 112$ (moduri).

În cazul în care în comisie vor fi doi contabili, conform regulii multiplicității, avem $C_2^2 \cdot C_8^4 = 70$ (moduri).

În total, conform regulii adunării a combinatoricii, comisia respectivă poate fi formată în $C_2^1 \cdot C_8^5 + C_2^2 \cdot C_8^4 = 112 + 70 = 182$ (moduri).

*Răspuns*: 182 de moduri.

**Observație**

Pentru calcularea numărului de divizori naturali ai unui număr în cazul când exponentul puterii factorului prim, obținut la descompunerea numărului dat în produs de factori primi, este mai mare sau egal cu 2, vom aplica următoarea metodă.

Fie $n$ număr natural, iar $P_1, P_2, ..., P_k$ – factorii primi în descompunerea acestuia.

Dacă $n = P_1^{d_1} \cdot P_2^{d_2} \cdot ... \cdot P_k^{d_k}$, atunci numărul de divizori este egal cu $(d_1+1) \cdot (d_2+1) \cdot ... \cdot (d_k+1)$.

De exemplu, pentru $n = 54 = 2 \cdot 3^3$, avem $d_1 = 1$, $d_2 = 3$.

Deci, numărul de divizori naturali ai numărului 54 va fi egal cu

$$(d_1+1) \cdot (d_2+1) = (1+1) \cdot (3+1) = 8.$$

Completați: $D_{54} = \{\boxed{\phantom{0}}, \boxed{\phantom{0}}, \boxed{\phantom{0}}, \boxed{\phantom{0}}, \boxed{\phantom{0}}, \boxed{\phantom{0}}, \boxed{\phantom{0}}, \boxed{\phantom{0}}\}$.

Menționăm că la rezolvarea acestei probleme am folosit regula multiplicității.

**Problema 8.** Aflați câți divizori naturali are numărul:
a) 68; b) 110; c) 105; d) 200; e) 448.

Menționăm că problemele de combinatorică examinate sunt simple – **fără repetări de elemente**. Problemele de combinatorică cu repetarea elementelor sunt mai complicate.

De exemplu, permutând literele în cuvântul *caietul*, obținem $P_7 = 7! = 5\,040$ de „termeni”.

Dacă însă vom permuta literele în cuvântul *copacul*, vom obține mai puțini „termeni”, deoarece permutările a două litere „c” nu schimbă „termenul”. În aceste cazuri, constatăm permutări cu repetarea elementelor. De asemenea, există aranjamente cu repetarea elementelor şi combinări cu repetarea elementelor.

## Exerciții şi probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
a) Să se scrie toate mulțimile ordonate obținute din mulțimea $A$.
b) Să se scrie toate submulțimile ordonate formate din două elemente ale mulțimii $A$.
c) Să se scrie toate submulțimile ordonate formate din trei elemente ale mulțimii $A$.

**2.** Să se calculeze:
a) $3!$; $5!$; $8!$; b) $\dfrac{10!}{6!\cdot 2!}$; c) $\dfrac{9!\cdot 4!}{16!}$.

**3.** Să se calculeze:
a) $A_5^3,\ A_8^1,\ A_7^5,\ A_8^8,\ A_3^6$;
b) $P_3,\ P_5,\ P_0,\ P_{10},\ P_8$;
c) $C_{10}^4,\ C_8^2,\ C_{16}^{16},\ C_{12}^7,\ C_9^8$.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

**4.** Să se calculeze:
a) $\dfrac{A_5^4}{P_4}$; b) $A_7^5 \cdot C_5^3$; c) $\dfrac{C_7^4}{P_6}$; d) $A_8^2 \cdot P_3$;
e) $C_4^3 \cdot A_3^2 \cdot P_4$; f) $\dfrac{A_5^3 + P_5}{C_6^4}$; g) $\dfrac{C_2^4 - P_6}{A_6^4}$.

$$P_n = n!,\ n \in \mathbb{N}^*$$

### B

**5.** *Lucrați în perechi!* Fie mulțimea:
1) $A = \{0, 1\}$;
2) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.
a) Să se scrie toate submulțimile mulțimii $A$.
b) Să se afle cardinalul booleanului mulțimii $A$.

**6.** Fie mulțimea $B = \{2, 7, 8, 1\}$. Să se scrie toate mulțimile ordonate ale acestei mulțimi.

**7.** Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii $A$.

**8.** Să se determine câte numere naturale se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, dacă în orice număr format fiecare cifră apare cel mult o dată.

**9.** Pentru a organiza o excursie cu elevii clasei, e necesar de a forma un comitet organizatoric în următoarea componență: preşedinte, secretar şi doi membri. În câte moduri poate fi format acest comitet dacă în clasă sunt 25 de elevi?

**10.** Având 10 lalele roşii şi 6 lalele galbene, să se decidă în câte moduri se poate forma un buchet alcătuit din 5 lalele.

**11.** Campionatul național de fotbal se desfăşoară după sistemul tur-retur. Fiecare echipă joacă de două ori cu fiecare din celelalte echipe. Să se determine câte partide trebuie planificate în total, dacă la campionat participă 18 echipe.

**12.** O comisie financiară este formată din preşedinte, vicepreşedinte şi trei membri. În câte moduri 5 persoane îşi pot repartiza aceste funcții?

**13.** În câte moduri se pot aşeza 8 copii pe o bancă?

**14.** În câte moduri poate fi confecționat un tricolor, în varianta reprezentării verticale a culorilor, având şapte bucăți de pânză de aceleaşi dimensiuni şi de culori diferite?

**15.** Câți „termeni” pot fi alcătuiți, folosind de fiecare dată toate literele câte o singură dată:

a) $p, a, t, r, i, e$; b) $a, u, r$;

c) $p, r, e, ț$; d) $î, n, v, ă, ț, a, r, e$?

**16.** În câte moduri pot fi aranjate 7 cărți pe o poliță?

**17.** În câte moduri un cumpărător poate să aleagă 3 CD-uri diferite din cele 8 CD-uri diferite propuse de vânzător?

**18.** În câte moduri un antrenor poate forma o echipă de volei compusă din 6 jucători, dacă în total sunt 16 jucători?

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

## C

**19.** *Lucrați în perechi!* Din cei 11 contabili ai unei firme, dintre care 7 sunt bărbați, se formează o echipă de 5 persoane. În câte moduri poate fi alcătuită comisia astfel încât în componența ei să fie:

a) două femei; b) cel puțin două femei?

**20.** *Lucrați în grup!* Proiect *Exemple de utilizare a aranjamentelor, permutărilor şi combinărilor în alte discipline şcolare şi în viața cotidiană.*

### *Profilul real*

## A₁

**1.** *Lucrați în perechi!* Fie mulțimea $A=\{a, b, c, d\}$.

a) Să se scrie toate mulțimile ordonate obținute din mulțimea $A$.

b) Să se scrie toate submulțimile ordonate formate din două elemente ale mulțimii $A$.

c) Să se scrie toate submulțimile ordonate formate din trei elemente ale mulțimii $A$.

**2.** Să se calculeze:

a) $\frac{12!}{5!\cdot 6!}$; b) $\frac{15!}{6!\cdot 8!}-10$; c) $\frac{20!}{18!\cdot 4!}+25$.

**3.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $\frac{n!}{(n-2)!}=12$; b) $\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{22n!}{(n-3)!}$; c) $\frac{n!}{(n-5)!}=\frac{6n!}{(n-3)!}$.

**4.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}\le 20$; b) $\frac{16n!}{(n-1)!}>\frac{5n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{(n-4)!}{(n-2)!}\ge\frac{1}{20}$.

**5.** Să se calculeze:

a) $\frac{P_{10}}{A_8^6}$; b) $A_9^9\cdot C_8^6$; c) $P_4\cdot A_{20}^5$; d) $P_5\cdot A_8^2+C_{25}^{25}$; e) $\frac{C_{28}^{25}\cdot P_5}{A_{17}^8}$.

**6.** Să se calculeze:

a) $\frac{A_n^7-A_n^9}{A_n^8}$; b) $\frac{A_{n-1}^{n-2}+P_{n-1}}{C_{n-1}^{n-3}}$; c) $\frac{A_n^3\cdot P_n+2P_{n+1}}{P_{n+1}}$; d) $\frac{A_n^m\cdot P_{n-m+1}}{P_{m-2}}$.

**7.** Să se rezolve în N ecuația:

a) $A_x^2\cdot C_x^{x-1}=4$; b) $A_x^3-C_x^{x-2}=4{,}5x$; c) $A_x^3=3A_x^2+2C_x^4$; d) $C_{x+1}^{x-1}=x^2-1$.

## B₁

**8.** În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, ..., 2n\}$, astfel încât fiecare număr par să aibă rang par?

**9.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $\frac{6(2n)!}{(2n-1)!}=\frac{n!}{(n-3)!}$; b) $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=C_5^3$; c) $\frac{(3n)!}{(3n-2)!}=\frac{5(n+1)!}{(n-1)!}$.

**10.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $\dfrac{(n-6)!}{(n-5)!(n-4)} \le \dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!} < 80$; c) $\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \le 420$.

**11.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $P_{x+5} = (x^2-25)\cdot A_{x+4}^{y}\cdot P_{x+4-y}$; b) $A_{x+1}^{y+1}\cdot P_{x-y} = 156P_{x-1}$; c) $A_x^2\cdot P_x = -6P_{x-3}$.

**12.** În sesiunea de vară elevii clasei a XI-a au de susținut 4 teze semestriale la următoarele discipline: matematică, fizică, istorie şi limba străină. În câte moduri se poate face orarul tezelor, astfel încât tezele de matematică şi fizică să nu fie consecutive?

**13.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul submulțimilor de trei elemente ale lui $A$ care îl conțin pe 1.

**14.** Să se arate că pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*$, valoarea expresiei $C_{n+m}^2 + C_{n+m+1}^2$ este un pătrat perfect.

**15.** Să se demonstreze că $P_m = (m-1)(P_{m-1} + P_{m-2})$, $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$.

**16.** La un concurs participă 8 fete şi 9 băieți. La o etapă a concursului trebuie să se formeze 6 perechi (câte un băiat şi câte o fată). În câte moduri se pot forma cele 6 perechi?

**17.** O echipă de fotbal are 25 de jucători, inclusiv 2 portari. În câte moduri antrenorul poate forma echipa din 11 jucători pentru partida de fotbal preconizată?

**18.** Doina are 7 CD-uri diferite cu muzică clasică, iar Nelu are 9 CD-uri diferite cu muzică folk. În câte moduri ei pot face schimb a câte 3 CD-uri?

**19.** Câți divizori naturali are numărul:

a) 210; b) 85; c) 101; d) 105?

**20.** Olga are 10 lalele roşii şi 6 lalele galbene. În câte moduri ea poate forma un buchet cu 3 lalele roşii şi 2 lalele galbene?

**21.** Într-o companie lucrează 3 directori adjuncți şi 10 manageri. În câte moduri se poate forma o comisie din 5 persoane, astfel încât ea să includă cel puțin 2 directori adjuncți?

**22.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $2A_x^{x-3} > x\cdot P_{x-2}$; b) $A_x^3 + C_x^{x-2} \le 14x$; c) $5C_x^3 > C_{x+2}^4$; d) $A_x^3 - 2C_x^4 \ge 3A_x^2$.

**23.** Să se determine câte numere naturale a câte cinci cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 3, 5, 7, 9.

**24.** Să se calculeze suma $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + \ldots + (n-1)C_n^n$.

## $C_1$

**22.** ***Investigați!*** Să se afle numărul diagonalelor unui poligon convex cu $n$ laturi, utilizând combinările.

**23.** Să se demonstreze că:

a) $C_n^m = C_{n-2}^m + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^{m-2}$; b) $C_n^m = C_{n-3}^m + 3C_{n-3}^{m-1} + 3C_{n-3}^{m-2} + C_{n-3}^{m-3}$.

**24*.** ***Lucrați în perechi!***

Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{2n}^n \cdot \sqrt{3n} < 4^n$.
(Olimpiada de Matematică a Republicii Moldova, 2010)

**25.** Să se demonstreze că:

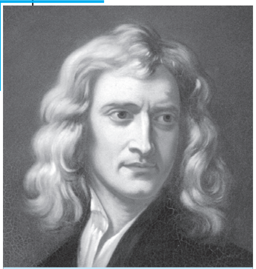
a) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\dfrac{n\pi}{4}$;

c) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\dfrac{n\pi}{4}$.

# § 2 BINOMUL LUI NEWTON

## 2.1. Binomul (formula) lui Newton



Isaac Newton (1643–1727), matematician englez

Pornind de la identitățile $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, se verifică uşor că

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Menționăm că aceste formule sunt cazuri particulare ale dezvoltării $(a+b)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a$, $b$ pot fi oricare expresii algebrice nenule.

Vom arăta că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le n$, este adevărată formula

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n,} \qquad (1)$$

care se numeşte ***binomul lui Newton*** sau ***formula lui Newton***.

*Demonstrație*:

Vom aplica metoda inducției matematice.

Notăm propoziția (1) cu $P(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 1$, propoziția $P(1)$ este adevărată, deoarece $(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b$.

Presupunem că pentru orice număr natural $n = m$, $m \ge 1$, propoziția $P(m)$ este adevărată, adică $(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1}b + C_m^2 a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k}b^k + \ldots + C_m^m b^m$, unde $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le m$.

Vom demonstra că şi pentru orice număr natural $n = m+1$, $m \ge 1$, propoziția $P(m+1)$ este adevărată. Într-adevăr,

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \cdot (a+b) = (C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1}b + \ldots + C_m^k a^{m-k}b^k + \ldots + C_m^m b^m)(a+b) =$$
$$= C_m^0 a^{m+1} + (C_m^0 + C_m^1)a^m b + \ldots + (C_m^k + C_m^{k+1})a^{m-k}b^{k+1} + \ldots + (C_m^{m-1} + C_m^m)ab^m + C_m^m b^{m+1}.$$

Cum $C_m^0 = C_{m+1}^0 = C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1$, aplicând formulele de recurență pentru calculul numărului de combinări $C_m^0 + C_m^1 = C_{m+1}^1$, ..., $C_m^k + C_m^{k+1} = C_{m+1}^{k+1}$, $C_m^{m-1} + C_m^m = C_{m+1}^m$, obținem:

$$(a+b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + \ldots + C_{m+1}^{k+1} a^{m-k}b^{k+1} + \ldots + C_{m+1}^m ab^m + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.$$

Prin urmare, în baza metodei inducției matematice, propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \ge 1$.

Aşadar, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ obținem:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n$ sau

$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + b^n$ sau

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m, \quad m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le m \le n.$$ ►

**Observație**

Pentru a scrie prescurtat suma termenilor unui şir finit de termeni, se poate folosi şi simbolul, deja cunoscut, „$\sum$" (sigma). Astfel, $\sum_{i=1}^{n} a_i$ semnifică $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi se citeşte „suma termenilor $a_i$, $i$ de la 1 la $n$".

**Exercițiu rezolvat**

Să se calculeze $(a+b)^{12}$.

*Rezolvare*:

$$(a+b)^{12} = C_{12}^0 a^{12} + C_{12}^1 a^{11} b + C_{12}^2 a^{10} b^2 + C_{12}^3 a^9 b^3 + C_{12}^4 a^8 b^4 + C_{12}^5 a^7 b^5 +$$
$$+ C_{12}^6 a^6 b^6 + C_{12}^7 a^5 b^7 + C_{12}^8 a^4 b^8 + C_{12}^9 a^3 b^9 + C_{12}^{10} a^2 b^{10} + C_{12}^{11} ab^{11} + C_{12}^{12} b^{12} =$$
$$= a^{12} + 12a^{11}b + 66a^{10}b^2 + 220a^9b^3 + 495a^8b^4 + 792a^7b^5 + 924a^6b^6 +$$
$$+ 792a^5b^7 + 495a^4b^8 + 220a^3b^9 + 66a^2b^{10} + 12ab^{11} + b^{12}.$$

**Definiții**

- Membrul drept al formulei lui Newton se numește **dezvoltarea binomului la putere**.
- Numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^m, ..., C_n^n$ din formula lui Newton se numesc **coeficienți binomiali**.

***Proprietăți ale dezvoltării binomului la putere***

1° Numărul termenilor dezvoltării binomului la putere, deci și al coeficienților binomiali $C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n$, este egal cu $n+1$.

2° În dezvoltarea binomului la putere, exponenții puterilor lui *a* descresc de la *n* la 0, iar exponenții puterilor lui *b* cresc de la 0 la *n*.

3° În orice termen al dezvoltării binomului la putere, suma exponenților puterilor lui *a* și ale lui *b* este egală cu *n*.

4° Termenul

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \ k \in \{0, 1, 2, ..., n\},}$$

adică al ($k$ + 1)-lea termen din dezvoltarea binomului la putere (termenul de rangul $k$ + 1), se numește ***termenul general al dezvoltării***.

Atribuind lui $k$ valori de la 0 la $n$, determinăm toți termenii dezvoltării binomului la putere. De exemplu, $T_1 = C_n^0 a^n b^0$ este primul termen, $T_5 = C_n^4 a^{n-4} b^4$ este al cincilea termen din dezvoltarea binomului la putere.

***Proprietăți ale coeficienților binomiali***

1° Suma coeficienților binomiali din dezvoltarea binomului la putere este egală cu $2^n$:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

Într-adevăr, fie $a = b = 1$. Substituindu-le în formula lui Newton, obținem:

$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n.$$

2° Cum $C_n^m = C_n^{n-m}$, obținem: coeficienții binomiali egal depărtați de termenii extremi ai dezvoltării sunt egali.

3° Suma coeficienților binomiali situați pe locurile pare în dezvoltarea binomului este egală cu suma coeficienților binomiali situați pe locurile impare ale aceleiași dezvoltări și este egală cu $2^{n-1}$.

Într-adevăr, considerând în formula lui Newton $a = 1$, $b = -1$, ne convingem că $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$, ceea ce confirmă proprietatea formulată.

4° a) Pentru $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, coeficientul binomial al termenului de mijloc al dezvoltării ($C_n^k$) este cel mai mare.

b) Pentru $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, coeficienții binomiali ai celor doi termeni de mijloc ai dezvoltării sunt egali ($C_n^k = C_n^{k+1}$) și sunt cei mai mari.

**Observație**

E important să se facă distincție între coeficientul unui termen al dezvoltării binomului la putere și coeficientul binomial al aceluiași termen, în cazul în care *a*, *b* sunt expresii cu coeficienți.

De exemplu, în dezvoltarea $(3a+b)^3 = 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$ coeficientul termenului al treilea este 9, iar coeficientul său binomial este $C_3^2 = 3$.

Coeficienții binomiali ai dezvoltării binomului $(a+b)^n$ pot fi calculați folosind ***triunghiul lui Pascal***.

Cu ajutorul formulei recurente $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$, se pot calcula succesiv numerele $C_{n+1}^{m+1}$, folosind numerele $C_n^m$ și $C_n^{m+1}$. Valorile respective pot fi scrise sub forma unui tabel triunghiular, care se numește ***triunghiul numeric*** sau ***triunghiul lui Pascal***.

| $C_n^m$ | $n \in \mathbb{N}$ | Binomul la puterea $n$ |
|---|---|---|
| 1 | $n=0$ | $(a+b)^0$ |
| 1 1 | $n=1$ | $(a+b)^1$ |
| 1 2 1 | $n=2$ | $(a+b)^2$ |
| 1 3 3 1 | $n=3$ | $(a+b)^3$ |
| 1 4 6 4 1 | $n=4$ | $(a+b)^4$ |
| 1 5 10 10 5 1 | $n=5$ | $(a+b)^5$ |
| 1 6 15 20 15 6 1 | $n=6$ | $(a+b)^6$ |
| … … … … … … … … … … … … … … | … | … |

În linia $(n+1)$ sunt scrise numerele $C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots,\ C_n^n$.

Regula de completare a unei linii a triunghiului lui Pascal, având linia precedentă completată, este următoarea: primul și ultimul număr al liniei este 1; fiecare din celelalte numere ale acestei linii este egal cu suma a două numere din linia precedentă, situate în stânga și în dreapta numărului care urmează a fi calculat.

Astfel, numerele liniei a opta a triunghiului lui Pascal vor fi:

$1,\quad 1+6=7,\quad 6+15=21,\quad 15+20=35,\quad 20+15=35,\quad 15+6=21,\quad 6+1=7,\quad 1.$

**Exercițiu.** Completați linia a noua a triunghiului lui Pascal.

**Observație**

Menționăm că în matematică mai există și un alt mod de determinare a coeficienților binomiali, aplicând derivata funcției.

**Exercițiu.** Studiați, utilizând internetul, modul de determinare a coeficienților binomiali, aplicând derivata funcției.

Puterea cu exponent natural a diferenței a două expresii se calculează după o formulă similară cu formula lui Newton:

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 - C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + (-1)^m C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Concis, vom scrie:

$$\boxed{(a-b)^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m,\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \le m \le n.} \qquad (2)$$

Formula (2) rezultă din formula lui Newton, scriind $(a-b)^n = [a+(-b)]^n$ și dezvoltând binomul la putere.

## 2.2. Aplicații ale binomului lui Newton

Să analizăm unele aplicații ale coeficienților binomiali și ale dezvoltării binomului la putere.

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se determine termenul al șaselea din dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+x)^{14}$.

*Rezolvare*:

$T_6 = C_{14}^5(\sqrt{x})^{14-5}\cdot x^5 = \dfrac{14!}{5!\cdot 9!}(\sqrt{x})^9\cdot x^5 = 2002x^5\cdot\sqrt{x^9} = 2002x^9\cdot\sqrt{x}.$

**2** Să se afle rangul termenului care nu-l conține pe $x$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{20}$.

*Rezolvare*:

Termenul general al dezvoltării binomului este $T_{k+1} = C_{20}^k(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k$. Conform enunțului, $(\sqrt{x})^{20-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k = x^0$. Deci, $\dfrac{20-k}{2}-2k=0 \Leftrightarrow k=4$.

Prin urmare, termenul de rangul 5 nu-l conține pe $x$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{20}$.

*Răspuns*: Termenul al cincilea al dezvoltării.

**3** Să se calculeze cel mai mare coeficient binomial al dezvoltării $\left(u^{\frac{1}{3}}-\sqrt[5]{y}\right)^{22}$.

*Rezolvare*:

Deoarece $n=22$ este număr par, rezultă că cel mai mare coeficient binomial al dezvoltării este $C_{22}^{11} = \dfrac{22!}{11!\cdot 11!} = 705\,432$.

*Răspuns*: $705\,432$.

**4** În dezvoltarea la putere a binomului $\left(3a-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, coeficientul binomial al termenului de rangul 4 este 20. Să se afle termenul de rangul 5 al acestei dezvoltări.

*Rezolvare*:

Cum $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = \dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}$, obținem:

$$\frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 20 \Leftrightarrow (n-2)(n-1)n = 120 \Leftrightarrow n^3-3n^2+2n-120=0 \Leftrightarrow n=6.$$

Astfel, $T_5 = (-1)^4\cdot C_6^4\cdot(3a)^{6-4}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^4 = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 9a^2\cdot a^{-2} = 135.$

*Răspuns*: $T_5 = 135$.

# Exerciții și probleme propuse

*Profilul real*

## A₁

**1.** Să se dezvolte binomul la putere:

a) $(x+y)^7$; b) $(3a+b)^8$; c) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$; d) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^5$; e) $(2a+3x)^4$.

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$$

**2.** Să se dezvolte binomul la putere:

a) $(4-x)^4$; b) $(\sqrt[3]{a}-b)^5$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^7$; d) $(2x-3)^6$; e) $(a-\frac{1}{2}b)^4$.

**3.** Să se determine:

a) termenul al cincilea din dezvoltarea la putere a binomului $(3x+4)^{10}$;

b) termenul al șaptelea din dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+2\sqrt{y})^9$;

c) termenul al zecelea din dezvoltarea la putere a binomului $(\ln 2-5\lg 3)^{11}$.

**4.** Să se determine suma coeficienților binomiali din dezvoltarea la putere a binomului:

a) $(4a+3b^2)^{25}$; b) $(\log_5 x-3y)^{108}$;

c) $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{215}$; d) $(8x-2y)^{71}$.

$$(a-b)^n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m a^{n-m} b^m$$

## B₁

**5.** Să se dezvolte binomul la putere:

a) $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{a^2}}+\sqrt[5]{\frac{3}{b^2}}\right)^5$;

b) $(x-\sqrt{x^2-1})^8-(x+\sqrt{x^2-1})^8$;

c) $(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^6-(\sqrt{2x}-\sqrt{y})^6$.

**6.** Să se determine suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar din dezvoltarea la putere a binomului:

a) $(3x+4y)^{15}$; b) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{25}$;

c) $(a-15b)^{28}$; d) $(2\sqrt{x}+b)^{32}$.

**7.** *Lucrați în perechi!* Să se arate că valoarea expresiei $(5-\sqrt{7})^n+(5+\sqrt{7})^n$ este un număr natural pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

**8.** Să se determine:

a) termenul care îl conține pe $x^{10}$ în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+2x)^{16}$;

b) termenul care îl conține pe $a^4$ în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{a})^{13}$;

c) termenul care nu îl conține pe $x$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{30}$.

**9.** Să se determine termenul de mijloc al dezvoltării la putere a binomului:

a) $(x^2+2y^4)^{16}$; b) $(\sqrt{a}+b^4)^{24}$;

c) $(x^3-y^2)^{14}$; d) $(\sqrt{x}-\lg x)^{18}$.

**10.** Să se determine cei doi termeni de mijloc ai dezvoltării la putere a binomului:

a) $(x-y^3)^{25}$; b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{13}$;

c) $(2x^3-3y^2)^{11}$; d) $(3+x)^{17}$.

**11.** Să se determine termenii din mijloc ai dezvoltărilor la putere a binoamelor:

a) $(a^2+3b)^{20}$; b) $(x-2y)^{30}$;

c) $(a^3+b^2)^{21}$; d) $(5-x)^{31}$.

**12.** Să se determine termenul care îl conține pe $a^{14}$ în dezvoltarea $(\sqrt{a}+2a^3)^{18}$.

**13.** Să se afle coeficientul binomial al termenilor din mijloc al dezvoltării la putere a binomului $(x^3+y^3)^{15}$.

**14.** Coeficientul binomial al termenului al treilea în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ este cu 44 mai mare decât coeficientul binomial al termenului al doilea. Să se afle numărul natural $n$.

**15.** Să se determine valorile reale ale lui $x$ pentru care termenul al patrulea al dezvoltării la putere a binomului $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\lg x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ este egal cu 200.

**16.** Să se determine termenul de rangul patru al dezvoltării la putere a binomului $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{\sqrt[3]{y}}{3}\right)^6$.

**17.** Să se calculeze suma coeficienților dezvoltării la putere a binomului:

a) $(8x^2-5y^2)^9$; b) $(7x+8y^3)^6$.

**18.** Să se determine termenii raționali ai dezvoltării la putere a binomului:

a) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[7]{2})^{20}$; b) $(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5})^{124}$.

**19.** ***Lucrați în perechi!*** Să se afle termenul care îl conține pe $x^{-\frac{1}{4}}$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right)^n$, știind că suma coeficienților binomiali este egală cu 256.

**20.** Să se determine $n$, dacă în dezvoltarea $(x+y)^n$ coeficientul lui $y^3$ este egal cu coeficientul lui $y^5$.

**21.** Să se afle termenul care îl conține pe $x^9$ în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{x}+x)^n$, dacă suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 2 048.

**22.** Să se determine $A_n^3$, dacă termenul al cincilea din dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{a}\right)^n$ nu-l conține pe $a$.

**23.** BAC Dezvoltarea la putere a binomului $\left(a\sqrt{a}-\frac{1}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^n$ conține 9 termeni. Determinați termenul de mijloc al dezvoltării.

**24.** BAC Determinați numărul natural $n$ astfel încât în dezvoltarea la putere a binomului $(\sqrt{2}+2\sqrt{3})^n$ raportul dintre termenul al treilea și termenul al doilea este egal cu $5\sqrt{6}$.

## C₁

**25.** Să se demonstreze prin metoda inducției matematice și cu ajutorul formulei lui Newton *mica teoremă a lui Fermat*: „Dacă $p$ este un număr natural prim și $n\in\mathbb{N}$, atunci $n^p-n$ se divide cu $p$”.

***Observație.*** Teorema lui Fermat deseori se formulează astfel: „Dacă $p$ este un număr natural prim și $n$ este un număr natural care nu este multiplu al lui $p$, atunci $n^{p-1}-1$ se divide cu $p$”.

**26.** ***Investigați!*** Ce proprietăți ale numerelor (șirurilor) se pot depista în triunghiul lui Pascal?

**27.** ***Lucrați în perechi!*** Să se compună, utilizând binomul lui Newton, o problemă vizând:

a) aranjamentele;
b) permutările;
c) combinările.

**28.** Comparând coeficienții puterilor lui $x$ din ambii membri ai egalității $(1+x)^k(1+x)^m=(1+x)^{k+m}$, să se demonstreze că $C_k^l C_m^0 + C_k^{l-1} C_m^1 + \ldots + C_k^0 C_m^l = C_{k+m}^l$, unde $k, m, l \in \mathbb{N}$ și $l \le \min(k, m)$.

## Exerciții și probleme recapitulative

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Să se calculeze:

a) $\frac{10!}{3!\cdot 8!}$; b) $\frac{25!}{6!\cdot 22!}$;

c) $\frac{0!}{(35-34)!}$; d) $\frac{100!}{(98+1)!}$.

**2.** Să se calculeze:

a) $\frac{A_5^3}{P_5}$; b) $C_{10}^8 - C_5^4 \cdot A_3^2$;

c) $P_4 \cdot A_4^3 \cdot C_4^4$; d) $C_5^3 \cdot C_{10}^9 \cdot C_8^1$.

**3.** Cei 24 de elevi ai clasei a XII-a, la serata de absolvire, au făcut schimb de fotografii între ei. Câte fotografii au fost necesare?

**4.** La un turneu de şah au participat 14 şahişti şi fiecare 2 şahişti s-au întâlnit o dată. Câte partide s-au jucat la turneu?

**5.** În câte moduri se pot aşeza 6 elevi pe 20 de locuri care nu sunt numerotate?

**6.** Un tren de pasageri are 12 vagoane. În câte moduri pot fi cuplate vagoanele pentru formarea trenului?

**7.** Cele 4 examene de BAC trebuie să fie programate în 8 zile.
a) În câte moduri se poate face programarea?
b) În câte moduri se poate face programarea dacă ultimul examen de BAC se va susține obligatoriu în ziua a opta?

**8.** În câte moduri pot fi aranjate 8 becuri electrice distinct colorate în 6 dulii?

**9.** În câte moduri pot fi aranjați 10 sportivi la o competiție dacă cel mai înalt trebuie să fie primul, iar cel mai scund – ultimul?

### B

**10.** ***Lucrați în perechi!*** Clasa a XII-a este reprezentată la un concurs de matematică de 12 elevi şi 3 profesori. În câte moduri se pot forma echipe de câte 5 elevi şi:

a) un profesor; b) doi profesori;

c) trei profesori; d) cel puțin un profesor?

**11.** Să se determine câte numere naturale se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, dacă în orice număr format fiecare cifră apare cel mult o dată.

### C

**12.** O urnă conține 6 bile albe şi 8 bile negre. Se extrag concomitent două bile.
Să se determine, aplicând formula $P(A)=\frac{m}{n}$, probabilitatea evenimentului:

$A=\{$se extrag două bile albe$\}$;

$B=\{$se extrag două bile negre$\}$;

$C=\{$se extrag două bile de aceeaşi culoare$\}$.

$P(A)=\frac{m}{n}$

*Profilul real*

## A₁

**1.** Câte elemente trebuie să conțină o mulțime, astfel încât numărul permutărilor elementelor acesteia să fie cuprins între 3000 și 5500?

**2.** Sergiu a invitat la serbarea zilei de naștere 8 colegi de clasă.
a) În câte moduri îi poate așeza la o masă ovală?
b) Generalizați pentru $n$ colegi.

**3.** Să se determine câte numere naturale de zece cifre distincte pot fi formate.

**4.** Din 10 operatori și 5 ingineri ai firmei „Tempus”, se formează o delegație alcătuită din 6 persoane, dintre care cel puțin 2 sunt ingineri. În câte moduri se poate forma această delegație?

**5.** Câte numere naturale se pot forma cu cifrele 0, 2, 4, 6, 8, astfel încât în scrierea fiecărui număr orice cifră să apară cel mult o dată?

**6.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^m \cdot (n-m)!} = 90$; b) $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$;

c) $8C_{n+1}^5 = 3A_n^3$; d) $6(C_{n+1}^1 + C_{n+3}^3) = 13C_{n+2}^2$.

**7.** Să se afle $T_{12}$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3} + 2\right)^{15}$.

**8.** Fie binomul $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Să se afle numărul natural $n$, dacă se cunoaște că $T_4 : T_6 = 4 : 9$.

**9.** Să se afle termenul care nu-l conține pe $x$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2000}$.

**10.** Să se afle termenul de mijloc în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{x} - \sqrt{y}\right)^{14}$.

## B₁

**11.** Să se afle numărul natural $n$, dacă se cunoaște că $P_n \cdot A_{n+3}^3 = 30(n+1)!$.

**12.** Fie binomul $(2a^m + 1)^n$. Să se afle numerele naturale $m$ și $n$, dacă se știe că termenul al cincilea în dezvoltarea la putere a binomului îl conține pe $a^{18}$, iar termenul al optulea îl conține pe $a^9$.

**13.** În câte moduri putem forma echipe cu componența de 3 elevi, 2 profesori și un părinte, dacă sunt 26 de elevi, 5 profesori și 10 părinți?

**14.** Din 14 persoane, dintre care 8 bărbați și 6 femei, se formează o comisie din 5 persoane. În câte moduri se poate forma această comisie dacă în componența ei pot intra cel mult 3 bărbați?

**15.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $C_n^3 + C_n^4 > n(n-2)$; b) $C_{n+8}^{n+3} \le 5A_{n+6}^3$;

c) $C_{10}^{n-1} > 2C_{10}^n$; d) $5C_x^3 > C_{x+2}^4$.

**16.** Fie $(2a + b^2)^n$. Să se determine $n$, dacă:
a) suma coeficinților binomiali este 256;
b) suma coeficienților binomiali de rang impar este 256;
c) coeficientul binomial al lui $a^3$ este egal cu coeficientul binomial al lui $a^9$;
d) coeficientul binomial al termenului al treilea este media aritmetică a coeficienților binomiali ai termenilor al doilea și al patrulea.

**17.** Să se determine termenul din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{21}$ care nu-l conține pe $a$.

**18.** Fie $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}\right)^6$. Să se afle $x$, dacă $T_5 = \dfrac{5}{9}$.

**19.** BAC Determinați termenul care îl conține pe $a^{10}$ în dezvoltarea la putere a binomului $\left(\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{25}$.

**20.** Fie dezvoltarea binomului $(\sqrt{7}-\sqrt[3]{5})^n$. Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării, dacă:
a) $n=5$; b) $n=100$.

**21.** Să se demonstreze că:
a) $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} + A_{n-1}^m$; b) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

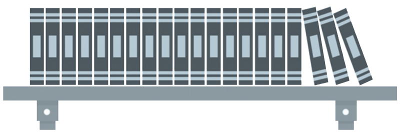
**22.** Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ valoarea numerică a expresiei $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ este un număr întreg.

**23.** Cu cifrele 0, 1, 2, 5, 6, 7 se formează toate numerele naturale posibile a câte șase cifre distincte.
a) Câte astfel de numere se pot obține?
b) Câte numere încep cu cifra 2?
c) Câte numere încep cu cifra 1?
d) Câte numere se termină cu cifra 1?
e) Câte numere încep cu 20?

**24.** Să se afle câte permutări ale elementelor 1, 2, ..., $n$ există, astfel încât elementul 1 să se afle pe primul loc.

**25.** Să se afle valorile întregi ale lui $n$ pentru care este definit numărul $C_{3n-6}^{n^2-5n+10}$.

**26.** Pe o poliță sunt 20 de volume. Să se determine în câte moduri pot fi acestea amplasate pe poliță, astfel încât volumele 1 și 2 să nu fie alături.



**27.** Să se determine câte numere naturale a câte cinci cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 3, 5, 7, 9.

**28.** Să se determine câte combinări există din elementele 1, 2, ..., $n$, luate câte $m$ $(2<m<n)$, în care nu se conțin în același timp elementele 1 și 2.

**29.** Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $A_n^3 = 4C_n^2 - 2n$.

**30.** Dezvoltarea la putere a binomului $\left(a\sqrt{a}-\dfrac{1}{a^{\frac{3}{4}}}\right)^n$ conține 9 termeni. Determinați termenul de mijloc al dezvoltării.

**31.** În clasa a XII-a învață 12 băieți și 18 fete.
a) În câte moduri pot fi formate grupuri de 3 fete și 2 băieți pentru a realiza un proiect?
b) În câte moduri pot fi formate echipe mixte de câte 6 elevi pentru a participa la competiția școlară de volei?

**32.** O întreprindere este formată din 40 de persoane, din care fac parte administratorul și un contabil. Se formează o comisie din care face parte administratorul, contabilul și încă cinci membri. În câte moduri poate fi aleasă această comisie?

## $C_1$

**33.** Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, are loc inegalitatea $C_{2n}^n > \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

**34.** Să se demonstreze că valoarea expresiei $C_{2n+1}^1 \cdot C_{2n+1}^2 \cdot C_{2n+1}^3 \cdot \ldots \cdot C_{2n+1}^{2n}$ este un pătrat perfect.

**35*.** Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x-1}} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+2} = 720; \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{2y}^{3x} - 5A_{2y}^{3x-1} = 0, \\ 12C_{2y}^{3x} - 5C_{2y}^{3x-1} = 0. \end{cases}$

**36.** Să se compună o problemă vizând:
a) aplicații ale binomului lui Newton în fizică;
b) aplicații ale binomului lui Newton în chimie.

**37*.** Să se rezolve în $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sistemul $C_{x+1}^{y+1} = C_{x+1}^y = 2C_{x+1}^{y-1}$.

**38*.** Să se demonstreze că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)! > 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

## Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

***Profilurile umanist, arte, sport***

1. a) Completați caseta cu un număr natural, astfel încât expresia obținută să aibă sens: $A_{\square}^{10}$.

   b) Aflați numărul de aranjamente obținut la a) după completare.

2. Comitetul organizatoric al unei serate matematice a elevilor clasei a XII-a este format din 4 membri. În câte moduri poate fi format acest comitet dacă în clasă sunt 25 de elevi?

3. Sergiu a invitat 12 prieteni la serbarea zilei sale de naştere. Determinați în câte moduri Sergiu poate aranja prietenii la o masă rotundă.

4. Clasa a XII-a este reprezentată la o competiție sportivă de 15 elevi şi 3 antrenori.

   a) Determinați în câte moduri se pot forma echipe de câte 6 elevi.

   b) Aflați în câte moduri se pot forma echipe de câte 5 elevi şi un antrenor.

5. Formulați un exemplu de utilizare a elementelor de combinatorică în viața cotidiană.

***Profilul real***

1. a) Încercuiți litera **A**, dacă propoziție este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

   „Cu cifrele 2, 4, 6, 8, 0 pot fi formate 100 de numere de telefon a câte cinci cifre distincte”. **A** | **F**

   b) Aflați cardinalul booleanului mulțimii $A=\{2, 4, 6, 8, 0\}$.

2. Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $C_{x+1}^{x-1}=x^2-1$.

3. În clasa a XII-a sunt 14 băieți şi 18 fete. În câte moduri se pot forma echipe alcătuite din 3 băieți şi 5 fete?

4. Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuația $7A_{x+1}^{x-1}+14P_{x-1}\le 30P_x$.

5. Termenul de rangul 17 al dezvoltării binomului $\left(\frac{1}{x^2}+5\sqrt{x}\right)^n$ nu-l conține pe $x$. Determinați valoarea lui $n$.

6. Fie $a, b\in\mathbb{N}$ şi $\sqrt{b}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Demonstrați că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, valoarea numerică a expresiei $(a+\sqrt{b})^n+(a-\sqrt{b})^n$ este un număr natural.

## Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$

$n! = (n-1)!n$

$0! = 1$

**Mulțimi finite**

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

**Probleme de combinatorică simple**

**Binomul lui Newton**

$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Mulțimi ordonate**

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

**Aranjamente**

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$,
$0 \le m \le n$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Combinări**

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$,
$0 \le m \le n$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Proprietăți ale coeficienților binomiali**

1° $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2° $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

3° $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$;

4° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

5° a) coeficientul binomial $C_n^k$ este cel mai mare pentru $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$;
b) coeficienții binomiali $C_n^k = C_n^{k+1}$ sunt cei mai mari pentru $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

**Permutări**

$P_n = n!$, $n \in \mathbb{N}^*$

**Proprietăți ale numerelor $C_n^m$, $0 \le m \le n$**

1° $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2° $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

3° $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

**Termenul general al dezvoltării**

$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$,
$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
C_{n-1}^0 & & C_{n-1}^1 & \ldots & C_{n-1}^{n-2} & & C_{n-1}^{n-1} \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & & C_n^n
\end{array}
$$

**Triunghiul lui Pascal**

**Regulile fundamentale ale combinatoricii**

1. Regula multiplicității (înmulțirii): $\text{card}(A \times B) = \text{card}\, A \cdot \text{card}\, B$.
2. Regula adunării: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B$, $A \cap B = \varnothing$.

Aplicații: rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, totalităților, sistemelor de ecuații combinatorii. Aplicații în diverse domenii (fizică, chimie, teoria probabilităților, viața cotidiană etc.).

Aplicații: rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților de ecuații combinatorii; dezvoltări ale binomului la putere.
Aplicații în diverse domenii ale științei și tehnicii.

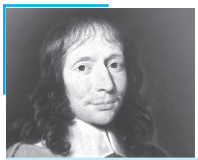
# Modulul 5 Elemente de teoria probabilităților

*Învățând matematica, înveți să gândești!*
Grigore Moisil

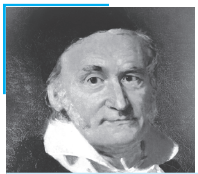
**Obiectivele modulului**

- utilizarea noțiunilor de evenimente elementare şi de evenimente aleatoare asociate unui experiment aleator;
- aplicarea definiției clasice la calculul probabilităților;
- aplicarea formulei de înmulțire a probabilităților la stabilirea independenței evenimentelor aleatoare;
- aplicarea proprietăților probabilității la rezolvarea problemelor;
- determinarea repartiției unor variabile aleatoare discrete simple;
- conceperea teoriei probabilităților ca un mijloc ştiințific de descriere a fenomenelor lumii reale.

# Generalități



Blaise Pascal (1623–1662), matematician, fizician, scriitor şi filozof francez



Carl Friedrich Gauss (1777–1855), matematician, fizician şi astronom german

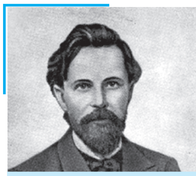
## Scurt istoric

Bazele teoriei probabilităților au fost puse în secolul al XVII-lea de matematicienii B. Pascal şi P. Fermat. De Mere, un cavaler pasionat de jocurile de noroc, i-a propus lui B. Pascal două probleme care nu se încadrau în contextul matematicii acelor timpuri. Rezolvarea acestor probleme şi corespondența lui B. Pascal cu P. Fermat privind soluțiile găsite au stat la originea cercetărilor care au pus bazele teoriei probabilităților. Dintre marii matematicieni care au contribuit la dezvoltarea teoriei probabilităților în secolele XIX–XX îi menționăm îndeosebi pe C.F. Gauss, S.D. Poisson, A.A. Markov, A.N. Kolmogorov, B.V. Gnedenko, E.S. Wentzel.

Astăzi, teoria probabilităților constituie una dintre cele mai importante ramuri ale matematicii contemporane. Obiect de studiu al teoriei probabilităților formează legitățile ce se manifestă în domeniul fenomenelor întâmplătoare.

Pierre Fermat (1601–1665), matematician francez

Siméon Denis Poisson (1781–1840), matematician francez



A.A. Markov (1856–1922), matematician rus

A.N. Kolmogorov (1903–1987), matematician rus

B.V. Gnedenko (1912–1995), matematician rus

E.S. Wentzel (1907–2002), matematiciană rusă

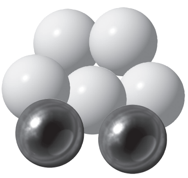
Suntem deja familiarizați cu noțiunea *eveniment*, care semnifică *rezultatul unui experiment sau al unei observații*. Termenul *experiment* se utilizează pentru descrierea oricărei acțiuni care poate fi repetată păstrând condițiile de bază.

**Exemple**

**1** Aruncând în sus o monedă, efectuăm un experiment. Rezultatele posibile – apariția feței cu stema şi apariția feței cu banul – sunt două evenimente.

**2** Încălzirea apei până la temperatura de 100 °C reprezintă un experiment. Rezultatul – fierberea apei – este un eveniment.

**3** Dintr-o urnă ce conține 5 bile albe şi 2 bile negre se extrage la întâmplare o bilă, ceea ce înseamnă un experiment. Extragerea unei bile albe constituie un eveniment, la fel ca şi extragerea unei bile negre. De asemenea, extragerea unei bile de altă culoare decât albă sau neagră este un eveniment.



Observăm că evenimentele pot fi clasate în ***sigure***, ***imposibile*** şi ***aleatoare***. Fierberea apei la temperatura de 100 °C (la presiunea normală – 760 mmHg) este un eveniment sigur. Extragerea unei bile de altă culoare decât cea albă sau neagră este un eveniment imposibil (exemplul **3**), la fel ca şi apariția simultană a stemei şi a banului la aruncarea unei monede.

***Eveniment sigur*** (se notează cu $E$) se numeşte evenimentul care se produce în mod obligatoriu la efectuarea experimentului.

***Eveniment imposibil*** (se notează cu $\varnothing$) se numeşte evenimentul care nu se produce la nicio efectuare a experimentului.

La aruncarea monedei, fața cu stema poate să apară, dar poate şi să nu apară. Aici avem un eveniment aleator. Şi apariția feței cu banul reprezintă un eveniment aleator.

***Eveniment aleator*** se numeşte evenimentul care, în urma efectuării experimentului, se poate produce, dar poate şi să nu se producă.

În exemplul **3**, extragerea unei bile albe şi extragerea unei bile negre sunt două evenimente aleatoare.

# § 1 DEFINIȚIA CLASICĂ A PROBABILITĂȚII

## 1.1. Evenimente egal posibile

**Definiție**

Câteva evenimente aleatoare se numesc **incompatibile** dacă oricare dintre ele nu se pot produce simultan la efectuarea aceluiaşi experiment. În caz contrar, evenimentele se numesc **compatibile**.

**Exemple**

**1** Câştigul, pierderea şi remiza într-o partidă de şah pentru oricare dintre cei doi jucători sunt 3 evenimente incompatibile.

**2** La aruncarea zarului considerăm evenimentele:

$A_i = \{\text{cad } i \text{ puncte}\},\ i = \overline{1, 6};\ B_1 = \{\text{cade un număr impar de puncte}\};$

$B_2 = \{\text{cade un număr par de puncte}\};\ B_3 = \{\text{cad cel mult 3 puncte}\}.$

Sunt incompatibile evenimentele aleatoare: $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$; $B_1, B_2$; $B_3, A_4, A_5, A_6$.

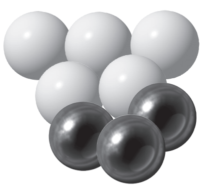
Evenimentele $B_2$, $B_3$ sunt compatibile, deoarece apariția feței cu 2 puncte înseamnă producerea ambelor evenimente. De asemenea, sunt compatibile evenimentele: $B_1, B_3$; $A_1, B_1, B_3$; $A_1, B_1, B_2, B_3$.

Rezultatele unui experiment se consideră ***egal posibile*** (***echiprobabile***) dacă, în baza unor considerente de simetrie, se poate afirma că toate au aceeaşi şansă de a se produce.

**Exemple**

**1** La aruncarea unei monede, dacă aceasta este perfectă, nu există niciun motiv să admitem că una dintre fețe are o şansă de apariție mai mare decât cealaltă. Deci, apariția stemei şi apariția banului sunt două evenimente echiprobabile.

**2** Presupunem că se aruncă un zar perfect cubic şi omogen ca densitate. Şi aici nu există niciun motiv de a considera că o anumită față are o şansă mai mare de a apărea decât alte fețe, adică avem 6 evenimente echiprobabile.



**3** Fie că dintr-o urnă ce conține 5 bile albe şi 3 bile negre se extrage la întâmplare o bilă. Dacă bilele sunt identice ca formă, mărime şi masă, atunci se poate presupune că toate bilele din urnă, indiferent de culoare, au aceeaşi şansă de a fi extrase, adică aici avem 8 evenimente egal posibile.

Noțiunea de evenimente echiprobabile permite să comparăm două evenimente aleatoare din punctul de vedere al şansei de a se produce. Să reluăm exemplul **3** şi să considerăm evenimentul $A$, ca bila extrasă să fie albă, şi evenimentul $B$, ca bila extrasă să fie neagră. Este evident că $A$ este mai posibil decât $B$. Într-adevăr, fiecare dintre cele 8 bile are aceeaşi şansă de a fi extrasă, însă bile albe sunt mai multe decât bile negre. Spunem că evenimentul $A$ are 5 ***rezultate (cazuri) favorabile***, iar evenimentul $B$ are 3 ***rezultate (cazuri) favorabile***.

În experimentul cu aruncarea zarului, evenimentul constând în apariția unei fețe cu cel puțin două puncte este mai posibil decât evenimentul constând în apariția unei fețe cu cel mult trei puncte. Primul are 5 cazuri favorabile, iar al doilea are doar 3.

## 1.2. Definiția clasică a probabilității

Vom defini noțiunea de probabilitate pentru evenimente aleatoare asociate unui experiment *cu număr finit de cazuri incompatibile* și *echiprobabile*.

**Definiție**

Se numește **probabilitate a unui eveniment aleator** $A$ raportul dintre ***numărul*** $m$ ***de rezultate egal posibile favorabile lui*** $A$ și ***numărul total*** $n$ ***de rezultate egal posibile ale experimentului***.

Probabilitatea evenimentului $A$ se notează $P(A)$. Conform definiției,

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}. \qquad (1)$$

Formula (1) reprezintă ***definiția clasică a probabilității***.

Din această definiție deducem ***proprietățile probabilității***:

1° Probabilitatea evenimentului sigur $E$ este 1.

Într-adevăr, deoarece pentru evenimentul sigur $m=n$, rezultă că $P(E)=\frac{n}{n}=1$.

2° Probabilitatea evenimentului imposibil $\varnothing$ este 0.

Deoarece pentru evenimentul imposibil $m=0$, rezultă că $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$.

3° Probabilitatea evenimentului aleator $A$ este un număr cuprins între 0 şi 1.

Într-adevăr, numărul $m$ al cazurilor favorabile evenimentului aleator $A$ satisface inegalitatea dublă $0<m<n$, de unde deducem că $0<\frac{m}{n}<1$. Prin urmare, $0<P(A)<1$.

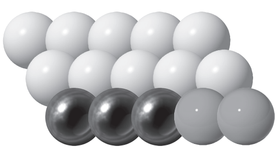
Din aceste proprietăți rezultă că probabilitatea oricărui eveniment $A$ satisface inegalitatea dublă $0\le P(A)\le 1$.

**Probleme rezolvate**

**1** Se aruncă o monedă. Să se calculeze probabilitatea că va cădea fața cu stema (evenimentul $A$).

*Rezolvare*:

Evenimentului $A$ îi este favorabil unul dintre cele două rezultate posibile echiprobabile. Deci, $n=2$, $m=1$ şi $P(A)=\frac{1}{2}$. Fireşte, fața cu banul are de asemenea probabilitatea $\frac{1}{2}$.



**2** O urnă conține 10 bile albe, 3 bile negre şi 2 bile roşii. Se extrage la întâmplare o bilă. Să se afle probabilitatea evenimentului $A$ – ca bila extrasă să fie albă.

*Rezolvare*:

Numărul total de cazuri egal posibile este 15, numărul de cazuri favorabile lui $A$ este 10. Deci, $n=15$, $m=10$ şi $P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

**3** O urnă conține 4 bile albe $a_1, a_2, a_3, a_4$ şi 2 bile negre $n_1, n_2$. Se extrag simultan 2 bile. Să se determine probabilitățile evenimentelor aleatoare:

$A_1=\{$bilele extrase sunt de culori diferite$\}$; $A_2=\{$bilele extrase sunt de aceeaşi culoare$\}$.

*Rezolvare*:

Vom nota simbolic cu $(a_1, a_2)$ extragerea bilelor $a_1$ şi $a_2$, cu $(a_1, a_3)$ extragerea bilelor $a_1$ şi $a_3$ ş.a.m.d.

Atunci, rezultatele posibile (egal posibile) ale experimentului pot fi scrise astfel:

$$\begin{array}{lllll}(a_1, a_2), & (a_1, a_3), & (a_1, a_4), & (a_1, n_1), & (a_1, n_2),\\ (a_2, a_3), & (a_2, a_4), & (a_2, n_1), & (a_2, n_2), & \\ (a_3, a_4), & (a_3, n_1), & (a_3, n_2), & & \\ (a_4, n_1), & (a_4, n_2), & & & \\ (n_1, n_2). & & & & \end{array}$$

Observăm că $n=15$. Deoarece lui $A_1$ îi sunt favorabile 8 rezultate, iar lui $A_2$ îi sunt favorabile 7, conform definiției clasice a probabilității, $P(A_1)=\frac{8}{15}$, $P(A_2)=\frac{7}{15}$.

**Observație**

În cazul unor probleme mai complicate, pentru calculul numerelor $n$ și $m$ sunt necesare metode eficiente de numărare, care să permită determinarea lor fără a enumera rezultatele. Aceste metode sunt descrise în *analiza combinatorică*.

Aplicații largi are ***regula de înmulțire*** (principiul de bază al combinatoricii). Fie că sunt alese două elemente $x_1$ și $x_2$ (bile, numere, cărți, elevi etc.). Dacă pentru alegerea lui $x_1$ există $n_1$ posibilități, iar pentru alegerea lui $x_2$ există $n_2$ posibilități, atunci pot fi formate $n_1 \cdot n_2$ perechi $(x_1, x_2)$. Mai general, dacă se aleg $k$ elemente $x_1, x_2, ..., x_k$, atunci pot fi formate $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ combinații de forma $(x_1, x_2, ..., x_k)$ (unde $n_i$ este numărul modurilor de alegere a lui $x_i$, $i=\overline{1, k}$).

**Probleme rezolvate**

**1** Se ia la întâmplare un număr natural de 5 cifre. Să se determine probabilitatea că acest număr nu conține cifra 9 (evenimentul $A$).

*Rezolvare*:

Rezultatele posibile sunt numerele de 5 cifre. Prima cifră trebuie să fie diferită de zero, prin urmare, există 9 moduri de alegere. Celelalte patru cifre pot fi oricare dintre cele 10 cifre: 0, 1, 2, ..., 9. Deci, fiecare dintre ele are 10 moduri de alegere. Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, adică $9 \cdot 10^4$.

Rezultate favorabile sunt acele numere de cinci cifre care nu conțin cifra 9. Prima cifră a unui astfel de număr este diferită de 0 și 9, iar următoarele patru cifre sunt diferite doar de 9. Conform regulii de înmulțire, numărul cazurilor favorabile este $8 \cdot 9^4$.

Prin urmare, conform definiției clasice, $P(A)=\frac{8 \cdot 9^4}{9 \cdot 10^4}=0{,}5832$.

**2** Dintr-o urnă ce conține $n$ bile numerotate cu $1, 2, 3, ..., n$ se extrage de $k$ ori câte o bilă, fiecare bilă după extragere fiind repusă în urnă. Să se determine probabilitatea că sunt extrase $k$ bile diferite (evenimentul $A$), $k \le n$.

*Rezolvare*:

Rezultatele posibile sunt combinațiile de forma $(x_1, x_2, ..., x_k)$, alcătuite din numerele de pe bilele extrase. $x_1$, sau orice alt $x_i$, poate fi oricare dintre numerele $1, 2, ..., n$, având astfel $n$ posibilități de alegere. Conform regulii de înmulțire, numărul rezultatelor posibile este $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^k$. Dintre acestea, favorabile evenimentului $A$ sunt combinațiile $(x_1, x_2, ..., x_k)$, alcătuite din numere diferite. Numărul acestor combinații poate fi aflat astfel: trebuie să ne imaginăm că extragem $k$ bile fără a le repune după extragere înapoi în urnă. Din nou, în baza regulii de înmulțire, numărul de combinații căutat este $n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$.

Astfel, conform definiției clasice, $P(A)=\frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{n^k}=\frac{A_n^k}{n^k}$.

**Observație**

Această problemă admite numeroase interpretări. De exemplu, fie că într-o clasă învață $k$ elevi. Presupunem că anul are 365 de zile și că ziua de naștere a fiecărui elev poate să cadă în mod echiprobabil în oricare dintre aceste zile. Care este probabilitatea ca zilele de naștere ale elevilor să fie diferite (evenimentul $A$)?

Ne putem imagina o urnă în care se află 365 de bile numerotate 1, 2, 3, ..., 365. Zilele de naștere ale elevilor înseamnă $k$ bile extrase din urnă câte una, cu repunerea bilei extrase în urnă. Astfel, răspunsul rezultă, în mod evident, din problema rezolvată **2**:

$$P(A)=\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-(k-1))}{365^k}.$$

În principiu, oricărui experiment aleator cu o mulțime de evenimente elementare cel mult numărabilă i se poate asocia un model de urne, astfel încât orice eveniment să fie analog cu extrageri de bile. De exemplu, experimentul cu aruncarea unei monede simetrice poate fi înlocuit cu extragerea unei bile dintr-o urnă ce conține două bile marcate cu literele $s$ și $b$ (stema și banul). La fel, aruncarea unui zar poate fi interpretată ca extragerea unei bile dintr-o urnă ce conține 6 bile marcate cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6.

**3** Un juriu din 5 membri este format la întâmplare dintr-un grup de 10 bărbați și 5 femei. Să se determine probabilitatea ca juriul să fie alcătuit din 3 bărbați și 2 femei (evenimentul $A$).

*Rezolvare*:

Orice rezultat posibil înseamnă 5 persoane din cele 15. Prin urmare, există atâtea rezultate posibile, câte submulțimi de 5 elemente putem forma cu 15 elemente. Numărul acestor submulțimi este $C_{15}^5$. Dintre ele, favorabile sunt cele alcătuite din 3 bărbați și 2 femei. Pentru alegerea a 3 bărbați din 10 există $C_{10}^3$ posibilități, iar pentru alegerea a 2 femei din 5 există $C_5^2$ posibilități. Conform regulii de înmulțire, un juriu compus din 3 bărbați și 2 femei poate fi ales în $C_{10}^3\cdot C_5^2$ moduri. Astfel,

$$P(A)=\frac{C_{10}^3\cdot C_5^2}{C_{15}^5}=\frac{400}{1001}\approx 0{,}40.$$

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

**4** De sărbători, Moș Crăciun a pregătit pentru 4 copii câte un cadou. Încurcând cadourile, ele au fost înmânate copiilor la întâmplare. Care este probabilitatea că fiecare copil va primi cadoul său?

*Rezolvare*:

Fie $A, B, C, D$ inițialele numelor copiilor, iar $a, b, c, d$ cadourile pregătite de Moș Crăciun pentru $A, B, C, D$, respectiv. Aplicăm definiția clasică: $P=\frac{m}{n}$.

Orice caz posibil înseamnă o variantă posibilă de înmânare a celor 4 cadouri și poate fi descris printr-o permutare a literelor $a$, $b$, $c$, $d$. De exemplu, permutarea *bacd* înseamnă că $A$ a primit cadoul pregătit pentru $B$, $B$ a primit cadoul pregătit pentru $A$, iar $C$ și $D$ au primit cadourile lor. Numărul cazurilor posibile este numărul permutărilor literelor $a, b, c, d$, adică $4!$. Deci, $n=24$.

Este evident că există un singur caz favorabil și el este dat de permutarea *abcd*: $m=1$. Astfel, probabilitatea cerută este:

$$P=\frac{m}{n}=\frac{1}{24}.$$

## Probleme propuse

### *Profilurile umanist, arte, sport*

### A

1. Din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 100\}$ se extrage la întâmplare un număr. Sunt incompatibile oare evenimentele: $\{$numărul extras este divizibil cu $10\}$, $\{$numărul extras este divizibil cu $11\}$?

2. O persoană încearcă să formeze, din memorie, un număr de telefon, dar a uitat ultimele două cifre, însă ține minte că una dintre ele este 2, iar alta este impară. Să se determine probabilitatea că va fi format numărul corect.

### B

3. Într-o urnă sunt câteva bile albe și câteva bile negre, în total 25 de bile. Se extrage la întâmplare o bilă. Probabilitatea ca această bilă să fie albă este egală cu $p$, iar ca această bilă să fie neagră probabilitatea este egală cu $4p$. Să se determine numărul bilelor de fiecare culoare în urnă.

4. Pe 10 fișe sunt scrise numerele întregi de la 1 la 10. La întâmplare, se extrag două fișe. Să se determine probabilitatea că suma numerelor de pe aceste două fișe este egală cu 11.

5. Se aruncă un zar de 4 ori. Să se determine probabilitatea ca la prima și la ultima aruncare să cadă un număr par de puncte.

### C

6. ***Lucrați în perechi!*** Dintr-o urnă ce conține 3 bile albe și 5 bile negre se extrag concomitent 3 bile. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A = \{$sunt extrase 3 bile albe$\}$;
b) $B = \{$sunt extrase 3 bile de aceeași culoare$\}$;
c) $C = \{$sunt extrase 2 bile albe și o bilă neagră$\}$;
d) $D = \{$sunt extrase bile de culori diferite$\}$.

7. Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ se scot, unul câte unul, toate numerele. Să se determine probabilitatea evenimentului:
a) $A = \{$numerele sunt scoase în ordinea $1, 2, 3, 4\}$;
b) $B = \{$primul număr scos este $1\}$;
c) $C = \{$primul număr scos este 1, iar al doilea număr scos este $2\}$.

8. Se ia la întâmplare un număr întreg, care aparține intervalului $[-3, 6]$. Să se determine probabilitatea că acest număr este soluție a inecuației $|3x-2| \geq 6$ în $\mathbb{Z}$.

### *Profilul real*

### $A_1$

1. Dintr-o urnă ce conține 3 bile albe și o bilă neagră se extrage de 3 ori câte o bilă, fără repunerea în urnă a bilei extrase. Considerăm evenimentele: $A_i = \{$la extragerea $i$ apare o bilă albă$\}$,
$B_i = \{$la extragerea $i$ apare o bilă neagră$\}$, $i = \overline{1, 3}$.
Care dintre perechile de evenimente sunt incompatibile: $A_1$ și $A_2$; $B_1$ și $B_2$; $B_2$ și $B_3$; $A_1$ și $B_1$; $A_1$ și $B_2$?

2. ***Lucrați în perechi!*** Din mulțimea de numere $\{1, 2, \ldots, 20\}$ se ia la întâmplare un număr $k$. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator: a) $A = \{k > 10\}$; b) $B = \{5 < k \leq 13\}$; c) $C = \{k^2 > 20\}$.

### $B_1$

3. Să se determine probabilitatea că în luna decembrie a unui an, luat la întâmplare, sunt cinci duminici.

4. La o loterie sunt 96 de bilete, dintre care 8 câștigătoare. O persoană cumpără 12 bilete. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator: a) $A = \{$exact 2 bilete din cele cumpărate sunt câștigătoare$\}$;
b) $B = \{$cel puțin 3 bilete din cele cumpărate sunt câștigătoare$\}$.

5. 6 fișe pe care sunt scrise literele *A*, *A*, *A*, *N*, *N*, *S* se așază la întâmplare în șir. Care este probabilitatea că se obține cuvântul *ANANAS*?

### $C_1$

6. Dintr-un pachet de 36 de cărți de joc se extrage la întâmplare o carte. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A_1 = \{$este scos un as$\}$;
b) $A_2 = \{$este scoasă o treflă sau dama de pică$\}$;
c) $A_3 = \{$este scoasă o pică sau un rege$\}$.
(Amintim că un pachet de cărți de joc conține 4 tipuri de cărți (caro, treflă, cupă, pică), cu același număr de cărți de fiecare tip.)

7. ***Investigați!*** Care este probabilitatea ca pătratul unui număr întreg nenul să se termine cu cifra 1? Încercați să mai formulați o problemă de acest tip.

# § 2 EVENIMENTE ALEATOARE. FORMULE PENTRU CALCULUL UNOR PROBABILITĂȚI

## 2.1. Mulțimea de evenimente elementare a unui experiment

În acest paragraf noțiunile *eveniment aleator* şi *probabilitate* ca noțiuni matematice vor fi „formalizate" sau precizate. Totodată, vor fi considerate şi experimente cu un număr finit de rezultate nu neapărat echiprobabile. În acest scop, în mulțimea de evenimente aleatoare asociate unui experiment vom distinge evenimentele *elementare*, din care sunt alcătuite celelalte evenimente aleatoare.

**Definiție**

**Mulțime de evenimente elementare a experimentului** se numeşte orice mulțime de rezultate posibile $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ale experimentului, care verifică condițiile:

1) la efectuarea experimentului se poate produce unul şi numai unul din rezultatele $e_1, e_2, ..., e_n$;
2) după rezultatul $e_i$ al experimentului şi orice alt rezultat (neelementar), legat de acest experiment, se poate stabili dacă acesta s-a produs sau nu.

**Exemple**

**1** Se aruncă o monedă. În calitate de evenimente elementare pot fi considerate evenimentele: $s$ („apare stema") şi $b$ („apare banul"). Deci, $E = \{s, b\}$.

**2** Se aruncă o monedă de două ori. Mulțimea de evenimente elementare a acestui experiment poate fi luată astfel: $E = \{ss, sb, bs, bb\}$, unde, de exemplu, $bs$ înseamnă că la prima aruncare cade banul, iar la a doua – stema.

**3** Se aruncă un zar de două ori. În calitate de evenimente elementare pot fi considerate perechile de numere $ij$, unde $i, j = \overline{1, 6}$. Prin urmare, $E$ este mulțimea:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 |

Pentru acest experiment se poate construi şi o altă mulțime de evenimente elementare. De exemplu, $E' = \{e_1, e_2, ..., e_{11}\}$, unde $e_i = \{$cade suma de $i+1$ puncte$\}$, $i = \overline{1, 11}$. Cum vom alege mulțimea $E$ depinde de problema care urmează a fi rezolvată.

## 2.2. Evenimente aleatoare

Experimentului cu aruncarea unui zar îi corespund nu numai evenimentele elementare $e_i = \{$apar $i$ puncte$\}$, $i = \overline{1, 6}$, ci şi alte evenimente (neelementare), de pildă:

$A = \{$apare număr par de puncte$\}$ sau

$B = \{$apar cel puțin 2 puncte, dar nu mai mult de 5$\}$.

Atât $A$, cât şi $B$ se produc cu unele dintre evenimentele elementare şi nu se produc cu altele. Astfel, lor le corespunde câte o submulțime a mulțimii de evenimente elementare $E = \{e_1, e_2, ..., e_6\}$. De exemplu, pentru $A$ aceasta este submulțimea $\{e_2, e_4, e_6\}$, iar pentru $B$ – submulțimea $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

**Definiție**

Orice submulțime $A \subseteq E$ a mulțimii de evenimente elementare $E$ a experimentului se numește **eveniment aleator**.

Conform definiției, $E$ și $\varnothing$ sunt evenimente aleatoare. Va fi comod să păstrăm pentru ele denumirile respective de ***eveniment sigur*** și ***eveniment imposibil***.

Despre evenimentele elementare din care constă $A$ vom spune că ele sunt ***favorabile evenimentului aleator A***.

De reținut că dacă experimentul se încheie cu un eveniment elementar din $A$, atunci spunem că ***s-a produs*** sau ***s-a realizat*** evenimentul aleator $A$.

**Exemplu**

Considerăm din nou experimentul cu aruncarea monedei de două ori (sau, echivalent, cu aruncarea a două monede).

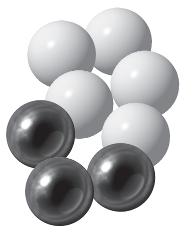
Am văzut deja că $E = \{ss, sb, bs, bb\}$. Mulțimile $A = \{ss, sb, bs\}$, $B = \{ss, bb\}$ și $C = \{sb, bs\}$, fiind submulțimi ale lui $E$, reprezintă evenimente aleatoare. $A$ constă în apariția a cel puțin unei steme, $B$ – în apariția aceleiași fețe de două ori, $C$ – în apariția a două fețe diferite.

**Observație**

Evenimentul aleator poate fi descris nu numai ca o submulțime a lui $E$, dar și „prin cuvinte”.

**Problemă rezolvată**

Dintr-o urnă ce conține 5 bile albe și 3 bile negre se extrage la întâmplare o bilă. Să se construiască o mulțime de evenimente elementare $E$ și să se descrie ca submulțimi evenimentele $A$ = {bila extrasă este albă}, $B$ = {bila extrasă este neagră}.



*Rezolvare*:

Se observă că există 8 rezultate posibile, fiecare constând în extragerea uneia dintre cele 8 bile. Pentru a simplifica raționamentele, numerotăm bilele albe cu 1, 2, 3, 4, 5, iar pe cele negre – cu 6, 7, 8. Atunci, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, unde $e_i$ înseamnă extragerea bilei cu numărul $i$.

Obținem $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ și $B = \{e_6, e_7, e_8\}$.

## 2.3. Operații cu evenimente aleatoare

**Definiții**

- Se numește **reuniune** a două evenimente $A$ și $B$ evenimentul, notat $A \cup B$, care constă în *realizarea a cel puțin unuia* dintre cele două evenimente.
- Se numește **intersecție** a două evenimente $A$ și $B$ evenimentul, notat $A \cap B$, care constă în *realizarea atât a evenimentului A, cât și a evenimentului B*.

În mod similar aceste operații se definesc pentru orice număr finit de evenimente. De exemplu, $A \cup B \cup C$ constă în realizarea a cel puțin unuia dintre evenimentele $A$, $B$, $C$.

**Definiții**

- Evenimentele $A$ și $B$ se numesc **incompatibile** dacă $A \cap B = \varnothing$.
- **Eveniment contrar** evenimentului $A$ se numește evenimentul, notat $\overline{A}$, care constă în nerealizarea lui $A$.
- **Diferență a evenimentelor *A* și *B*** se numește evenimentul, notat $A \setminus B$, care constă în realizarea lui $A$ și nerealizarea lui $B$.
- Se spune că **evenimentul *A* implică evenimentul *B*** (se notează $A \subseteq B$) dacă atunci când se produce $A$ se produce în mod necesar și $B$.

**Probleme rezolvate**

**1** Din mulțimea de numere $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se extrag la întâmplare concomitent două numere. Considerăm evenimentele aleatoare:

$A = \{$este extras exact un număr par$\}$,

$B = \{$sunt extrase două numere pare$\}$,

$C = \{$este extras cel puțin un număr par$\}$,

$D = \{$sunt extrase numere de aceeaşi paritate$\}$.

a) Ce înseamnă evenimentele: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{C}$?

b) Ce relație are loc între evenimentele $B$ şi $D$?

*Rezolvare*:

a) $A \cup B = \{$este extras cel puțin un număr par$\}$, deci $A \cup B = C$;

$A \cap B$ este eveniment imposibil, deci $A \cap B = \varnothing$;

$\overline{A} = \{$sunt extrase două numere pare sau nu este extras niciun număr par$\}$, deci $\overline{A} = D$;

$\overline{C} = \{$nu este extras niciun număr par$\}$.

b) $B \subseteq D$.

**2** Dintr-o urnă ce conține 5 bile albe şi 3 bile negre se extrage câte o bilă fără repunerea bilei înapoi până este scoasă o bilă albă. Considerăm evenimentele $A_i = \{$la extragerea $i$ este scoasă o bilă albă$\}$, $i \geq 1$. Să se scrie prin aceste evenimente, cu ajutorul operațiilor, evenimentele:

a) $B = \{$se efectuează două extrageri$\}$;

b) $C = \{$se efectuează cel mult două extrageri$\}$;

c) $D = \{$se efectuează cel mult trei extrageri$\}$.

*Rezolvare*:

Ținând cont de definițiile operațiilor, obținem:

a) $B = \overline{A_1} \cap A_2$; b) $C = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$; c) $D = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$.

## 2.4. Formule pentru calculul unor probabilități

**1.** Dacă $A$ şi $B$ sunt evenimente incompatibile, atunci $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.

*Demonstrație*:

Fie că mulțimea rezultatelor experimentului constă din $n$ rezultate echiprobabile. Presupunem că dintre acestea evenimentului $A$ îi sunt favorabile $m_A$ rezultate, iar evenimentului $B$ – $m_B$ rezultate. Deci, $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$. Cum $A$ şi $B$ sunt incompatibile, rezultă că nu există niciun rezultat care să fie favorabil concomitent şi lui $A$, şi lui $B$. Prin urmare, evenimentului $A \cup B$ îi sunt favorabile $m_A + m_B$ rezultate şi, deci:

$$P(A \cup B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Această formulă poate fi extinsă: dacă oricare două dintre evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sunt incompatibile, atunci $\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)}$.

**2.** Dacă $A$ şi $B$ sunt evenimente oarecare, atunci $\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$.

*Demonstrație*:

Vom folosi notațiile $n$, $m_A$, $m_B$ de la formula precedentă. Dacă evenimentele $A$ şi $B$ sunt compatibile, atunci există un număr oarecare $s\neq 0$ de rezultate favorabile concomitent şi lui $A$, şi lui $B$. În consecință, numărul rezultatelor favorabile reuniunii $A\cup B$ este $m_A+m_B-s$, şi nu $m_A+m_B$, deoarece în acest caz $s$ rezultate ar fi numărate de 2 ori (o dată pentru $A$ şi o dată pentru $B$). Astfel, avem $P(A)=\frac{m_A}{n}$, $P(B)=\frac{m_B}{n}$, $P(A\cap B)=\frac{s}{n}$.

Prin urmare, $P(A\cup B)=\frac{m_A+m_B-s}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{s}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

**3.** $\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})}$.

*Demonstrație*:

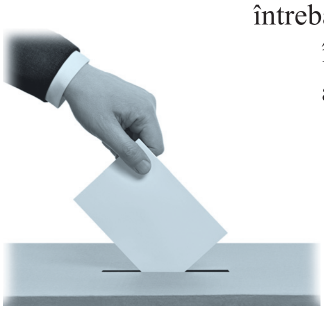
Observăm că $A\cup\overline{A}=E$ şi $A\cap\overline{A}=\varnothing$. Evident, $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$ şi, deci, $P(A)=1-P(\overline{A})$.

**4.** Dacă $A\subseteq B$, atunci $\boxed{P(A)\leq P(B)}$.

**5.** Dacă $A\subseteq B$, atunci $\boxed{P(B\setminus A)=P(B)-P(A)}$.

**Exercițiu.** Demonstrați formulele **4**, **5**.

**Probleme rezolvate**



**1** La un referendum au fost propuse două întrebări, fiecare cu două variante de răspuns: „da” şi „nu”. La prima întrebare 65% dintre participanți au răspuns „da”, la a doua întrebare 51% au răspuns „da”, iar 45% din participanți au răspuns „da” la ambele întrebări. Care este probabilitatea că un participant la referendum, luat la întâmplare, a răspuns „da” la cel puțin una dintre întrebări (evenimentul $A$)?

*Rezolvare*:

Considerăm evenimentele:

$A_1=\{$participantul luat la întâmplare a răspuns „da” la prima întrebare$\}$;

$A_2=\{$participantul luat la întâmplare a răspuns „da” la a doua întrebare$\}$.

Este evident că $A=A_1\cup A_2$. Deci, trebuie să calculăm $P(A_1\cup A_2)$.

Aplicăm formula $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$.

Din condiția problemei, $P(A_1)=0{,}65$, $P(A_2)=0{,}51$, $P(A_1\cap A_2)=0{,}45$.

Prin urmare, $P(A)=0{,}65+0{,}51-0{,}45=0{,}71$.

$\boxed{P(A)=1-P(\overline{A})}$

**2** Cantina unei şcoli are 20 de mese. Pe parcursul unei săptămâni un elev ia masa la cantina şcolii de 5 ori. Care este probabilitatea că cel puțin de 2 ori el stă la aceeaşi masă (evenimentul $A$)?

*Rezolvare*:

În cazul dat e mult mai simplu să calculăm probabilitatea evenimentului contrar $\overline{A}=\{$elevul mănâncă 5 zile la 5 mese diferite$\}$. Pentru a determina $P(\overline{A})$, ne putem imagina o urnă cu 20 de bile din care se scoate de 5 ori câte o bilă. Cazurile favorabile lui $\overline{A}$ se obțin dacă bilele extrase nu sunt repuse în urnă, iar numărul total de cazuri – dacă fiecare bilă extrasă este întoarsă în urnă.

Astfel, $P(\overline{A})=\frac{m}{n}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{20^5}=0{,}5814$, deci $P(A)=0{,}4186$.

**3** Se consideră evenimentele aleatoare $A, B$ şi $P(A)=0,5$, $P(B)=0,4$, $P(A\cap B)=0,2$. Să se determine probabilitatea evenimentului:

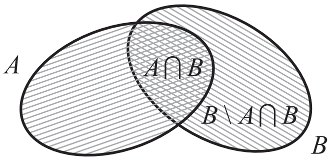
a) $A\cup B$; b) $\overline{A}$; c) $\overline{B}$; d) $\overline{A}\cap B$.

*Rezolvare*:

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,5+0,4-0,2=0,7.$

b) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0,5=0,5.$

c) $P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,4=0,6.$




d) Pentru a calcula $P(\overline{A}\cap B)$, vom observa că $\overline{A}\cap B=B\setminus A\cap B$ (se verifică cu uşurinţă).

Prin urmare, $P(\overline{A}\cap B)=P(B\setminus A\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0,4-0,2=0,2.$

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** *Lucraţi în perechi!* Pentru fiecare dintre experimentele aleatoare să se indice o mulţime de evenimente elementare:

a) se aruncă o monedă de 5 ori;

b) se aruncă o monedă, după care se aruncă un zar;

c) se ia la întâmplare o soluţie în mulţimea $\mathbb{Z}$ a inecuaţiei $|x-3|\le 7$.

**2.** Se aruncă o monedă şi un zar. Să se determine probabilitatea că moneda cade cu stema, iar zarul – cu număr par de puncte.


**3.** Ce sumă de puncte este mai probabilă la aruncarea a două zaruri – suma de 7 puncte sau de 8 puncte?

### B

**4.** Petru are în buzunarul stâng două monede a câte 5 lei şi trei monede a câte 10 lei. El ia la întâmplare trei monede şi le pune în buzunarul drept. Se consideră evenimentele aleatoare: $A=\{$monedele de 5 lei se află acum în buzunarul stâng$\}$; $B=\{$monedele de 5 lei se află acum în buzunarul drept$\}$. Să se determine probabilitatea $P(A\cup B)$.

**5.** 22% dintre elevii clasei a XII-a nu au reuşit la testul de matematică, 18% nu au reuşit la testul de fizică şi 9% nu au reuşit la niciun test. Care este probabilitatea că un elev din clasă, luat la întâmplare, nu a reuşit la cel puţin unul dintre teste?

**6.** Din mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ se extrage la întâmplare un număr. Să se determine probabilitatea că restul de la împărţirea lui la 8 este egal cu 2.

### C

**7.** O monedă a fost aruncată de 3 ori. Fie evenimentele $A_i=\{$la aruncarea $i$ apare stema$\}$, $i=\overline{1,3}$.
Cu ajutorul operaţiilor cunoscute, să se exprime prin $A_1, A_2$ şi $A_3$ evenimentele:
$B=\{$au apărut exact două steme$\}$;
$C=\{$au apărut cel puţin două steme$\}$;
$D=\{$au apărut cel mult două steme$\}$.

**8.** Se aruncă două zaruri. Să considerăm evenimentele aleatoare: $A=\{$primul zar cade cu număr par de puncte$\}$; $B=\{$al doilea zar cade cu cel mult 4 puncte$\}$. Să se determine probabilităţile: $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P(A\cap\overline{B})$.

***Profilul real***

## A₁

**1.** Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ se extrage de două ori câte un număr, primul număr extras fiind repus în mulțime. Pentru experimentul dat să se indice o mulțime de evenimente elementare $E$ şi să se descrie ca submulțimi ale lui $E$ evenimentele aleatoare: $A=$ {numărul minim extras este 3}; $B=$ {numărul maxim extras este 3}; $C=$ {este extras cel puțin un număr par}.

**2.** ***Lucrați în perechi!*** Se consideră evenimentele aleatoare $A, B \subset E$ cu $P(A)=0{,}4$, $P(B)=0{,}3$, $P(A \cap B)=0{,}2$. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:

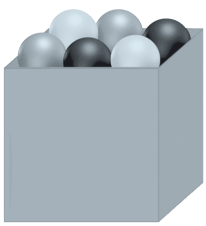
a) $A \cup B$; b) $\overline{A}$; c) $\overline{B}$;
d) $\overline{A} \cap B$; e) $A \cup \overline{B}$; f) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

## B₁

**3.** Probabilitatea că în ziua de luni într-o clasă lipsesc de la ore mai puțin de 6 elevi este egală cu 0,95; probabilitatea că lipsesc mai puțin de 3 elevi este egală cu 0,62. Să se determine probabilitatea că în ziua de luni lipsesc 3–5 elevi.

**4.** Dintr-o urnă ce conține 5 bile albe, 2 bile negre, 4 bile roşii şi o bilă verde se extrag la întâmplare, concomitent, 4 bile. Să se determine probabilitatea că sunt scoase bile de cel puțin 2 culori.

**5.** BAC O urnă conține $x$ bile negre $(x \geq 2)$, 5 albe şi 2 bile de culoare violetă. Toate bilele sunt identice ca mărime. La întâmplare din urnă se extrag simultan 2 bile. Fie $P(x)$ probabilitatea că ambele bile extrase vor fi de aceeaşi culoare. Demonstrați că $P(x)=\dfrac{x^2-x+22}{(x+7)\cdot(x+6)}$.



**6.** BAC Pentru participare la un sondaj, dintr-o clasă de 25 de elevi se iau la întâmplare 2 elevi. Probabilitatea că la sondaj vor participa 2 fete este egală cu $\dfrac{11}{50}$. Determinați numărul de fete din clasă.

**7.** BAC Cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6 se formează un număr de 5 cifre care nu se repetă. Determinați probabilitatea că ultimele 2 cifre ale numărului format sunt impare.


## C₁

**8.** ***Lucrați în perechi!*** Să considerăm în mulțimea $\mathbb{Z}$ inecuațiile $|x-3| \leq 4$, $|5-2x| \leq 1$, $|3x+2| \geq 5$. Să se determine probabilitatea că o soluție a primei inecuații, luată la întâmplare, este soluție cel puțin a uneia dintre celelalte două inecuații.

**9.** ***Investigați!*** Sofia şi Maria s-au născut în prima săptămână a aceluiaşi an. Să se determine probabilitatea că Sofia este mai mare decât Maria cu cel puțin o zi. Sunt posibile cel puțin două metode de rezolvare a acestei probleme. Care sunt acestea? Generalizați problema.

**10.** ***Investigați!*** Zarul este aruncat până la apariția feței cu 6 puncte.
Să se determine probabilitatea că:
a) zarul este aruncat de cel mult 3 ori;
b) mai devreme sau mai târziu, vor cădea 6 puncte.

# § 3 EVENIMENTE ALEATOARE INDEPENDENTE

În viața cotidiană, frecvent, se vorbește de evenimente independente. Totodată, deseori se ajunge la contradicții: unii consideră anumite evenimente independente, alții – dependente. În teoria probabilităților se evită această situație, adoptându-se următoarea definiție a independenței evenimentelor aleatoare.

**Definiție**

Evenimentele aleatoare $A$ și $B$ se numesc **independente** dacă
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

**Problemă rezolvată**

Se aruncă un zar și se consideră evenimentele:
$A=\{$apar cel mult 3 puncte$\}$, $B=\{$apar 3 sau 6 puncte$\}$.
Sunt oare independente aceste evenimente?

*Rezolvare*:

Întâi calculăm $P(A)$, $P(B)$ și $P(A\cap B)$:

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad P(A\cap B)=\frac{1}{6}.$$

Deoarece $P(A\cap B)=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, conform definiției, evenimentele $A$ și $B$ sunt independente.

**Observație**

Evenimentele $A$ și $B$, care se referă la experimente ce nu au nicio legătură între ele, fără îndoială, sunt independente. În consecință, probabilitatea producerii lor concomitente este $P(A)\cdot P(B)$.

**Problemă rezolvată**

Fie două urne: prima conține 3 bile albe și 2 bile negre, iar a doua conține 4 bile albe și 3 bile negre. Din prima urnă se extrag la întâmplare, concomitent, 2 bile, iar din a doua urnă se extrage o bilă. Să se determine probabilitatea ca toate cele 3 bile extrase să fie albe.

*Rezolvare*:

Notăm evenimentele aleatoare:
$A=\{$bilele extrase din prima urnă sunt albe$\}$, $B=\{$bila extrasă din urna a doua este albă$\}$.

Evenimentul ca cele 3 bile extrase să fie toate albe reprezintă intersecția $A\cap B$. Este evident că $P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{4}{7}$.

Evenimentele $A$ și $B$ sunt independente, deoarece se referă la diferite experimente.

Deci, probabilitatea ca cele 3 bile extrase să fie albe este $\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{70}=\frac{6}{35}$.

**Definiție**

Evenimentele $A, B, C, \ldots$ se numesc **independente (în totalitate)** dacă probabilitatea intersecției oricăror dintre ele este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate.

De exemplu, evenimentele $A$, $B$ și $C$ sunt independente dacă au loc egalitățile:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B),\quad P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C),\quad P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C),$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

# Probleme propuse

*Profilurile umanist, arte, sport*

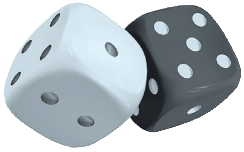
## A

**1.** O monedă se aruncă de două ori. Să se arate că evenimentele aleatoare $A = \{$la prima aruncare cade stema$\}$ şi $B = \{$la a doua aruncare cade banul$\}$ sunt independente.

**2.** Doi trăgători trag câte un foc simultan şi în mod independent la o țintă. Probabilitățile de a nimeri ținta sunt: 0,8 pentru primul trăgător şi 0,75 pentru al doilea trăgător. Să se determine probabilitatea ca ținta să fie atinsă de cel puțin un trăgător.

## B

**3.** ***Lucrați în grup!*** Se aruncă două zaruri. Considerăm evenimentele:
$A = \{$pe primul zar apar cel mult 5 puncte$\}$;
$B = \{$pe al doilea zar apar cel mult 2 puncte$\}$;
$C = \{$suma punctelor ce apar pe zaruri este mai mare decât 4$\}$.
Care din perechile de evenimente $A$ şi $B$, $A$ şi $C$, $B$ şi $C$ sunt independente?



## C

**4.** Se aruncă zarul o dată. Considerăm evenimentele: $A = \{$cad cel puțin 4 puncte$\}$, $B = \{$cad 3 sau 4 puncte$\}$. Să se arate că $A$ şi $B$ sunt evenimente independente.

**5.** Dintr-un pachet de 36 de cărți de joc se extrage la întâmplare o carte. Evenimentul $A$ constă în faptul că este extrasă o „pică", iar evenimentul $B$ – că este extrasă o „damă". Sunt oare independente aceste evenimente?

*Profilul real*

## $A_1$

**1.** Este aruncată o monedă şi un zar. Să se arate că evenimentele aleatoare $A = \{$moneda cade cu stema$\}$ şi $B = \{$zarul cade cu număr par de puncte$\}$ sunt independente.

**2.** Se aruncă două zaruri repetat până se obține suma de 5 puncte.
Să se determine probabilitatea că:
a) zarurile sunt aruncate de două ori;
b) zarurile sunt aruncate cel mult de două ori.

## $B_1$

**3.** La un depozit se verifică calitatea produselor. Probabilitatea ca un produs să fie defectuos este 0,1. Să se determine probabilitatea că:
a) din 3 produse unul este defectuos;
b) din 3 produse cel mult unul este defectuos.

**4.** Pe segmentul $[-5, 27]$ se ia la întâmplare un număr întreg. Sunt oare independente evenimentele aleatoare:
$A = \{$numărul luat este soluție în $\mathbb{Z}$ a inecuației $|x-3| \le 4\}$; $B = \{$numărul luat este soluție în $\mathbb{Z}$ a inecuației $|x+3| \le 5\}$?

## $C_1$

**5.** Într-un centru comercial sunt instalate două aparate identice de cafea. Probabilitatea ca spre sfârşitul zilei cafeaua să se termine într-un aparat este egală cu 0,3; probabilitatea ca în ambele aparate cafeaua să se termine este egală cu 0,12. Să se determine probabilitatea că spre sfârşitul zilei va mai fi cafea în ambele aparate.

**6.** ***Investigați!*** Doi jucători, $A$ şi $B$, aruncă pe rând o monedă de mai multe ori. Câştigător este considerat acela care primul obține stema. Prima aruncare o face jucătorul $A$, a doua – $B$, a treia – $A$ ş.a.m.d. până atunci când unul dintre ei obține stema.
a) Să se determine probabilitatea ca $A$ să câştige până la a şasea aruncare.
b) Să se determine pentru fiecare jucător probabilitatea de a fi câştigător într-un joc de durată nelimitată (adică dus până la câştigul unuia dintre jucători).

# § 4 VARIABILE ALEATOARE DISCRETE

## 4.1. Noțiunea de variabilă aleatoare discretă

În viața cotidiană sunt situații când o mărime poate lua diferite valori sub influența unor factori aleatori. De exemplu, este imposibil să ştim anticipat câte apeluri vor sosi la o centrală telefonică într-un interval anumit de timp sau câte accidente rutiere se vor produce mâine în Chişinău. De asemenea, nu putem prezice numărul nou-născuților de sex masculin dintr-o sută de nou-născuți la o anumită maternitate.

Atare mărimi, ca numărul apelurilor telefonice, numărul accidentelor rutiere etc., sunt variabile care depind de diverse circumstanțe întâmplătoare sau, în terminologia teoriei probabilităților, de rezultatele unor experimente.

**Definiție**

Se numeşte **variabilă aleatoare (discretă)** orice funcție reală definită pe mulțimea evenimentelor elementare a unui experiment oarecare.

Vom considera numai *variabile aleatoare cu un număr finit de valori posibile*.

**Definiție**

Valorile posibile $x_1, x_2, ..., x_n$ ale variabilei aleatoare $\xi$ şi probabilitățile $p_1 = P(\xi = x_1)$, $p_2 = P(\xi = x_2), ..., p_n = P(\xi = x_n)$ constituie **repartiția variabilei aleatoare** $\xi$.

Repartiția variabilei aleatoare $\xi$ se scrie sub forma unui tabel cu două linii: prima linie conține valorile posibile ale lui $\xi$, iar a doua – probabilitățile corespunzătoare acestor valori.

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

Se poate demonstra că $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

**Probleme rezolvate**

**1** Dintr-o urnă cu 4 bile albe şi 2 bile negre se extrag la întâmplare concomitent 2 bile. Să se scrie repartiția variabilei aleatoare $\xi$, ce reprezintă numărul de bile albe extrase.

*Rezolvare*:

Valorile posibile ale variabilei aleatoare $\xi$ sunt 0, 1, 2. Calculăm probabilitățile corespunzătoare acestor valori. La extragerea concomitentă a 2 bile, evenimente elementare sunt perechile (neordonate) de bile, numărul lor fiind $C_6^2 = 15$.

$$P(\xi = 0) = P\,(\text{sunt extrase două bile negre}) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15};$$

$$P(\xi = 1) = P\,(\text{este extrasă o bilă albă şi una neagră}) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15};$$

$$P(\xi = 2) = P\,(\text{sunt extrase două bile albe}) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}.$$

Astfel, obținem repartiția variabilei aleatoare $\xi$:

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{6}{15}$ |

**2** Din mulțimea $\{1, 2, 3\}$ se extrage la întâmplare de 2 ori câte un număr, cu întoarcerea primului număr în mulțime. Fie $\xi$ numărul maxim extras. Să se determine repartiția lui $\xi$.

*Rezolvare*:

Evenimente elementare sunt perechile ordonate: $E = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$.

De aici deducem: $P(\xi=1)=\frac{1}{9}$, $P(\xi=2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $P(\xi=3)=\frac{5}{9}$.

Astfel, $\xi$ are repartiția:

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{9}$ |

**Observație** În unele cazuri, repartiția poate fi determinată fără a fi nevoie să scriem mulțimea $E$.

## 4.2. Valoarea medie a variabilei aleatoare discrete

**Definiție**

**Valoare medie** a variabilei aleatoare $\xi$ cu repartiția

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

se numeşte numărul $M(\xi)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n$.

Valoarea medie a variabilei aleatoare frecvent se utilizează în viața de zi cu zi. De exemplu, temperatura medie, salariul mediu, nota medie etc.

**Probleme rezolvate**

**1** Fie $\xi$ variabila aleatoare cu repartiția din tabelul alăturat. Să se calculeze valorile medii ale variabilelor aleatoare $\xi$ şi $\eta=2\xi$.

| $\xi$ | −1 | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Rezolvare*:

$M(\xi)=-1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{2}=3.$

Pentru a calcula $M(\eta)$, trebuie să aflăm repartiția lui $\eta$:

| $\eta$ | −2 | 2 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ |

Deci, $M(\eta)=-2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}+10\cdot\frac{1}{2}=6.$

**2** Un trăgător, care dispune de 3 cartuşe, trage la o țintă până o atinge sau până foloseşte toate cartuşele. La fiecare tragere, ținta este atinsă cu probabilitatea 0,8. Să se determine repartiția variabilei aleatoare $\xi$, care exprimă numărul cartuşelor folosite, şi să se calculeze valoarea medie $M(\xi)$.

*Rezolvare*:

Dacă ținta este atinsă din primul foc (ceea ce are loc cu probabilitatea 0,8), atunci $\xi=1$ şi, deci, $P(\xi=1)=0{,}8$. Dacă ținta nu este atinsă din primul foc (fie un eveniment $A$), ci din al doilea foc (fie un eveniment $B$), atunci sunt folosite două cartuşe şi $\xi=2$. Deci, $P(\xi=2)=P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}2\cdot0{,}8=0{,}16$ ($A$ şi $B$ – evenimente independente). Dacă ținta nu este atinsă nici din primul şi nici din al doilea foc, atunci este tras al treilea foc. În acest caz, $\xi=3$.

Probabilitatea $P(\xi=3)$ poate fi calculată din condiția $P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)=1$: $P(\xi=3)=1-0{,}8-0{,}16=0{,}04$.

Astfel, putem scrie repartiția variabilei aleatoare $\xi$:

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0,8 | 0,16 | 0,04 |

Calculăm valoarea medie:
$M(\xi)=1\cdot0{,}8+2\cdot0{,}16+3\cdot0{,}04=1{,}24.$

## Probleme propuse

*Profilul real*

### A₁

**1.** Se aruncă două zaruri. Fie $\xi$ suma punctelor care cad pe zaruri. Să se determine repartiția variabilei aleatoare $\xi$ și valoarea medie $M(\xi)$.

**2.** Într-o urnă se află 5 bile albe și 3 bile negre. Se extrag concomitent 3 bile. Fie $\xi$ numărul de bile albe extrase. Să se determine repartiția variabilei aleatoare $\xi$ și valoarea medie $M(\xi)$.

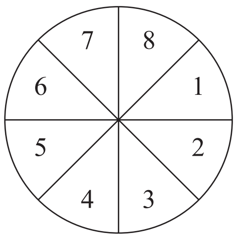
### B₁

**3.** Într-o ladă se află 5 piese, una dintre ele fiind rebut. Din ladă se extrage câte o piesă, fără repunerea ei în urnă, până este extrasă piesa rebut. Să se determine repartiția variabilei aleatoare $\xi$, care exprimă numărul pieselor extrase, și să se calculeze valoarea medie $M(\xi)$.

**4.** *Lucrați în perechi!* Pe direcția deplasării unui automobil sunt 4 semafoare, fiecare permițându-i trecerea cu probabilitatea 0,5. Fie $\xi$ numărul semafoarelor trecute fără oprire. Să se determine repartiția variabilei aleatoare $\xi$ și valoarea medie $M(\xi)$.

### C₁

**5.** *Investigați!* O țintă circulară (împărțită în 8 sectoare de arii egale) este instalată astfel încât să se poată roti în jurul axei sale. Dacă viteza este suficient de mare, atunci un trăgător nu poate distinge cifrele scrise în sectoare și este nevoit să tragă la întâmplare. Dacă nimerește în sectorul $k$, atunci el câștigă $k$ lei. Este oare convenabil să participi la acest joc dacă pentru a trage un foc trebuie să plătești 5 lei?




**6.** *Investigați!* Cineva se află pe axa $Ox$ în originea de coordonate și aruncă o monedă simetrică de mai multe ori. Atunci când cade stema, el face un pas spre dreapta, iar atunci când cade banul, face un pas spre stânga. Fie $\xi$ abscisa poziției persoanei date după trei aruncări ale monedei. Să se determine repartiția variabilei aleatoare $\xi$ și valoarea medie a ei (lungimea pasului este egală cu o unitate – distanță). Generalizați problema pentru $n$ aruncări ale monedei.

## Exerciții și probleme recapitulative

*Profilurile umanist, arte, sport*

### A

**1.** *Lucrați în grup!* O urnă conține 5 bile albe, 3 bile negre și 4 bile roșii. Se extrag concomitent 4 bile. Se consideră evenimentele:

$A_1 = \{$se extrag bile de două culori$\}$,
$A_2 = \{$se extrag cel puțin două bile albe$\}$,
$A_3 = \{$se extrag 3 bile roșii$\}$,
$A_4 = \{$se extrag: o bilă neagră și cel puțin o bilă roșie$\}$.

a) Să se indice câteva perechi de evenimente (dintre cele enunțate) incompatibile și câteva perechi de evenimente compatibile.

b) Ce reprezintă evenimentele $A_2 \cap A_3$, $A_3 \cap A_4$?

**2.** Se aruncă un zar de două ori. Să se determine probabilitatea evenimentului:

a) $A = \{$la prima aruncare cade un număr de puncte mai mare decât la a doua aruncare$\}$;

b) $B = \{$suma punctelor este mai mică decât 5$\}$.

## B

3. Presupunem că ați uitat ultimele două cifre ale unui număr de telefon şi le formați la întâmplare, ținând minte doar că aceste cifre sunt impare şi distincte. Să se determine probabilitatea că numărul este format corect.

4. Se aruncă o monedă de 2 ori. Considerăm evenimentele:

$A = \{$la prima aruncare cade stema$\}$,
$B = \{$cad două steme$\}$.
Sunt oare independente aceste evenimente?

5. BAC Cu literele $a, b, c, d, e$, calculatorul generează în mod aleator un cod din 5 simboluri, astfel încât fiecare literă se conține o singură dată. Determinați probabilitatea că în cod primul simbol va fi vocală.

6. BAC Probabilitatea că într-o zi de iulie va ploua este egală cu $\frac{2}{5}$. Determinați probabilitatea că în două din primele trei zile din luna iulie va ploua.

## C

7. ***Investigați!*** Se ştie că 5 dintre cei 40 de pasageri ai unui avion sunt implicați în furtul unei sume mari de bani. La scara avionului, inspectorul poliției judiciare declară că pentru a depista cel puțin un infractor este suficientă percheziționarea a 6 pasageri luați la întâmplare. Care este motivul acestei decizii a inspectorului: un calcul rezonabil sau riscul?

8. Din mulțimea de numere $\{1, 2, 3, ..., 350\}$ se ia la întâmplare un număr. Să se determine probabilitatea că acest număr se divide cu cel puțin unul dintre numerele 5, 13.

9. Într-o ladă sunt 12 piese, dintre care 4 au defecte. În altă ladă sunt 15 piese, dintre care 3 au defecte. Din fiecare ladă se extrage câte o piesă. Să se determine probabilitățile evenimentelor aleatoare:
$A = \{$ambele piese sunt fără defecte$\}$,
$B = \{$ambele piese sunt cu defecte$\}$.

10. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Probabilitatea în viața de zi cu zi.*

### *Profilul real*

## $A_1$

1. ***Lucrați în perechi!*** $A$, $B$ şi $C$ sunt evenimente aleatoare. Se ştie că:
$P(A) = 0{,}5;\ P(B) = 0{,}1;\ P(C) = 0{,}7;$
$P(B \cup C) = 0{,}8;\ P(A \cap B) = 0{,}3.$
a) Sunt incompatibile evenimentele $A$ şi $B$? Sunt oare independente?
b) Sunt incompatibile evenimentele $B$ şi $C$? Sunt oare independente?
c) Sunt oare incompatibile evenimentele $A$ şi $C$?

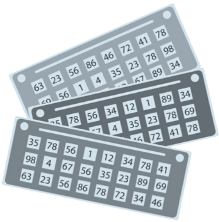
2. Pe o bancă cu 5 locuri se aşază 5 persoane. Care este probabilitatea că 3 persoane anumite nimeresc alături?

## $B_1$

3. O doamnă are 8 prietene şi vrea să invite la un ceai 5 dintre ele. Se ştie că:
a) două dintre prietenele sale sunt certate şi categoric nu ar accepta să vină împreună;
b) două dintre prietenele sale categoric nu ar veni una fără cealaltă.
Doamna, uitând de relațiile dintre prietene, invită la întâmplare 5 dintre ele. Să se determine probabilitățile evenimentelor aleatoare: $A = \{$invitația respectă condiția a)$\}$; $B = \{$invitația respectă condiția b)$\}$;

4. Dintr-o urnă ce conține 2 bile albe şi o bilă neagră se extrage câte o bilă fără întoarcere până atunci când vor fi extrase bile de ambele culori. Să se determine valoarea medie $M(\xi)$, unde $\xi$ este numărul extragerilor efectuate.

5. Într-un tren compus din 3 vagoane urcă 9 călători, fiecare alegând vagonul la întâmplare. Să se determine probabilitatea evenimentului aleator:
a) $A = \{$în primul vagon urcă 3 persoane$\}$;
b) $B = \{$în fiecare vagon urcă câte 3 persoane$\}$;
c) $C = \{$în primul vagon urcă 4, în al doilea vagon urcă 3 şi în al treilea vagon urcă 2 persoane$\}$.



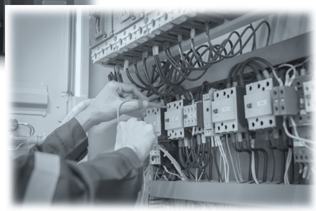
**6.** La o loterie sunt puse în joc 100 de bilete, printre care 10 bilete cu câştig a câte 200 de lei, 20 de bilete cu câştig a câte 100 lei, restul biletelor fiind fără câştig. Determinați probabilitatea câştigului sumei totale de 200 de lei dacă se cumpără 2 bilete.

**7.** Într-un centru de tehnologii informaționale activează 4 programatori, 5 ingineri şi 3 testeri. În luna iulie 8 angajați ai centrului, luați aleator, vor beneficia de concediu. Determinați probabilitatea că în luna iulie în centru va rămâne să activeze cel puțin câte un specialist de fiecare profil.

**8.** Se aruncă simultan 4 zaruri. Determinați probabilitatea că suma punctelor apărute este egală cu 22.

$C_1$

**9.** Un muncitor operează cu două maşini, care funcționează independent una de alta. Probabilitatea ca în decursul unei ture maşinile să nu se defecteze este: pentru prima maşină – 0,95, pentru a doua maşină – 0,90. Să se determine probabilitatea ca cel puțin una dintre maşini să funcționeze fără defecțiuni în decursul unei ture.



**10.** Un vânător trage într-o țintă mobilă, care vine spre el. Probabilitatea de a nimeri ținta din primul foc este egală cu 0,4 şi creşte cu 0,1 la fiecare foc ulterior. Să se determine probabilitatea de a nimeri ținta de două ori din trei focuri.

**11.** ***Investigați!*** Se propune următorul joc.
Pentru o miză de 6 lei, aruncăm zarul. Dacă apar 6, 5 sau 4 puncte, atunci primim 18 lei, 6 lei sau, respectiv, 1 leu. În celelalte cazuri nu primim nimic.
a) Fie $\xi$ variabila aleatoare ce reprezintă câştigul într-o partidă (diferența dintre suma primită şi miză). Să se determine repartiția lui $\xi$ şi valoarea medie $M(\xi)$.
b) Un jucător se prezintă la joc având în buzunar doar 10 lei. Care este probabilitatea ca el să poată juca două partide?

**12.** ***Lucrați în grup!*** Proiect *Probabilitatea în activitățile profesionale ale părinților*.

## Test sumativ

*Timp efectiv de lucru: 45 de minute*

***Profilurile umanist, arte, sport***

**1.** Dintr-o urnă ce conține 15 bile, numerotate 1, 2, 3, ..., 15, se extrage la întâmplare o bilă.

a) Scrieți mulțimea de evenimente elementare $E$.

Să se reprezinte ca submulțimi ale lui $E$ evenimentele:

$A = \{$numărul bilei extrase este divizibil cu 4$\}$;

$B = \{$numărul bilei extrase este divizibil cu 5$\}$.

b) Descrieți ce semnifică evenimentele: $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$.

**2.** Un tânăr economist caută un loc de muncă. El a fost la interviuri de angajare la o bancă şi la o companie de asigurări. Tânărul evaluează probabilitatea reuşitei la bancă ca fiind egală cu 0,5, iar la compania de asigurări ca fiind egală cu 0,6. Totodată el speră, cu probabilitatea 0,3, să primească oferte de muncă de la ambele organizații. Determinați probabilitatea ca tânărul să primească cel puțin o ofertă.

**3.** Se aruncă un zar de două ori. Să considerăm evenimentele aleatoare: $A = \{$suma punctelor care se obțin este un număr par$\}$; $B = \{$suma punctelor care se obțin este un număr divizibil cu 3$\}$. Arătați că:

a) $A$ și $B$ sunt evenimente independente;

b) $A$ și $B$ sunt evenimente compatibile.

**4.** La o loterie sunt 25 de bilete, dintre care 5 câștigătoare. Cineva cumpără 6 bilete. Determinați probabilitățile evenimentelor aleatoare.

$A = \{$este câștigător exact un bilet cumpărat$\}$;

$B = \{$este câștigător cel puțin un bilet cumpărat$\}$.

### *Profilul real*

**1.** Dintr-o urnă ce conține 3 bile albe, 2 bile negre și o bilă roșie se extrag simultan 2 bile. Se consideră evenimentele aleatoare: $A = \{$printre bilele extrase una este albă$\}$, $B = \{$printre bilele extrase este și bila roșie$\}$.

a) Încercuiți litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

„$P(A) = \frac{2}{5}$." **A** | **F**

b) Completați caseta: $P(B) = \boxed{\phantom{xx}}$.

c) Arătați că evenimentele $A$ și $B$ sunt independente.

**2.** La un examen, un elev trebuie să extragă 3 bilete din 20, dintre care 8 sunt cu subiecte de algebră, 7 – cu subiecte de geometrie și 5 – cu subiecte de trigonometrie. Elevul extrage biletele câte unul (fără întoarcere). Determinați probabilitățile evenimentelor aleatoare:

$A_1 = \{$sunt extrase 3 bilete cu subiecte de algebră$\}$;

$A_2 = \{$este extras un bilet cu subiecte de algebră$\}$;

$A_3 = \{$sunt extrase 3 bilete în ordinea următoare: cu subiecte de algebră, cu subiecte de geometrie, cu subiecte de trigonometrie$\}$.

**3.** Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ se extrag la întâmplare concomitent trei numere, care se scriu în ordine crescătoare: $x_1 < x_2 < x_3$. Se consideră evenimentele aleatoare: $A = \{x_2 = 2\}$, $B = \{x_3 = 5\}$. Să se determine probabilitățile:

a) $P(A)$;

b) $P(B)$;

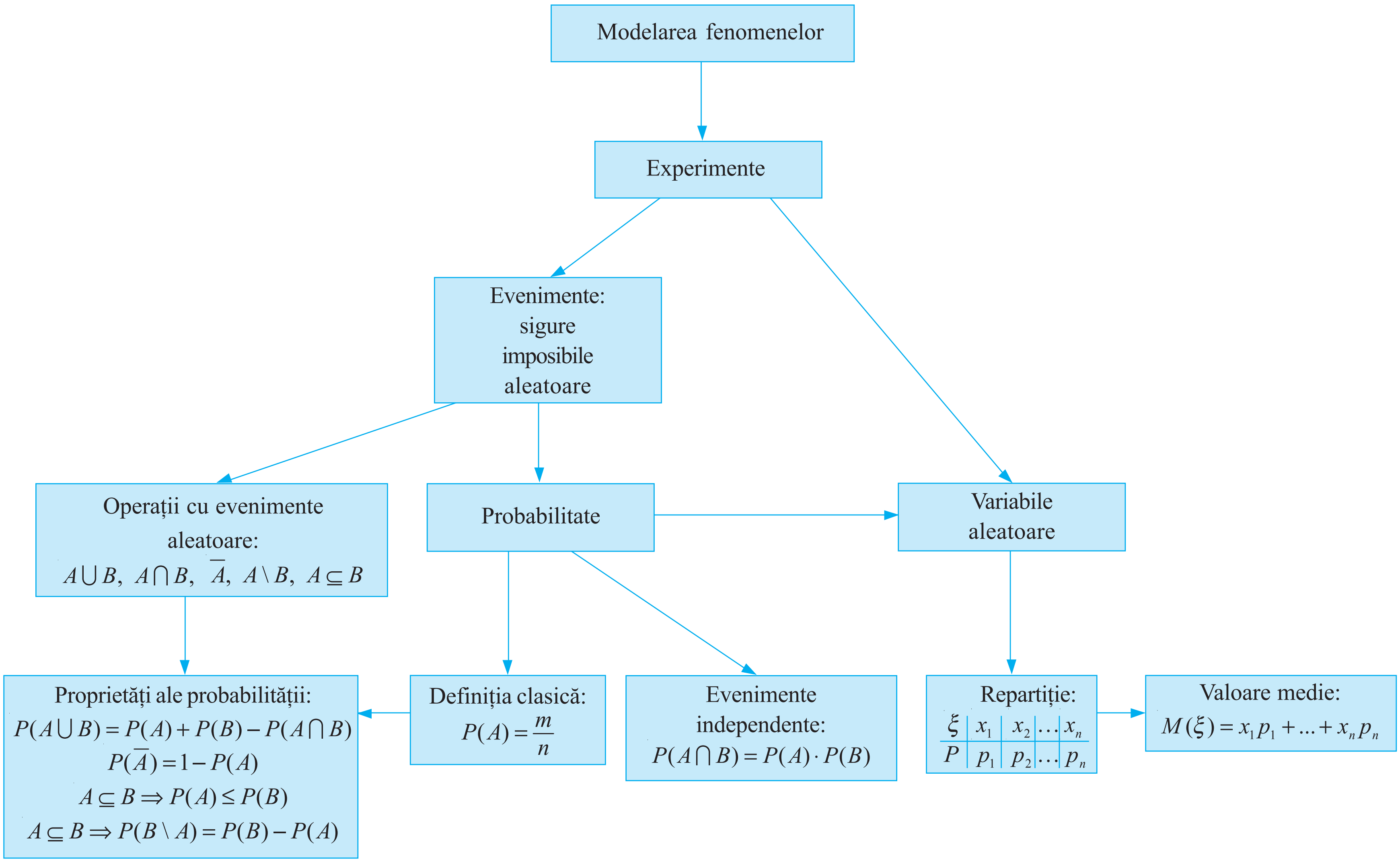
c) $P(A \cup B)$.

**4.** Din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se extrage de două ori câte un număr, primul număr după extragere fiind repus în mulțime. Fie $\xi$ o variabilă aleatoare egală cu numărul acelor numere din mulțime care nu au fost extrase niciodată. Determinați:

a) repartiția lui $\xi$;

b) valoarea medie a lui $\xi$.

# Elemente de teoria probabilităţilor



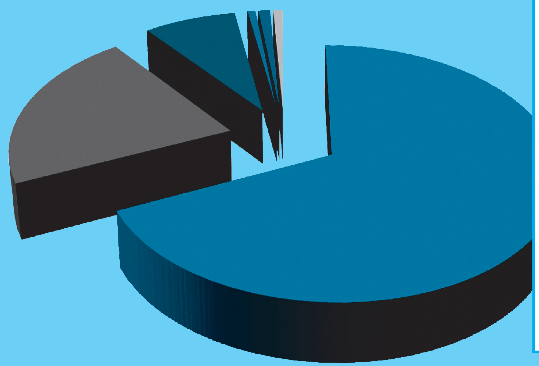
# Modulul 6 Elemente de statistică matematică și de calcul financiar

*Omul învăţat îşi poartă mereu averea cu el.*
Proverb

**Obiectivele modulului**

- reprezentarea rezultatelor observaţiilor prin desene şi tabele, construirea şi interpretarea diagramelor statistice;
- determinarea frecvenţelor: absolute, relative, cumulate;
- determinarea mediei aritmetice, a medianei şi modulului unei serii statistice;
- extragerea informaţiei reprezentate în formă de tabele şi diagrame;
- aplicarea elementelor de calcul financiar în diverse contexte.





# § 1 NOȚIUNI FUNDAMENTALE

***Statistica*** este știința care se ocupă cu *colectarea*, *înregistrarea*, *gruparea*, *analiza* și *interpretarea datelor* referitoare la un anumit fenomen, precum și cu *formularea unor previziuni* privind comportarea viitoare a acestui fenomen.

***Populația statistică*** reprezintă o mulțime de elemente de aceeași natură, care au trăsături esențiale comune și care sunt supuse unui studiu statistic.

Elementele populației statistice se numesc ***unități statistice***. Numărul unităților statistice se numește ***volumul***, sau ***efectivul total*** al populației statistice, iar trăsătura comună a unităților statistice se numește ***caracteristică statistică***, sau ***variabilă statistică***.

**Exemple**

**1** Să presupunem că ne interesează rezultatele obținute de elevii clasei a XII-a la teza de matematică. În acest caz populația statistică este mulțimea elevilor clasei. Elevii reprezintă unitățile statistice ale populației, iar numărul de elevi – volumul (efectivul) populației statistice. Caracteristica statistică este nota la teză.

**2** Să presupunem că ne interesează numărul populației în localitățile din Republica Moldova. Atunci:

- populația statistică este mulțimea localităților din Republica Moldova (1 681 de localități);
- unitățile statistice sunt localitățile din Republica Moldova;
- volumul populației statistice este 1 681;
- caracteristica statistică este numărul populației într-o localitate.

Caracteristica care este măsurabilă (nota, înălțimea, masa corporală etc.) se numește ***caracteristică cantitativă*** (***numerică***).

Caracteristica care nu poate fi măsurată (culoarea ochilor, profesia, sexul etc.) se numește ***caracteristică calitativă***.

Caracteristica statistică cantitativă ce poate lua orice valoare dintr-un interval numeric se numește ***caracteristică continuă*** (înălțimea, masa corporală etc.).

Caracteristica cantitativă ce nu poate lua decât anumite valori izolate din intervalul său de variație se numește ***caracteristică discretă*** (nota, numărul populației într-o localitate etc.).

Caracteristicile statistice se mai numesc ***variabile statistice***. Valorile înregistrate de aceeași caracteristică la unitățile populației statistice se numesc ***variante***.

Prima etapă a oricărei cercetări statistice este ***colectarea datelor*** și se mai numește ***observare statistică***. De obicei, se apelează la observări parțiale de tipul ***sondajelor***: din populația statistică se aleg la întâmplare $n$ unități statistice și referitor la ele se efectuează un studiu restrâns. Această submulțime a populației statistice se numește ***selecție*** sau ***eșantion***.

Eficacitatea datelor obținute prin sondaje statistice este condiționată de gradul de ***reprezentativitate*** a selecțiilor extrase, adică de măsura în care trăsăturile esențiale ale structurii populației statistice se regăsesc în structura selecțiilor extrase.

# § 2 ÎNREGISTRAREA ȘI GRUPAREA DATELOR

Pentru a verifica cunoştinţele de matematică, fiecărui elev dintr-un grup de 50 de elevi i-au fost propuse 20 de probleme. Numărul de probleme rezolvate de elevi (caracteristica statistică) este dat în ordinea prezentării lucrărilor:

11, 14, 11, 12, 8, 17, 11, 14, 10, 12, 12, 10, 12, 8, 17, 11, 10,
11, 12, 10, 10, 11, 8, 11, 12, 11, 11, 17, 16, 10, 12, 8, 16, 12,
10, 11, 16, 10, 11, 12, 8, 10, 11, 12, 11, 11, 17, 11, 10, 12.

Aceste numere formează un ***tabel de date statistice*** şi reprezintă o masă dezordonată de rezultate, fără a ne permite să tragem prea multe concluzii. De aceea este necesar să efectuăm o ***grupare*** a datelor. O modalitate firească de grupare este cea din tabelul 1.

**Tabelul 1**

| Numărul de probleme rezolvate | Numărul de elevi |
|---|---|
| 8 | 5 |
| 10 | 10 |
| 11 | 15 |
| 12 | 11 |
| 14 | 2 |
| 16 | 3 |
| 17 | 4 |

Acum, analizând datele din tabel, putem trage unele concluzii cum ar fi: majoritatea elevilor au rezolvat câte 10–12 probleme, ceea ce constituie 50–60% dintre problemele propuse; 4 elevi au rezolvat câte 17 probleme, ceea ce constituie 85% dintre probleme. Acest tabel ne poate înlesni compararea cu alte date de acelaşi gen.

Tabelul 1 reprezintă ***gruparea datelor pe variante***.

În urma operației de grupare pe variante, se obține un şir de perechi de valori, care se numeşte ***serie statistică***.

Menționăm că în exemplul de mai sus seria este un rezultat al analizei statistice a unui fenomen în raport cu o singură caracteristică.

În tabelul 2 este prezentată seria statistică într-o formă generală.

**Tabelul 2**

| Variantele caracteristicii $x_i$ | Numărul de unități $n_i$ |
|---|---|
| $x_1$ | $n_1$ |
| $x_2$ | $n_2$ |
| … | … |
| $x_r$ | $n_r$ |
| Total | $n=\sum_{i=1}^{r} n_i$ |

Aici se presupune că $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$.

Elementele din tabelul 2 au următoarele semnificații: $x_i$ este varianta $i$ a caracteristicii $X$; $n_i$ este numărul de unități la care s-a înregistrat varianta $x_i$ şi se numeşte ***frecvența absolută a variantei*** $x_i$.

Tabelul 2 poate fi prezentat şi sub forma unui tabel cu două linii:

| **Variantele caracteristicii, $x_i$** | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_r$ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| **Numărul de unităţi, $n_i$** | $n_1$ | $n_2$ | ... | $n_r$ | $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ |

Atunci când caracteristica cantitativă de grupare prezintă un număr mare de variante, îndeosebi dacă ea este continuă, se efectuează ***gruparea*** datelor ***pe intervale de variaţie***.

**Exemplu**

Înregistrându-se durata de funcţionare a 65 de lămpi electronice, au fost obţinute datele (în ore) reflectate în tabelul 3:

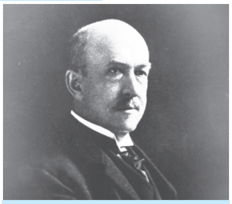
**Tabelul 3**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13,4 | 14,7 | 15,2 | 15,1 | 13,0 | 8,8 | 14,0 | 17,9 | 15,1 | 16,5 | 16,6 |
| 14,2 | 16,3 | 14,6 | 11,7 | 16,4 | 15,1 | 17,6 | 14,1 | 18,8 | 11,6 | 13,9 |
| 18,0 | 12,4 | 17,2 | 14,5 | 16,3 | 13,7 | 15,5 | 16,2 | 8,4 | 14,7 | 15,4 |
| 11,3 | 10,7 | 16,9 | 15,8 | 16,1 | 12,3 | 14,0 | 17,7 | 14,7 | 16,2 | 17,1 |
| 10,1 | 15,8 | 18,3 | 17,5 | 12,7 | 20,7 | 13,5 | 14,0 | 15,7 | 21,9 | 14,3 |
| 17,7 | 15,4 | 10,9 | 18,2 | 17,3 | 15,2 | 16,7 | 17,3 | 12,1 | 19,2 | |

Grupând datele pe intervale (clase), obţinem tabelul 4:

**Tabelul 4**

| Numărul intervalului | Limitele intervalului | Mijlocul intervalului | Frecvenţa $n_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 8,4 – 10,4 | 9,4 | 3 |
| 2 | 10,4 – 12,4 | 11,4 | 7 |
| 3 | 12,4 – 14,4 | 13,4 | 13 |
| 4 | 14,4 – 16,4 | 15,4 | 21 |
| 5 | 16,4 – 18,4 | 17,4 | 17 |
| 6 | 18,4 – 20,4 | 19,4 | 2 |
| 7 | 20,4 – 22,4 | 21,4 | 2 |



Charles H. Sturges (1846–1926), statistician american

Punctul de plecare la alcătuirea intervalelor de grupare se alege convenabil: 0 sau valoarea minimă, sau un număr „puţin" mai mic decât valoarea minimă din tabelul de date. Vom conveni ca extremitatea dreaptă a fiecărui interval (cu excepţia, eventual, a ultimului interval) să nu aparţină intervalului. Astfel, intervalul 8,4–10,4, care poate fi scris ca $[8,4; 10,4)$, cuprinde variantele $x_i$ care verifică condiţia $8,4 \le x_i < 10,4$.

În exemplul dat, intervalele au aceeaşi lungime, ceea ce, în general, nu este obligatoriu. Primul şi ultimul interval pot avea lungimi diferite de lungimile celorlalte intervale, mai ales în cazul caracteristicii continue.

La alegerea numărului de intervale $r$ se recomandă să folosim ***formula lui Sturges***:

$$r \approx 1 + 3,322 \lg n,$$

unde $n$ este volumul selecţiei date.

Mărimea $h$ a intervalului se calculează conform formulei

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r},$$

unde $x_{\min}$ şi $x_{\max}$ reprezintă varianta cea mai mică şi, respectiv, cea mai mare.

Dacă mărimea intervalului trebuie să fie număr întreg, atunci $h$ se rotunjeşte la numărul natural următor.

În exemplul dat, $1 + 3{,}322 \lg 65 \approx 7{,}02$, adică $r = 7$;

$$x_{\max} = 21{,}9, \quad x_{\min} = 8{,}4, \quad \frac{x_{\max} - x_{\min}}{r} = \frac{21{,}9 - 8{,}4}{7} \approx 1{,}9, \text{ adică } h = 2.$$

**Observație**

Pentru $r$, pe lângă formula lui Sturges, există şi alte formule, mai argumentate. În general, alegerea numărului de intervale este o problemă neelementară. În cele ce urmează vom ține cont de o regulă generală, care cere ca $r$ să fie ales între 5 şi 20.

Numărul $n_i$ de date (observații) care cad în intervalul $i$ se numeşte ***frecvență absolută a intervalului***, iar $f_i = \frac{n_i}{n}$ – ***frecvență relativă***. ***Frecvență absolută cumulată*** corespunzătoare intervalului $i$ se numeşte mărimea $F_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, iar ***frecvență relativă cumulată*** – mărimea $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j$.

În mod analog se definesc noțiunile ***frecvență absolută***, ***frecvență relativă*** şi ***frecvență cumulată (absolută sau relativă) ale unei variante*** $x_i$.

**Observație**

Valoarea unei frecvențe relative se poate exprima în procente.

Un tabel statistic poate fi completat cu aceste frecvențe.
Completând tabelul 1, obținem tabelul 5.

**Tabelul 5**

| Numărul de probleme rezolvate $x_i$ | Frecvența absolută $n_i$ | Frecvența absolută cumulată $F_i$ | Frecvența relativă $f_i$ | Frecvența relativă cumulată |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 5 | 5 | 0,10 | 0,10 |
| 10 | 10 | 15 | 0,20 | 0,30 |
| 11 | 15 | 30 | 0,30 | 0,60 |
| 12 | 11 | 41 | 0,22 | 0,82 |
| 14 | 2 | 43 | 0,04 | 0,86 |
| 16 | 3 | 46 | 0,06 | 0,92 |
| 17 | 4 | 50 | 0,08 | 1,00 |

Analizând datele din tabelul 5, conchidem că 41 din numărul total de 50 de elevi au rezolvat cel mult câte 12 probleme (din 20 propuse). Observăm, de asemenea, că frecvența relativă cumulată a variantei $x_3 = 11$ este 0,60 (ceea ce înseamnă că 60% dintre elevi au rezolvat cel mult câte 11 probleme).

Menționăm că noțiunile de variabilă aleatoare şi de probabilitate sunt modelele teoretice ale noțiunilor de caracteristică statistică şi, respectiv, de frecvență relativă.

# Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

## A

**1.** S-a verificat temperatura unor copii sănătoşi. Rezultatele, rotunjite până la sutimi, sunt următoarele:

36,52; 36,57; 36,60; 36,65; 36,68; 36,69; 36,71; 36,76; 36,79; 36,83; 36,84; 36,87; 36,92; 36,98.

Să se grupeze aceste date pe 5 intervale; pentru aceasta toate datele se vor situa în intervalul (segmentul) [36,5; 37,0]. Tabelul construit să se completeze cu frecvenţele relative.

**2.** *Lucraţi în perechi!* Consumul lunar de energie electrică (în kW) într-un bloc de locuit, înregistrat pe apartamente, este prezentat în tabelul următor:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 27 | 87 | 98 | 58 | 69 | 29 | 40 | 19 | 71 |
| 82 | 42 | 53 | 17 | 24 | 84 | 95 | 55 | 66 | 54 |
| 75 | 45 | 66 | 36 | 57 | 27 | 48 | 18 | 39 | 9 |
| 30 | 9 | 21 | 91 | 18 | 82 | 8 | 73 | 94 | 58 |
| 85 | 66 | 96 | 77 | 9 | 88 | 19 | 99 | 29 | 10 |

a) Care este populaţia statistică şi care este caracteristica statistică?

b) Să se grupeze aceste date pe intervalele: [0, 10), [10, 20), ..., [80, 90), [90, 100].

## B

**3.** Înălţimile (în cm) ale jucătorilor echipei naţionale de volei a Franţei (2007) sunt:

196, 169, 186, 183, 180, 187, 191, 183, 168, 186, 181, 182.

a) Care este populaţia statistică? b) Care este caracteristica statistică?

**4.** Se consideră o selecţie de volum $n = 20$ a unei caracteristici statistice:

30, 100, 70, 60, 40, 30, 60, 40, 40, 70, 60, 40, 70, 60, 70, 60, 60, 70, 60, 60.

Care variantă are frecvenţa relativă cumulată egală cu 0,7?

## C

**5.** Se consideră fragmentul de mai jos, din poezia lui Mihai Eminescu „La steaua”:

*La steaua care-a răsărit*
*E-o cale-atât de lungă,*
*Că mii de ani i-au trebuit*
*Luminii să ne-ajungă.*

*Poate de mult s-a stins în drum*
*În depărtări albastre,*
*Iar raza ei abia acum*
*Luci vederii noastre.*

Să se determine frecvenţele absolute ale literelor $a$, $e$, $i$, $o$, $u$, $ă$. Rezultatele să se prezinte sub forma unei serii statistice, care să fie completată cu frecvenţe relative şi cu frecvenţa relativă cumulată.

***Profilul real***

## $A_1$

**1.** Se consideră o selecţie de volum $n = 20$ a unei caracteristici statistice: 5, 8, 3, 6, 7, 4, 3, 3, 4, 5, 4, 6, 7, 4, 5, 6, 8, 4, 5, 8. Care variantă are frecvenţa relativă cumulată egală cu 0,75?

**2.** Ceasurile expuse în vitrinele unui magazin arată ore aleatoare. Înregistrându-se indicaţiile a 50 de ceasuri, s-au obţinut următoarele date:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00:39 | 03:05 | 07:13 | 09:04 | 02:34 | 04:35 | 11:05 | 05:16 | 10:33 | 06:50 |
| 11:32 | 04:19 | 10:19 | 00:27 | 06:08 | 01:56 | 09:37 | 02:28 | 03:49 | 11:21 |
| 01:07 | 06:41 | 11:04 | 02:07 | 04:42 | 08:06 | 00:09 | 04:30 | 07:16 | 08:39 |
| 05:44 | 09:21 | 01:25 | 10:52 | 09:40 | 02:41 | 10:11 | 03:18 | 10:14 | 00:41 |
| 08:43 | 02:14 | 04:05 | 05:07 | 03:27 | 06:20 | 04:15 | 07:01 | 00:53 | 02:30 |

a) Care este populaţia statistică şi care este caracteristica statistică?

b) Să se grupeze aceste date pe 12 intervale: [0, 1), [1, 2), ..., [11, 12].

## $B_1$

**3.** La o fabrică de conserve, borcanele sunt umplute cu ajutorul unui sistem automatizat. Pentru a verifica regimul de funcționare a sistemului, se iau la întâmplare 75 de borcane şi se cântăreşte conținutul lor. Rezultatele sunt trecute în următorul tabel:

| **Masa (g)** | [730, 740) | [740, 750) | [750, 760) | [760, 770) | [770, 780] |
|---|---|---|---|---|---|
| **Numărul de borcane** | 5 | 7 | 52 | 9 | 2 |

a) Care este populația statistică studiată?
b) Ce caracteristică statistică este studiată? Care este tipul ei?
c) Ce procent din numărul total de borcane au masa mai mică decât 750 g?

**4.** Datele ce urmează reprezintă vârsta la care unii actori au obținut Premiul Oscar:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 51 | 35 | 76 | 32 | 48 | 62 | 41 | 31 | 46 |
| 37 | 53 | 45 | 37 | 60 | 48 | 43 | 56 | 47 | 40 |
| 36 | 33 | 55 | 42 | 38 | 40 | 42 | 39 | 45 | 36 |
| 32 | 61 | 39 | 40 | 56 | 43 | 44 | 46 | 60 | |

a) Să se grupeze aceste date pe intervale alegând numărul intervalelor conform formulei lui Sturges. Mărimea lor se va alege rotunjind prin adaos la cel mai apropiat număr întreg.
b) Să se completeze tabelul construit cu frecvențele relative şi cu frecvențele relative cumulate.
c) Să se comenteze tabelul completat.

## $C_1$

**5.** *Lucrați în perechi!* În tabel sunt prezentate masele corporale ale nou-născuților (în kilograme) la o maternitate:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,9 | 2,6 | 3,7 | 3,4 | 2,0 | 3,5 | 3,2 | 3,8 | 3,0 | 4,2 |
| 3,8 | 3,7 | 2,1 | 3,8 | 2,9 | 3,7 | 2,6 | 3,5 | 2,4 | 3,6 |
| 3,0 | 5,2 | 2,7 | 3,5 | 3,0 | 2,5 | 4,1 | 3,3 | 3,8 | 3,1 |
| 3,6 | 3,8 | 2,5 | 4,2 | 3,3 | 4,0 | 3,8 | 2,5 | 3,5 | 3,0 |
| 3,3 | 2,2 | 4,2 | 4,6 | 2,9 | 3,9 | 2,8 | 3,4 | 4,0 | 2,6 |
| 4,8 | 3,3 | 3,5 | 3,0 | 4,5 | 3,1 | | | | |

a) Să se grupeze aceste date pe intervalele:

$$[2,0; 2,4), [2,4; 2,8), [2,8; 3,2), [3,2; 3,6), [3,6; 4,0), [4,0; 4,4), [4,4; 4,8), [4,8; 5,2].$$

Să se completeze tabelul construit cu frecvențele relative şi cu frecvențele relative cumulate.
b) Să se grupeze aceste date alegând numărul intervalelor conform formulei lui Sturges.
*Indicație.* $n = 56$, $\lg 56 \approx 1{,}748$, $r = 6$, $h \approx 0{,}533...$; luăm $h = 0{,}6$ (rotunjim prin adaos la cea mai apropiată zecime).

**6.** *Investigați!* Fie $X$ caracteristica statistică ce reprezintă lungimea cuvintelor (numărul de litere) din primele 11 rânduri de pe pagina 3 a acestui manual. Alcătuiți seria statistică, grupând pe variante. Completați tabelul cu frecvențele relative. Efectuați o analiza similară în baza unui text literar (poezie, povestire, articol de ziar etc.). Comparați rezultatele, comentați.

# § 3 REPREZENTAREA GRAFICĂ A DATELOR STATISTICE

Pentru a obține o imagine sugestivă a datelor statistice, ele pot fi reprezentate cu ajutorul graficelor (diagramelor).

## 3.1. Histograma şi poligonul frecvențelor

***Histograma*** se foloseşte în cazul în care datele sunt grupate pe intervale de variație. Pentru a construi histograma frecvențelor, pe axa absciselor se trec intervalele de grupare. Pe fiecare dintre ele, considerat ca bază, se construieşte un dreptunghi de înălțime proporțională cu frecvența (absolută sau relativă) a intervalului dat.

Histograma frecvențelor absolute corespunzătoare seriei statistice din tabelul 4 este prezentată în figura 6.1.

***Poligonul frecvențelor absolute*** este linia poligonală care uneşte punctele $(x_i^*, n_i)$, unde $x_i^*$ este mijlocul intervalului $i$, $i=\overline{1, r}$. Seriei statistice din tabelul 4 îi corespunde poligonul din figura 6.2. ***Poligonul frecvențelor relative*** este linia poligonală care uneşte punctele $(x_i^*, f_i)$, $i=\overline{1, r}$.

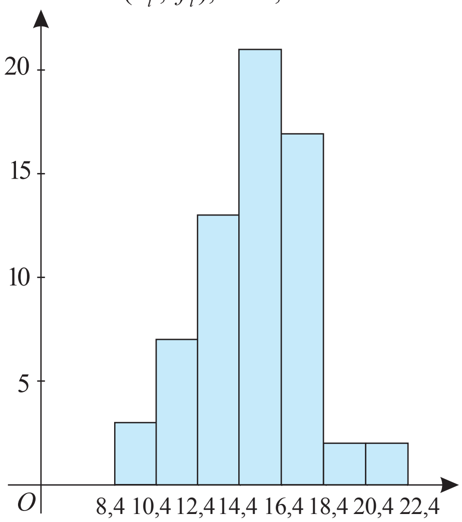



Fig. 6.1

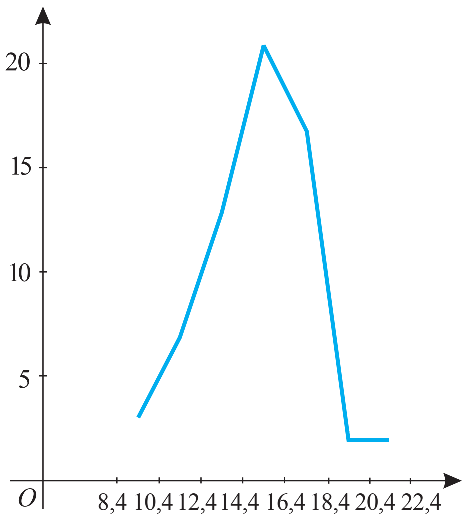



Fig. 6.2

Abraham Moivre (1667–1754), matematician francez

A. Moivre a măsurat înălțimea a 1375 de femei luate la întâmplare. Histograma ce corespunde rezultatelor măsurătorilor grupate pe intervale este prezentată în figura 6.3.

Dacă am dispune de mai multe date, de exemplu, am avea înălțimile a unui milion de femei, şi măsurătorile s-ar efectua cu exactitate de un milimetru, atunci histograma, practic, ar coincide cu o curbă de forma unui clopot (curba lui Gauss) (fig. 6.3).

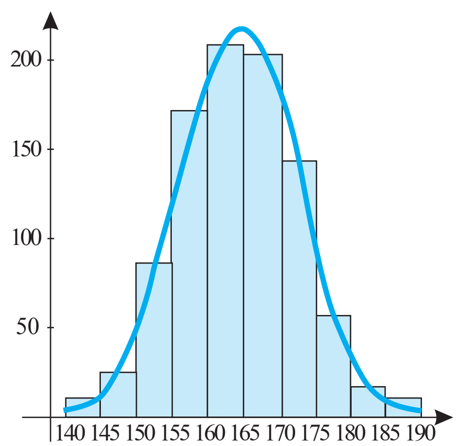



Fig. 6.3

## 3.2. Diagrame prin batoane. Diagrame cu bare

***Diagramele prin batoane*** (bastoane) se folosesc în cazul caracteristicilor discrete care iau un număr mic de valori. Ele se construiesc astfel: pe axa orizontală trecem variantele $x_i$ ale caracteristicii $X$ şi din punctele obţinute ridicăm segmente verticale, având lungimea proporţională cu frecvenţa absolută sau relativă a variantei respective $x_i$. Unităţile de măsură de pe axa orizontală şi de pe axa verticală pot fi diferite.

**Problemă rezolvată**

Un contor Geiger a înregistrat numărul de $\alpha$-particule emise pe parcursul a 25 de unităţi de timp, a câte 7,5 secunde fiecare. Au fost obţinute următoarele rezultate:

3, 0, 4, 6, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 1, 5, 3, 4, 2, 5, 6, 4, 1, 2, 7, 6, 5, 3, 4.

Fie $x_i$ numărul de particule emise timp de 7,5 secunde şi $n_i$ frecvenţa absolută a variantei $x_i$. Să se scrie datele sub formă de serie statistică şi să se construiască diagrama prin batoane a seriei obţinute.

*Rezolvare*:

În urma grupării pe variante, obţinem seria statistică din tabelul 6. Diagrama prin batoane a acestei serii statistice este prezentată în figura 6.4.

**Tabelul 6**

| $x_i$ | $n_i$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |
| 4 | 6 |
| 5 | 4 |
| 6 | 3 |
| 7 | 1 |

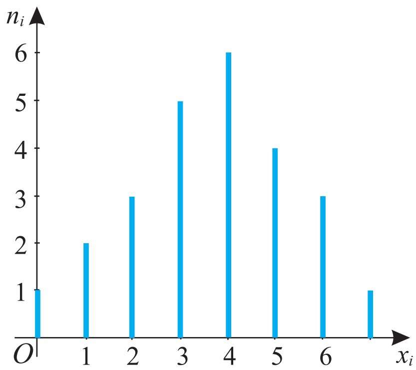



Fig. 6.4

***Diagramele cu bare*** sunt folosite, în principiu, pentru caracteristicile statistice calitative sau cantitative discrete cu un număr nu prea mare de variante. Aceste diagrame sunt utilizate pentru compararea variantelor dintr-o serie statistică sau din câteva serii.

O diagramă cu bare este formată din bare orizontale sub formă de dreptunghiuri separate. Fiecărei variante a caracteristicii statistice îi corespunde un dreptunghi. Bazele dreptunghiurilor se iau congruente şi se situează pe axa verticală. Înălţimea fiecărui dreptunghi reprezintă frecvenţa (absolută sau relativă) a variantei sau este proporţională cu frecvenţa.

**Probleme rezolvate**

**1** Elevii unei clase au fost întrebaţi despre activităţile preferate în timpul liber. Rezultatele sunt prezentate sub forma unei serii statistice:



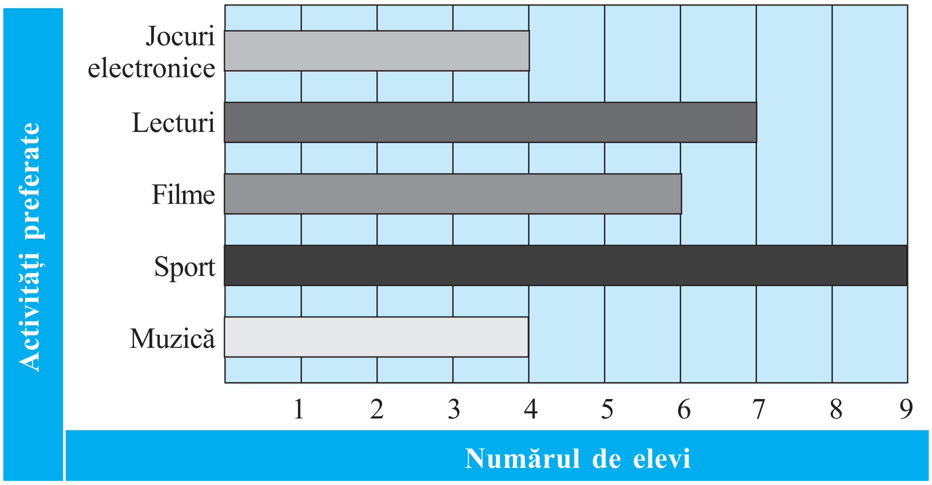


| **Activităţi preferate** | muzică | sport | filme | lecturi | jocuri electronice | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numărul de elevi** | 4 | 9 | 6 | 7 | 4 | **30** |

Care este caracteristica statistică şi care sunt variantele ei? Să se construiască diagrama cu bare respectivă.

*Rezolvare*:

Caracteristica statistică calitativă este „activitatea preferată”, cu următoarele variante: muzică, sport, filme, lecturi, jocuri electronice. Diagrama ilustrează comparații între variante.




Cu ajutorul acestei diagrame putem analiza preferințele elevilor. Constatăm, de exemplu, că acelaşi număr de elevi preferă muzica şi jocurile electronice, iar cea mai îndrăgită activitate este sportul.

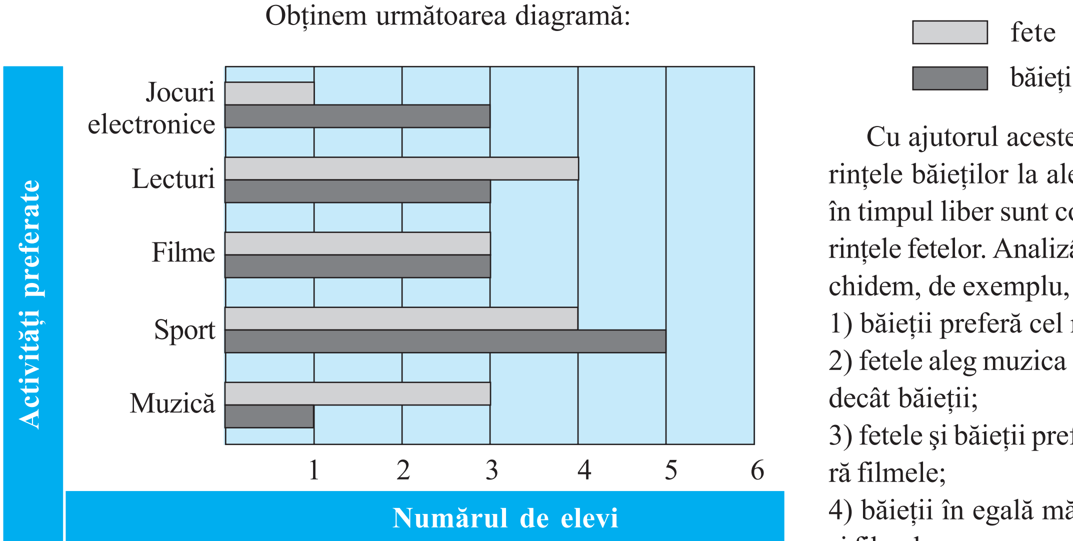
**2** În condițiile problemei **1**, ținându-se cont de sexul elevilor, au fost obținute următoarele rezultate sub formă de două serii statistice:

| **Activități preferate** | muzică | sport | filme | lecturi | jocuri electronice | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Fete** | 3 | 4 | 3 | 4 | 1 | **15** |
| **Băieți** | 1 | 5 | 3 | 3 | 3 | **15** |
| **Total** | **4** | **9** | **6** | **7** | **4** | **30** |

Să se construiască diagrama cu bare respectivă.

*Rezolvare*:

Obținem următoarea diagramă:




Cu ajutorul acestei diagrame, preferințele băieților la alegerea activităților în timpul liber sunt comparate cu preferințele fetelor. Analizând diagrama, conchidem, de exemplu, că:
1) băieții preferă cel mai mult sportul;
2) fetele aleg muzica şi lecturile mai des decât băieții;
3) fetele şi băieții preferă în egală măsură filmele;
4) băieții în egală măsură aleg lecturile şi filmele.

**Exercițiu.** Realizați un sondaj printre elevii clasei referitor la petrecerea timpului liber. Construiți diagrama cu bare respectivă şi analizați rezultatele sondajului.

## 3.3. Reprezentarea structurii seriilor calitative

Structura seriilor calitative poate fi reprezentată cu ajutorul ***diagramelor structurale*** (cerc de structură, pătrat etc.). Ariile figurilor geometrice respective reprezintă 100%, iar părțile lor au arii proporționale cu mărimile caracteristicilor.

**Exemplu**

Considerăm următoarea serie calitativă (tabelul 7):

**Tabelul 7**

**Structura categoriilor de cărți realizate de o editură în anul 2022**

| Categoria | % |
|---|---|
| Manuale | 42,5 |
| Proză | 20,4 |
| Poezie | 15,8 |
| Cărți de specialitate | 11,6 |
| Dicționare | 9,2 |
| Alte cărți | 0,5 |

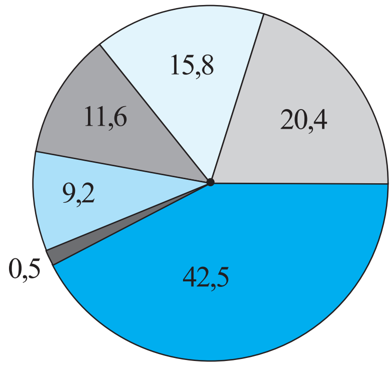



Fig. 6.5

Figura 6.5 ilustrează datele din tabelul 7 cu ajutorul cercului de structură.

Pentru a ne orienta mai rapid în tendințele fenomenelor, folosim ***diagrame prin pătrate*** şi ***diagrame prin cercuri***. Pătratele şi cercurile se construiesc astfel încât ariile lor să fie proporționale cu mărimile indicatorilor (caracteristicilor) respectivi.

**Problemă rezolvată**

În tabelul 8 este prezentat numărul populației municipiului Chişinău (în mii), în diferiți ani.

**Tabelul 8**

| Anul | 1939 | 1950 | 1965 | 1989 | 2016 |
|---|---|---|---|---|---|
| Numărul populației | 112,0 | 134,0 | 279,2 | 661,4 | 746,8 |

Să se reprezinte aceste date cu ajutorul:
a) diagramei prin pătrate;
b) diagramei prin cercuri.

*Rezolvare*:

a) Reprezentăm populația anului 2016 printr-un pătrat cu latura de aproximativ 27 de unități ($\sqrt{746{,}8} \approx 27$), iar populația anilor 1939, 1950, 1965 şi 1989 – prin pătrate cu laturile respectiv de 11, 12, 17 şi 26 de unități ($\sqrt{112} \approx 11$, $\sqrt{134} \approx 12, \ldots$). Obținem diagrama din figura 6.6 (unitatea poate fi considerată egală cu $\frac{n}{27}$ cm, $n$ fiind un număr natural ales în funcție de mărimea preconizată a diagramei; în cazul nostru, $n = 4$).

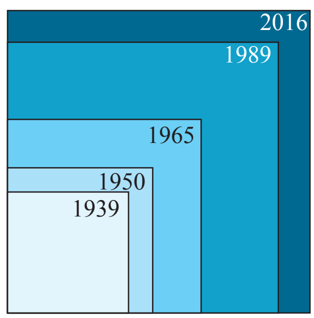



Fig. 6.6

b) Pentru a construi diagrama prin cercuri, întâi alegem razele cercurilor. Începem de la cercul mai mare, care este cercul populației anului 2016. Aria lui trebuie să fie proporțională cu numărul populației (în mii): $\pi r^2 \approx 746{,}8$ (fără restrângerea generalității, am luat coeficientul de proporționalitate 1). Deducem că $r \approx 16$ unități. Pentru celelalte cercuri obținem, în mod analog, razele: 6, 7, 10 şi 15 unități. Rămâne să alegem mărimea unității. Ea poate fi oricare, dar suficient de mare pentru a putea trasa şi cercurile mici. Alegem mărimea unității din condiția: 16 unități = 2 cm.

Obținem diagrama din figura 6.7.

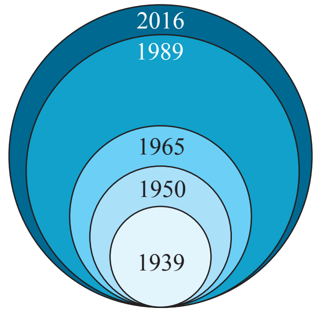



Fig. 6.7

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Se dau notele obținute de elevii clasei a XII-a la lucrarea scrisă la matematică (în ordinea în care elevii sunt trecuți în catalog): 10, 9, 4, 5, 8, 3, 7, 8, 9, 5, 8, 7, 5, 7, 9, 8, 6, 7, 8, 6, 8, 5, 7, 6, 5, 8, 4, 3. Să se reprezinte aceste date cu ajutorul diagramei prin batoane.

**2.** În cadrul selecției pentru o competiție importantă doi trăgători, $X$ şi $Y$, au tras la țintă, fiecare de 20 de ori. Rezultatele sunt prezentate în tabelul alăturat, sub formă de două serii statistice. Să se construiască diagrama cu bare.

| Puncte | Trăgătorii | |
|---|---|---|
| | *X* | *Y* |
| 50 | 4 | 6 |
| 30 | 6 | 4 |
| 20 | 5 | 3 |
| 10 | 4 | 6 |
| 0 | 1 | 1 |

### B

**3.** ***Lucrați în grup!*** Realizați în clasă un sondaj privind numărul membrilor familiilor elevilor. Să se grupeze rezultatele pe variante şi să se construiască diagrama prin batoane.

**4.** În clasele liceale s-a realizat un sondaj: „Cum credeți, de ce unii copii îi hărțuiesc pe alți copii?” Rezultatele sunt reflectate de seria statistică alăturată

Să se construiască diagrama cu bare. Să se efectueze o analiză a diagramei.

| Numărul variantei | Cauza | Frecvența relativă (%) |
|---|---|---|
| 1 | Vor să pară „duri” | 35% |
| 2 | Din lipsă de încredere în sine | 25% |
| 3 | Au probleme în familie | 12% |
| 4 | Din invidie | 10% |
| 5 | Din „plăcere” | 10% |
| 6 | Sunt răutăcioşi | 5% |
| 7 | Din plictiseală | 3% |

**5.** Printre părinții ai căror copii frecventează grădinița „Scufița Roşie”, s-a realizat un sondaj despre durata (în minute) deplasării de la domiciliu la grădiniță. Au fost obținute următoarele rezultate:

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 30 | 12 | 15 | 13 | 26 | 23 | 35 | 28 | 17 | 5 | 20 | 10 | 14 | 15 | 40 |
| 30 | 25 | 31 | 5 | 9 | 15 | 16 | 5 | 7 | 11 | 16 | 19 | 9 | 24 | 8 | 32 |
| 23 | 36 | 7 | 21 | 20 | 6 | 18 | 30 | 10 | 12 | 41 | 16 | 30 | 21 | 34 | 5 |
| 27 | 23 | 41 | 39 | 19 | 19 | 37 | 43 | 13 | 24 | 6 | 23 | 32 | 14 | 43 | 32 |
| 25 | 39 | 20 | 37 | 38 | 38 | 24 | 42 | 31 | 40 | 16 | 35 | 13 | 27 | 12 | 44 |

a) Să se grupeze aceste date pe intervalele: [5, 12); [12, 19); [19, 26); [26, 33); [33, 40); [40, 47].
b) Să se construiască histograma şi poligonul frecvențelor absolute.

## C

**6.** ***Lucrați în perechi!*** 3 monede au fost aruncate simultan de 20 de ori. Numărul de steme după ordinea apariției a condus la următorul rezultat: 1 0 1 3 2 3 2 0 3 2 0 2 2 0 3 2 1 2 1 1.

a) Să se grupeze datele pe variante (sau pe intervale).
b) Să se completeze tabelul construit cu frecvențele absolute, relative şi cumulate.
c) Să se construiască histograma şi poligonul frecvențelor (sau diagrama prin batoane).

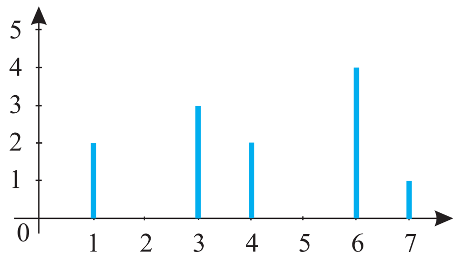
**7.** Clubul sportiv al unui liceu are 30 de membri.

Culorile tricourilor sportivilor sunt reflectate în seria statistică:

| Culoarea | Numărul de sportivi |
|---|---|
| roşie | 4 |
| albastră | 10 |
| galbenă | 1 |
| verde | 8 |
| violetă | 7 |
| **Total** | **30** |

Să se construiască cercul de structură.

**8.** În figura alăturată este dată diagrama prin batoane a unei serii statistice. Care e această serie?




### *Profilul real*

## $A_1$

**1.** Realizați în clasă un sondaj privind durata drumului de la domiciliu până la şcoală (în minute).
a) Să se grupeze datele pe variante (sau pe intervale).
b) Să se completeze tabelul construit cu frecvențele absolute, relative şi cumulate.
c) Să se construiască histograma şi poligonul frecvențelor (sau diagrama prin batoane).

**2.** Aruncați o monedă până obțineți stema de 2 ori succesiv şi înregistrați numărul de aruncări efectuate. Repetați experimentul de 20 de ori.
Să se reprezinte rezultatele obținute cu ajutorul diagramei prin batoane.

## $B_1$

**3.** Valorile coeficientului de inteligență al elevilor unei clase sunt următoarele: 75, 85, 87, 90, 94, 96, 97, 99, 100, 100, 102, 102, 102, 103, 104, 104, 105, 105, 106, 107, 108, 108, 111, 112, 114, 114, 114, 114, 116, 124.
a) Să se grupeze aceste date pe intervalele: [75, 85), [85, 95), [95, 105), [105, 115), [115, 125].
b) Să se construiască histograma şi poligonul frecvențelor absolute.

**4.** După un examen la matematică, la care au participat 100 de elevi, s-a efectuat un sondaj. Elevii au fost rugați să-şi exprime opinia asupra notei luate la examen, alegând una dintre variantele:
1) categoric nu sunt de acord („categoric nu”);
2) nu sunt de acord („nu”);
3) în principiu sunt de acord („în principiu da”);
4) sunt de acord („de acord”);
5) întru totul sunt de acord („întru totul da”).
Rezultatele sondajului sunt reprezentate cu ajutorul seriei statistice.
Să se construiască cercul de structură.

| Numărul variantei $i$ | Opinia | Numărul de elevi $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | categoric nu | 1 |
| 2 | nu | 9 |
| 3 | în principiu da | 40 |
| 4 | de acord | 35 |
| 5 | întru totul da | 15 |
| | **Total** | **100** |

**5.** În tabelul alăturat sunt prezentate 5 țări din care vin cei mai mulți tineri să studieze în universitățile din Republica Moldova (anul de studii 2021-2022).
Pentru seria statistică corespunzătoare să se construiască:
a) diagrama cu bare;
b) cercul de structură.

| Țara | Studenții |
|---|---|
| România | 2661 |
| Israel | 983 |
| India | 690 |
| Ucraina | 391 |
| Federația Rusă | 78 |
| Alte țări | 351 |

$C_1$

**6.** ***Lucrați în grup!***
1. Să se realizeze printre colegii de clasă un sondaj privind modalitatea de a ajunge la şcoală: pe jos, cu transportul în comun, cu autobuzul şcolar, cu bicicleta, cu autoturismul, cu alt mijloc de transport.
2. Să se alcătuiască seria statistică.
3. Să se construiască diagrama cu bare corespunzătoare.
4. Să se efectueze o analiză a diagramei: a) Ce mijloc de transport este folosit de cei mai mulți elevi?
b) Ce mijloc de transport este folosit de cei mai puțini elevi?

**7.** Să se construiască diagrama cu bare şi să se compare vârsta de pensionare în diferite țări.
Vârsta de pensionare în Republica Moldova şi în alte câteva țări este reflectată de seriile statistice alăturate.

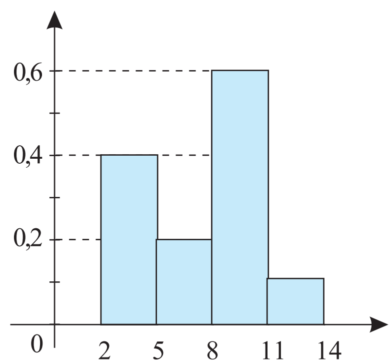
| Țara | femei | bărbați |
|---|---|---|
| Rep. Moldova | 60 | 63 |
| România | 63 | 65 |
| Germania | 65 | 65 |
| Franța | 62 | 62 |
| Ucraina | 60 | 60 |
| Federația Rusă | 60 | 65 |

**8.** ***Investigați!*** Se consideră fraza „Elementele populației statistice se numesc unități statistice”.
a) Să se determine frecvențele absolute şi relative ale literelor din această frază şi să se reprezinte rezultatele printr-o serie statistică. Să se compare frecvențele relative calculate cu frecvențele relative ale literelor în limba română (prezentăm, pentru aceasta, frecvențele în limba română ale unor litere (în %): e – 11,47; i – 9,96; a – 9,95; u – 6,20; c – 5,28; n – 6,47; t – 6,04; l – 4,48; o – 4,07; ă – 4,06; p – 3,18; ț – 1,00).
b) Cu ajutorul diagramei prin batoane să se reprezinte seria frecvențelor absolute ale vocalelor din această frază.

**9.** Un centru de transfuzie a sângelui a făcut bilanțul anual al colectărilor de sânge. În seria statistică alăturată sunt reflectate datele referitoare la vârstele donatorilor.
a) Să se construiască cercul de structură.
b) Ce unghiuri corespund intervalelor (pe cercul construit)?

| Vârsta donatorului | % |
|---|---|
| $[0, 20)$ | 5 |
| $[20, 30)$ | 14 |
| $[30, 40)$ | 26 |
| $[40, 50)$ | 30 |
| $\geq 50$ | 25 |
| Total | 100 |

**10.** Se dă poligonul frecvențelor relative ale unei caracteristici statistice. Să se indice o serie statistică ce corespunde acestui poligon. Este unică aceasta? Argumentați.



# § 4 MĂRIMI MEDII ALE SERIILOR STATISTICE

## 4.1. Media aritmetică

Fie $X$ o caracteristică statistică cantitativă şi o selecţie de $n$ valori distincte $x_1, x_2, ..., x_n$. Mărimea $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ se numeşte ***medie aritmetică*** (simplă) a lui $X$.

Dacă *datele selecţiei sunt grupate pe variante*, atunci media aritmetică se defineşte astfel:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i n_i, \text{ unde } \sum_{i=1}^{r} n_i = n.$$

Dacă *datele selecţiei sunt grupate pe intervale*, atunci media aritmetică se defineşte astfel:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i^* n_i, \text{ unde } x_i^* \text{ este mijlocul intervalului } i.$$

În ultimele două cazuri, $\overline{x}$ se numeşte ***medie aritmetică ponderată*** a lui $X$.

**Exemple**

**1** Pentru datele din tabelul 1 obţinem:

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 8 + 10\cdot 10 + 15\cdot 11 + 11\cdot 12 + 2\cdot 14 + 3\cdot 16 + 4\cdot 17}{50} = 11{,}62 \text{ (probleme)},$$

ceea ce înseamnă că numărul mediu de probleme rezolvate de un elev este 11,62. Putem trage concluzia că 30 de elevi (din 50) au rezultate sub medie.

**2** Pentru datele din tabelul 4 obţinem:

$$\overline{x} = \frac{9{,}14\cdot 3 + 11{,}4\cdot 7 + 13{,}4\cdot 13 + 15{,}4\cdot 21 + 17{,}4\cdot 17 + 19{,}4\cdot 2 + 21{,}4\cdot 2}{65} \approx 15{,}11.$$

Media aritmetică este o valoare tipică importantă, care ne ajută să trecem la etapele următoare ale cercetării statistice, în special la comparaţii (compararea mediei unei caracteristici în două populaţii statistice).

Uneori, media aritmetică poate ascunde o realitate. Fie, de exemplu, 8, 2, 7, 7, 1 notele a 5 elevi obţinute la o teză. Aici $\overline{x} = 5$, adică fiecare elev are, în medie, o notă trecătoare, ceea ce nu corespunde realităţii.

Pentru completarea analizei seriilor statistice, pe lângă media aritmetică, se utilizează valorile unor variante concrete, care ocupă în şirul datelor ordonate (crescător sau descrescător) anumite poziţii. În primul rând, aici se are în vedere *mediana* şi *modul seriei statistice*.

## 4.2. Mediana

### *4.2.1. Mediana unei succesiuni de numere*

***Mediana*** (***Me***) a unei succesiuni de $n$ numere, ordonate crescător sau descrescător, este ***numărul care se află la mijlocul succesiunii***.

Dacă succesiunea conţine un număr impar de variante, atunci mediana este chiar termenul central. Pentru o succesiune cu un număr par de variante, mediana este media aritmetică a celor doi termeni centrali. De exemplu, pentru succesiunea 2, 3, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 10 avem $Me = 6$, iar pentru succesiunea 1, 2, 2, 4, 7, 9, 9, 10 avem $Me = \frac{4+7}{2} = 5{,}5$.

### 4.2.2. Mediana unei serii statistice

Fie $X$ o caracteristică statistică şi să considerăm o selecţie a ei de volum $n$. ***Mediana Me*** este ***valoarea care separă volumul selecţiei ordonate crescător în două părţi egale***, după numărul de elemente. Mediana nu este neapărat una dintre variantele selecţiei.

În cazul ***grupării pe variante***, mediana se determină astfel:

1) calculăm frecvenţele absolute cumulate;

2) găsim prima frecvenţă absolută cumulată mai mare decât $\frac{n+1}{2}$; ea indică ***locul medianei***: valoarea $Me$ este valoarea variantei corespunzătoare a lui $X$.

**Problemă rezolvată**

Să se determine mediana seriei statistice grupate pe variante:

| $x_i$ | $n_i$ | Frecvenţa absolută cumulată |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 |
| 5 | 7 | 10 |
| 6 | 2 | 12 |
| 7 | 9 | 21 |
| 10 | 4 | 25 |
| **Total** | **25** | |

*Rezolvare*:
$\frac{n+1}{2}=\frac{25+1}{2}=13.$

Prima frecvenţă absolută cumulată, mai mare decât 13, este 21, şi aceasta indică locul medianei: linia variantei $x_i=7.$ Prin urmare, $Me=7.$

În cazul în care ***datele statistice sunt grupate pe intervale***, mediana se conţine în primul interval a cărui frecvenţă absolută cumulată este mai mare decât $\frac{n+1}{2}.$ Acest interval se numeşte ***interval median***.

Vom explica pe baza unei probleme cum se află însăşi valoarea medianei.

**Problemă rezolvată**

Să se determine mediana seriei statistice grupate pe intervale:

| Intervalul | Frecvenţa absolută $n_i$ | Frecvenţa absolută cumulată |
|---|---|---|
| [4, 8) | 7 | 7 |
| [8, 12) | 3 | 10 |
| [12, 16) | 8 | 18 |
| [16, 20] | 7 | 25 |
| **Total** | **25** | **25** |

*Rezolvare*:

Avem $n=25,\ \frac{n+1}{2}=13.$ Intervalul $[12, 16)$ este primul interval a cărui frecvenţă cumulată este mai mare decât 13: $18>13.$ Deci, mediana se conţine în acest interval. Dacă toate cele 25 de variante ar fi scrise în ordine crescătoare, atunci mediană ar fi cea de a 13-a variantă, care este cuprinsă între limitele 12 şi 16. În intervalul $[12, 16)$ se află 8 variante. În statistică se presupune că acestea cresc uniform de la 12 la 16, creşterea fiind egală cu $\frac{16-12}{8}=0{,}5.$

Pe de altă parte, a 13-a variantă a seriei este a 3-a dintre cele 8 variante situate în intervalul $[12, 16)$ (deoarece la stânga de intervalul $[12, 16)$ se află 10 variante).

Deci, varianta a 13-a este $12+(13-10)\cdot\frac{16-12}{8}=13{,}5.$ Astfel, $Me=13{,}5.$

## 4.3. Modul

***Modul*** (*Mo*) sau ***dominanta*** unei serii statistice reprezintă valoarea caracteristicii cu frecvența cea mai mare.

În cazul în care ***datele sunt grupate pe variante***, modul se determină nemijlocit conform definiției.

**Problemă rezolvată**

Să se determine modul seriei statistice grupate pe variante:

a)

| $x_i$ | 0 | 3 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 2 | 4 | 7 | 4 |

b)

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 5 | 4 | 5 | 3 |

*Rezolvare*:

a) $Mo = 6,$ deoarece frecvența ei, fiind egală cu 7, este cea mai mare.

b) $Mo = 1;$ $Mo = 4.$ Aici există două valori modale. Spunem că această serie statistică este ***bimodală***.

**Observație**

Dacă toate variantele caracteristicii statistice au aceeaşi frecvență, atunci seria respectivă nu are mod.

Dacă ***datele sunt grupate pe intervale de variație***, determinarea modului presupune mai întâi identificarea intervalului cu frecvență maximă (care se numeşte ***interval modal***). Apoi modul se calculează conform formulei:

$$Mo = x_{\inf} + h\frac{n_2' - n_1'}{(n_2' - n_1') + (n_2' - n_3')},$$

unde $x_{\inf}$ este limita inferioară a intervalului modal, $h$ – mărimea intervalului modal, $n_1'$, $n_2'$, $n_3'$ – frecvențele respective ale intervalelor premodal, modal, postmodal.

**Problemă rezolvată**

Într-o bancă s-au înregistrat sumele retrase de 100 de clienți în cursul unei săptămâni. Datele au fost grupate pe intervale.

| Numărul intervalului | Suma retrasă (în euro) intervalul | Numărul clienților care au retras suma $n_i$ |
|---|---|---|
| 1 | $[0, 200)$ | 5 |
| 2 | $[200, 400)$ | 20 |
| 3 | $[400, 600)$ | 28 |
| 4 | $[600, 800)$ | 25 |
| 5 | $[800, 1000)$ | 18 |
| 6 | $\geq 1000$ | 4 |
| | **Total** | **100** |

Să se afle modul sumei retrase.

*Rezolvare*:

Intervalul modal este $[400, 600),$ deoarece frecvența lui, egală cu 28, este cea mai mare. Se constată că $x_{\inf} = 400,$ $h = 200,$ $n_1' = 20,$ $n_2' = 28,$ $n_3' = 25.$ Prin urmare,

$$Mo = 400 + 200\frac{28 - 20}{(28 - 20) + (28 - 25)} = 400 + 200 \cdot \frac{8}{11} \approx 545{,}4.$$

**Observație**

Mediana şi modul sunt caracteristici importante ale seriei statistice, care completează media aritmetică. Totodată, pot fi date exemple care arată că în unele cazuri mediana şi modul, în calitatea lor de caracteristici, sunt mai eficiente decât media aritmetică. Bunăoară, o cutie poştală sau un bancomat nu se instalează la mijlocul unei străzi, dar în punctul ce împarte numărul populației care locuieşte pe această stradă în două părți egale (aproximativ egale).

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Proprietarul unei firme este interesat de durata convorbirilor telefonice ale angajaților în timpul programului de lucru. Au fost înregistrați următorii timpi (în minute):

3, 1, 4, 2, 5, 1, 1, 2, 7, 10, 5, 10, 1, 4, 5, 2, 3, 5, 4, 4, 2, 1, 7, 8, 10, 5, 1, 2, 7, 5.

Grupând datele pe variante, să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice obținute.

**2.** În şcoală sunt două clase de a IX-a. În prima sunt 29 de elevi şi înălțimea medie a lor este 162 cm, iar în a doua sunt 25 de elevi şi înălțimea medie a lor este 159 cm. Să se determine înălțimea medie a tuturor elevilor din clasele a IX-a.

### B

**3.** Pe parcursul anului 2020 în Republica Moldova au fost înregistrate 1988 de accidente rutiere. Repartizarea lor pe zilele săptămânii este redată de seria statistică alăturată.
a) Să se determine numărul mediu de accidente înregistrate într-o zi.
b) În ce zi frecvența relativă cumulată este mai mare decât 0,7 şi mai mică decât 0,8?

| Ziua săptămânii | Numărul de accidente ($n_i$) |
|---|---|
| luni | 300 |
| marți | 286 |
| miercuri | 273 |
| joi | 274 |
| vineri | 281 |
| sâmbătă | 297 |
| duminică | 277 |
| **Total** | **1988** |

**4.** *Lucrați în perechi!* Vechimea în muncă a angajaților unei firme este reflectată în tabelul alăturat.

Să se determine media aritmetică, mediana şi modul seriei statistice.

| Vechimea (ani) | Numărul de angajați ($n_i$) |
|---|---|
| [0, 5) | 3 |
| [5, 10) | 8 |
| [10, 15) | 10 |
| [15, 20) | 15 |
| [20, 25) | 19 |
| [25, 30) | 18 |
| [30, 35) | 5 |
| [35, 40] | 2 |
| **Total** | **80** |

**5.** În primul trimestru, la teste şi la lucrările individuale Raluca a luat următoarele note:
la matematică: 8, 7, 10, 9, 8, 8, 9, 10;
la fizică: 7, 8, 10, 8, 9, 8.
La care dintre discipline succesele Ralucăi sunt mai bune?

## C

**6.** *Investigați!* Se consideră o selecție de $n$ valori distincte ale caracteristicii statistice $X$: $x_1, x_2, ..., x_n$. Să se arate că suma algebrică a abaterilor variantelor de la media aritmetică este egală cu zero: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$.
Ce alte proprietăți evidente mai pot fi formulate?

**7.** În tabel sunt prezentate rezultatele măsurătorii lungimii (în centimetri) a 60 de știuleți.
a) Să se determine media aritmetică, mediana și modul lungimii știuleților.
b) Ce procent din numărul total de știuleți au lungimi care diferă de media aritmetică $\overline{x}$ cu cel mult 5 mm?

| Lungimea știuleților (cm) | Numărul de știuleți ($n_i$) |
|---|---|
| 19,5 | 2 |
| 20,0 | 4 |
| 20,5 | 5 |
| 21,0 | 7 |
| 21,5 | 16 |
| 22,0 | 15 |
| 22,5 | 8 |
| 23,0 | 3 |
| **Total** | **60** |

***Profilul real***

## A₁

**1.** Timpul petrecut zilnic în fața televizorului de 100 de persoane este prezentat în tabelul alăturat.

Să se determine media aritmetică, mediana și modul seriei statistice respective.

| Timpul (min.) | Persoane ($n_i$) |
|---|---|
| Până la 30 | 24 |
| [30, 60) | 25 |
| [60, 90) | 39 |
| [90, 120) | 10 |
| [120, 150] | 2 |
| **Total** | **100** |

**2.** Se dă înălțimea elevilor claselor gimnaziale, rezultatele fiind grupate pe intervale.
a) Să se construiască histograma frecvențelor relative.
b) Să se calculeze media aritmetică, mediana și modul acestei serii statistice.

| Înălțimea (cm) | Numărul de elevi ($n_i$) |
|---|---|
| [150, 155) | 12 |
| [155, 160) | 28 |
| [160, 165) | 51 |
| [165, 170) | 46 |
| [170, 175] | 13 |
| **Total** | **150** |

**3.** Clasele a XII-a, A și B, își compară rezultatele la sfârșit de trimestru. Se ajunge la concluzia că ele sunt similare, deoarece în ambele cazuri medianele sunt egale (cu 6). Dar ce credeți voi?

| Notele | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 1 | 0 | 2 | 1 | 6 | 4 | 5 | 3 | 1 | 2 |
| **B** | 0 | 3 | 1 | 1 | 4 | 5 | 6 | 2 | 1 | 2 |

## B₁

**4.** S-au luat la întâmplare 50 de spice de orz. Numărând boabele pe care le conține fiecare spic, s-au obținut următoarele rezultate (grupate pe intervale, în tabelul alăturat).

Să se determine media aritmetică, mediana și modul seriei statistice respective.

| Numărul de boabe | Numărul de spice |
|---|---|
| [8, 11) | 2 |
| [11, 14) | 3 |
| [14, 17) | 12 |
| [17, 20) | 14 |
| [20, 23) | 12 |
| [23, 26) | 6 |
| [26, 29] | 1 |
| **Total** | **50** |

**5.** ***Lucrați în perechi!*** 60 de elevi din clasele a II-a au fost testați la viteza de citire (numărul de cuvinte citite într-un minut). Rezultatele, ordonate crescător, sunt următoarele:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 26 | 28 | 30 | 30 | 33 | 33 | 34 | 35 | 35 | 35 | 35 | 35 | 36 | 37 |
| 39 | 41 | 41 | 42 | 43 | 45 | 45 | 49 | 50 | 50 | 50 | 50 | 52 | 53 | 53 |
| 54 | 56 | 57 | 57 | 57 | 57 | 58 | 58 | 61 | 62 | 62 | 67 | 67 | 68 | 70 |
| 74 | 75 | 75 | 78 | 78 | 78 | 80 | 85 | 85 | 87 | 87 | 94 | 102 | 102 | 112 |

a) Să se scrie seria statistică a acestui tabel de date şi să se determine media aritmetică, mediana şi modul ei.

b) Să se grupeze datele acestei serii statistice pe intervalele: [25; 35), [35; 45), [45; 55), [55; 65), [65; 75), [75; 85), [85; 95), [95; 105), [105; 115].

Să se determine media aritmetică, mediana şi modul după gruparea datelor pe intervale şi să se compare valorile lor cu cele de la punctul a).

**6.** La un concurs de matematică au fost propuse 9 probleme. Cei mai buni dintre participanți, elevii A, B şi C, au luat notele prezentate în tabel.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 7 | 9 | 7 | 6 | 8 | 10 | 8 | 9 | 9 |
| **B** | 7 | 8 | 6 | 10 | 10 | 6 | 6 | 10 | 10 |
| **C** | 10 | 8 | 9 | 10 | 7 | 6 | 6 | 8 | 8 |

Cum credeți că au fost repartizate locurile I, II şi III între aceşti participanți? Argumentați.

## C₁

**7.** ***Investigați!*** Argumentați următoarea formulă de calcul al medianei unei serii statistice grupate pe intervale:

$$Me = x_{\inf}(Me) + h(Me)\cdot\frac{\frac{n+1}{2} - \sum fipm}{n_{Me}},$$

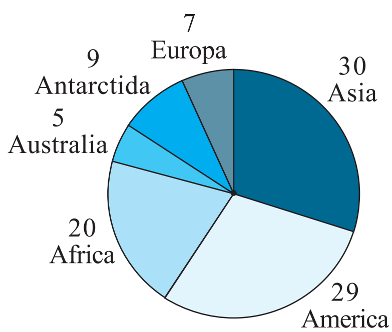
unde $x_{\inf}(Me)$ este limita inferioară a intervalului median, $h(Me)$ – mărimea intervalului median, $\sum fipm$ – suma **f**recvențelor absolute ale **i**ntervalelor **p**recedente intervalului **m**edian, $n_{Me}$ – frecvența absolută a intervalului median.

**8.** ***Lucrați în perechi!*** Repartiția pe continente a uscatului, ce constituie aproximativ 150 milioane km², este reprezentată prin cercul de structură alăturat. Să se determine:

a) ariile continentelor: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (scrise în ordinea crescătoare);

b) aria medie a continentelor;

c) mediana succesiunii de numere $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.




**9.** La o întreprindere lucrează 120 de muncitori: lăcătuşi, strungari şi frezori. Numărul acestora este direct proporțional, corespunzător, cu 5, 2, 3. Salariul lunar al muncitorilor constituie 9 050, 10 200 şi 11 000 de lei, respectiv. Să se determine media aritmetică, mediana şi modul salariului unui muncitor.

**10.** În urma examinării duratei convorbirilor telefonice (în minute), efectuate la o centrală telefonică, s-au obținut datele reflectate în seria statistică de mai jos.

| **Durata (intervalul)** | [0, 2) | [2, 4) | [4, 6) | [6, 8) | [8, 10) | [10, 12] | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frecvența ($n_i$)** | 12 | 18 | 24 | 16 | 18 | 12 | 100 |

1) Să se calculeze durata medie a unei convorbiri.

2) Admitem că intervalele se regrupează câte două, astfel că ele devin: [0, 4), [4, 8), [8, 12]. Să se calculeze durata medie a unei convorbiri pentru seria nouă.

3) Ce concluzie puteți formula?

# § 5 ELEMENTE DE CALCUL FINANCIAR

## 5.1. Procente, dobândă simplă, dobândă compusă

**Amintim**

Un procent este a suta parte (o sutime) dintr-o mărime inițială (de bază) $G$.
Pentru a calcula numărul $T$ care constituie $p\%$ dintr-un număr $G$, aplicăm formula:

$$T = \frac{G}{100} \cdot p.$$

**Problemă rezolvată**

Dintre cei 800 de elevi și eleve ai unui liceu, 40% locuiesc în vecinătate și vin la ore pe jos. Câți elevi și eleve vin pe jos la ore?

*Rezolvare*:

Mărimea de bază $G = 800$, numărul de procente $p = 40$, deci $T = \frac{800}{100} \cdot 40 = 320$ (elevi și eleve).

*Răspuns*: 320 de elevi și eleve.

**Amintim**

Pentru a afla numărul de procente $p$ pe care îl constituie numărul $T$ din mărimea de bază $G$, aplicăm formula:

$$p\% = \frac{T}{G} \cdot 100\%.$$

**Problemă rezolvată**

Dintre cei 800 de elevi și eleve ai unui liceu, 56 de elevi și eleve vin la ore cu părinții (cu autoturisme). Câte procente din totalul de elevi și eleve vin la liceu cu autoturisme?

*Rezolvare*:

Avem $G = 800$, $T = 56$. Prin urmare, $p\% = \frac{56}{800} \cdot 100\% = 7\%$.

*Răspuns*: 7%.

**Amintim**

Pentru a determina un număr necunoscut (mărimea inițială) $G$, dacă se cunoaște că un număr dat $T$ constituie $p\%$ din $G$, aplicăm formula:

$$G = \frac{T}{p} \cdot 100.$$

**Observație**

Aceste probleme pot fi rezolvate (respectiv aceste formule pot fi memorate) utilizând schema: $G$ – 100%
$T$ – $p\%$,
care exprimă faptul că mărimile $T$ și $p$ sunt direct proporționale, adică este adevărată propoziția: $\frac{G}{T} = \frac{100}{p}$.

În continuare se aplică proprietatea de bază a proporției: $G \cdot p = T \cdot 100$. Din această egalitate se obține una dintre mărimi, fiind cunoscute celelalte două.

**Problemă rezolvată**

În clasele primare ale unei școli învață 210 elevi și eleve, ceea ce constituie 35% din numărul total de elevi și eleve ai școlii. Câți elevi și eleve învață în această școală?

*Rezolvare*:

$T = 210$, $p\% = 35\%$.

Deci, $G = \frac{210}{35} \cdot 100 = 600$ (elevi și eleve).

*Răspuns*: 600 de elevi și eleve.

Procentele au o aplicare largă în domeniul financiar. În particular, ele se utilizează la determinarea sumei care trebuie achitată pentru folosirea unui capital $K$ împrumutat. Această sumă $S$ depinde de mărimea capitalului şi se determină, de obicei, ca o parte a sa: de exemplu, $S=\frac{1}{10}K$. În practică se stabileşte procentul pe care îl constituie suma achitată (dobânda) din capitalul împrumutat: $p\% = \frac{S}{K}\cdot 100 = \frac{\frac{1}{10}K}{K}\cdot 100 = 10\%$.

***Dobânda D*** este suma care trebuie achitată pentru folosirea unui capital $K$ împrumutat.

***Rata dobânzii*** este raportul dintre mărimea dobânzii (de obicei în perioada de un an) şi mărimea capitalului $K$ împrumutat. Tradițional, ea se exprimă în procente, deci acest raport se înmulţeşte cu 100.

Frecvent, persoane fizice (agenți economici) dau băncilor bani cu împrumut (plasează bani la bănci). În aşa caz se perfectează ***contracte de depozite bancare*** (se constituie depozite). În contracte se stipulează principalii parametri: suma plasată, termenul de împrumut, rata anuală a dobânzii, responsabilitatea juridică ş.a.

**Problemă rezolvată**

O persoană deține două depozite a câte 5 mii lei la o bancă, cu rata anuală a dobânzii de 12%: unul pe termen de un an, altul pe termen de 1,5 ani. Ce sumă trebuie să restituie banca clientului la sfârşitul termenului în fiecare caz?

*Rezolvare*:

Mărimea capitalului este $K = 5\,000$, $p = 12\%$, deci, în primul caz, dobânda este $D_1 = \frac{5\,000}{100}\cdot 12 = 600.$ Peste un an, banca va restitui suma împrumutată şi dobânda aferentă, adică $5\,000 + 600 = 5\,600$ (lei).

În al doilea caz, dobânda va constitui $D_2 = \frac{5\,000}{100}\cdot 12\cdot 1{,}5 = 600\cdot 1{,}5 = 900.$ Astfel, banca va restitui clientului suma $5\,000 + 900 = 5\,900$ (lei).

*Răspuns*: 5 600 lei; 5 900 lei.

Dobânda calculată în modul expus se numeşte ***dobândă simplă***.

Dobânda pentru utilizarea unui împrumut (depozit) se achită de către bănci la sfârşitul fiecărei perioade (lună, trimestru, an). Astfel, clientul trebuie să se prezinte periodic la bancă pentru ca: fie a) să primească aceste dobânzi; fie b) să le adauge la suma existentă, ca în perioada următoare să ia o dobândă mai mare decât în perioada precedentă.

Vom determina câştigul clientului la aplicarea fiecărui procedeu de $t$ ori ($t$ perioade) consecutiv. Fie că suma inițială este $S_0$ şi rata dobânzii pentru fiecare perioadă este constantă – $p$. În cazul a) la expirarea unei perioade dobânda va fi $S_0\cdot\frac{p}{100}$, deci la expirarea a $t$ perioade dobânda va creşte de $t$ ori: $t\cdot S_0\cdot\frac{p}{100}$. În cazul b) notăm $i=\frac{p}{100}$, $S_k$ – suma care va apărea (va fi) în cont la sfârşitul perioadei $k$, $k=\overline{1,t}$ (adăugând fiecare dobândă la suma precedentă). Avem:

$$S_1 = S_0 + S_0\cdot\frac{p}{100} = S_0(1+i),\ S_2 = S_1 + S_1\cdot i = S_1(1+i) = S_0(1+i)^2,\ \ldots,$$

$$S_{t-1} = S_{t-2} + i\cdot S_{t-2} = S_{t-2}(1+i) = S_0(1+i)^{t-2}\cdot(1+i) = S_0(1+i)^{t-1},$$

$$S_t = S_{t-1}(1+i) = S_0(1+i)^t.$$

Deci, dacă la sfârşitul fiecărei perioade dobânda se adună la suma acumulată până în perioada precedentă, rata dobânzii este constantă, $p$, suma inițială este $S_0$, atunci la sfârşitul perioadei $t$ se va obține suma:
$$S_t = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Dobânda obținută în urma aplicării acestui procedeu (când dobânda calculată la fiecare etapă se adaugă la suma de bază şi generează o dobândă majorată în următoarea perioadă) se numeşte ***dobândă compusă***. Evident, ea este mai mare decât $S_0\cdot\frac{p}{100}\cdot t$ – suma a $t$ dobânzi simple.

Pentru a acorda servicii atractive, băncile propun să se constituie depozite prin care dobânda se adaugă la cont lunar, trimestrial sau anual. Se spune că depunerea se realizează cu ***capitalizare***. Acest fapt se stipulează neapărat în contract.

**Probleme rezolvate**

**1** Se depune la o bancă o sumă de 10 000 lei pe termen de 2 ani la rata anuală a dobânzii de 7%. Să se determine suma din cont la sfârşitul termenului, dacă:

a) dobânda este simplă; b) dobânda este compusă, cu capitalizare anuală.

În care caz suma este mai mare şi cu cât?

*Rezolvare*:

a) $S_2 = 10\,000\left(1+2\cdot\frac{7}{100}\right) = 11\,400$ (lei).

b) $\tilde{S}_2 = 10000\left(1+\frac{7}{100}\right)^2 = 11\,449$ (lei).

Astfel, $11\,449 - 11400 = 49$ (lei).

*Răspuns*: a) 11 400 lei; b) 11 449 lei.

Suma finală în cazul dobânzii compuse este cu 49 lei mai mare decât în cazul dobânzii simple.

**Observație**

Se recomandă de a efectua calculele intermediare cu o exactitate de 4 zecimale.

**2** În condițiile problemei precedente, să se calculeze suma finală în cazul capitalizării efectuate lunar.

*Rezolvare*:

Se obțin 24 de perioade, rata dobânzii pentru fiecare lună fiind $\frac{7}{12}$%.

Atunci, $\tilde{S}_{24} = 10000\left(1+\frac{7}{1200}\right)^{24} \approx 11\,498{,}06$ (lei).

*Răspuns*: 11 498,06 lei.

**Observații**

**1.** Dacă procentul de plasare a sumei $S_0$ variază pe durata de timp $t$ (rata e flotantă) $\left(t=\sum_{k=1}^{m} t_k\right)$ şi pe fiecare perioadă $t_k$ plasarea se face cu rata $p_k$ (dobândă simplă), atunci dobânda totală se va calcula astfel: $D_t = S_0\cdot\sum_{k=1}^{m}\frac{p_k}{100}\cdot t_k$.

**2.** Dacă perioadele intermediare se calculează în fracțiuni de an – trimestre, luni, zile, atunci $t_k$ va avea respectiv forma: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \ldots; \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots; \frac{1}{360}, \frac{2}{360}, \ldots$ În contract se specifică numărul de zile într-un an bancar: 360 sau 365 (eventual 366) de zile.

**Problemă rezolvată**

La o bancă s-a depus suma de 54 000 u.m. în regim de dobândă simplă la ratele anuale de 10%, 12%, 13% pentru perioadele consecutive de 200, 150 şi, respectiv, 100 de zile. Să se determine dobânda totală aferentă, dacă anul bancar are 360 de zile.

$$D_t = S_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} \frac{p_k}{100} \cdot t_k$$

*Rezolvare*:

Aici $p_1 = \dfrac{10}{360}$, $t_1 = 200$; $p_2 = \dfrac{12}{360}$, $t_2 = 150$; $p_3 = \dfrac{13}{360}$, $t_3 = 100$.

Deci, $D_t = 54\,000 \cdot \dfrac{10 \cdot 200 + 12 \cdot 150 + 13 \cdot 100}{100 \cdot 360} = 7\,650$ (u.m.).

*Răspuns*: 7 650 u.m.

## 5.2. Buget. Profit. Prețuri

Viața și activitatea oricărei familii, persoane este însoțită de cheltuieli (plăți pentru alimente, transport, servicii etc.) și venituri (salarii, burse, dobânzi etc.). Pentru a evita surpriza de a rămâne fără bani la un moment dat sau pentru a planifica o achiziție costisitoare (procurarea unui obiect scump, efectuarea unei călătorii etc.), e bine să se țină evidența banilor, să se planifice viitoarele cheltuieli și venituri. Se mai spune că trebuie să formăm bugetul familiei sau al unei persoane.

***Bugetul*** este totalitatea prevederilor de venituri (cu indicarea lor) și de cheltuieli (cu indicarea destinației) pentru o anumită perioadă.

Bugetul trebuie întocmit astfel încât să prevadă cheltuielile obligatorii (alimente, transport, taxe, ...), precum și acumulări pentru cheltuieli neprevăzute sau pentru realizarea unei afaceri costisitoare.

**Exemple**

***Exemple de bugete lunare*** *(u.m.)*

*Bugetul lui Petru (student)*

| Venit | |
|---|---|
| 1. Rezervă | 500 |
| 2. Bursă | 700 |
| 3. Ajutor (de la părinți) | 2 100 |
| | 3 300 |

| Cheltuieli | |
|---|---|
| 1. Transport | 70 |
| 2. Chirie | 600 |
| 3. Materiale didactice, internet | 300 |
| 4. Produse alimentare, nealimentare | 2 100 |
| 5. Divertisment (cinema, teatru etc.) | 200 |
| | 3 270 |

*Bugetul familiei Păduraru*

| Venit | |
|---|---|
| 1. Salarii | 14 200 |
| 2. Dobândă din depozite | 200 |
| | 14 400 |

| Cheltuieli | |
|---|---|
| 1. Întreținere apartament | 1 610 |
| 2. Abonament TV, internet | 200 |
| 3. Haine | 510 |
| 4. Produse alimentare, nealimentare | 6 000 |
| 5. Transport, carburanți | 890 |
| 6. Divertisment (cinema, teatru etc.) | 650 |
| 7. Bani de buzunar | 500 |
| 8. Rambursarea creditului | 450 |
| | 10 810 |

Pentru gestionarea corectă a fondurilor proprii este necesar să cunoaştem: posibilitățile de mărire a veniturilor, posibilitățile de micşorare a cheltuielilor, cum putem contracta un credit, cum se formează prețurile ş.a.

***Prețul de cost*** (***de producție***) este prețul care reflectă totalitatea cheltuielilor pentru producerea unui bun (produs).

Prețul de cost include cheltuielile legate de forța de muncă, mijloacele de producție (materie primă, energie, închirierea spațiului, utilaj ş.a.), eventual şi cheltuielile de desfacere.

Orice producător tinde spre o afacere profitabilă, adică în urma vânzării produselor nu numai să acopere cheltuielile suportate, dar şi să obțină un venit mai mare decât aceste cheltuieli.

***Profitul total*** (***brut***) $P$ al unității economice este diferența dintre veniturile încasate $V$ şi cheltuielile suportate $C$ într-o anumită perioadă de timp:

$$P = V - C.$$

Gradul de rentabilitate a unei întreprinderi, deci potențialul acesteia de a crea profit, este determinat de ***rentabilitatea economică***:

$$R_{ec} = \frac{P}{K_P}, \tag{1}$$

unde $P$ este profitul brut, $K_P$ – mărimea capitalului permanent.

**Problemă rezolvată**

O întreprindere a obținut într-un an un venit de 2 milioane u.m. şi a suportat cheltuieli în sumă de 1 100 000 u.m. Care este rentabilitatea economică dacă întreprinderea are un capital de 9 milioane u.m.?

*Rezolvare*:


Profitul total obținut de întreprindere este:

$$P = 2\,000\,000 - 1\,100\,000 = 900\,000 \text{ (u.m.)}.$$

Conform formulei (1), rentabilitatea economică $R_{ec} = \dfrac{900\,000}{9\,000\,000} = 0{,}1$.

*Răspuns*: 0,1.

E bine să ştim că nu toată suma de bani plătită de cumpărător la magazin îi revine producătorului bunului procurat. În linii mari, prețul (achitat de cumpărător) se formează conform următoarei scheme:

Prețul de producție
\+
Adaosul (profitul) producătorului
\+
TVA
\+
Adaos comercial
\+
TVA

→ Suma totală pe care o încasează producătorul din vânzare, sau prețul de achiziție al comerciantului.

→ Suma pe care o încasează comerciantul la vânzare (prețul final).

***TVA*** (***taxa pe valoarea adăugată***) este un impozit (în folosul statului) care se stabileşte asupra operațiunilor privind transferul proprietății bunurilor sau asupra operațiunilor privind prestările de servicii (în cadrul exercitării activității profesionale).

TVA se calculează din mărimea venitului pe care vrea să-l încaseze proprietarul bunului. La fiecare operațiune de schimb al proprietarului, în bugetul de stat se transferă diferența $T_1 - T_2$, $T_1$ fiind TVA calculată la operațiunea curentă şi $T_2$ – TVA calculată la operațiunea precedentă (şi achitată de proprietarul precedent). Deci, în bugetul statului se transferă taxele pentru valorile adăugate de fiecare proprietar. Aceste taxe se adaugă de fiecare dată la preț şi sunt achitate în final de consumator.

**Probleme rezolvate**

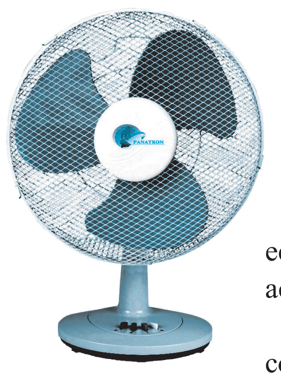
**1** Să se determine profitul obținut din producerea unui litru de lapte, dacă prețul de cost este de 6 u.m., TVA este 8% şi magazinul procură de la producător 1 *l* de lapte la prețul de 7,2 u.m..

*Rezolvare*:

Pentru a determina profitul obținut din producerea unui litru de lapte, trebuie să aflăm venitul $x$ încasat de producător. Magazinul achită acest venit şi TVA, deci obținem ecuația $x + x\dfrac{8}{100} = 7{,}2$, cu soluția $x \approx 6{,}67$.

Astfel, pentru 1 *l* de lapte producătorul încasează 6,67 u.m.. Diferența $6{,}67 - 6 = 0{,}67$ u.m. reprezintă profitul obținut din producerea unui litru de lapte.

*Răspuns*: 0,67 u.m.



**2** Un magazin plăteşte producătorului pentru un ventilator 360 u.m., sumă ce include TVA 20%. Care va fi prețul ventilatorului la magazin dacă adaosul comercial este de 75 u.m.?

*Rezolvare*:

Suma 360 se constituie din suma $x$ ce-i revine producătorului şi din TVA $(T_2)$, deci avem ecuația $x + x \cdot 0{,}2 = 360$, cu soluția $x = 300$. Astfel, producătorului îi revin 300 u.m. pentru acest produs.

Prețul final $P_f$ se constituie din: 300 u.m. – prețul producătorului, 75 u.m. – adaosul comercial şi TVA $(T_1)$ calculată din suma lor – 375 u.m., care constituie $375 \cdot 0{,}2 = 75$ (u.m.). Deci, $P_f = 300 + 75 + 75 = 450$ (u.m.).

*Răspuns*: 450 u.m.

Unitățile comerciale oferă ***reduceri*** (***rabaturi***) cu diferite ocazii, pentru a mări fluxul de cumpărători. De acest fapt e important să se țină cont, îndeosebi când bugetul întocmit este unul auster.

**Problemă rezolvată**

Un student preconiza să procure un tricou la prețul de 110 lei. Cu ocazia sărbătorilor de iarnă, magazinul oferă reduceri de 15%. Ce sumă a economisit studentul?

*Rezolvare*:

15% din 110 constituie $\dfrac{110}{100} \cdot 15 = 16{,}5$ (lei).

*Răspuns*: 16,5 lei.


Pentru o bună parte din cetățeni, principala sursă de venituri este salariul. E bine să ştim că mărimea salariului anunțat pentru un anumit post este diferită de suma achitată salariatului. ***Salariul brut*** este suma pe care o oferă unitatea economică pentru îndeplinirea unui anumit volum de lucru. Din această sumă se fac rețineri pentru: asigurarea obligatorie de asistență medicală, fondul de asigurări sociale, impozitul pe venit. Suma obținută după aceste defalcări reprezintă ***salariul net*** al angajatului.

**Problemă rezolvată**

Salariul brut al Mariei Grigoriță este de 3 800 u.m. Care este salariul net al dnei Grigoriță dacă pentru contribuțiile obligatorii se rețin în total 27% din salariul brut?

*Rezolvare*:

Salariul net constituie 73% din salariul brut, deci mărimea lui va fi:

$$\frac{3\,800}{100}\cdot 73 = 2\,774 \quad \text{(u.m.)}.$$

*Răspuns*: 2 774 u.m.

Revenind la organizarea (formarea) bugetului unei persoane, familii, menționăm că pentru majorarea venitului pot fi practicate diverse modalități ce țin de domeniul financiar. Despre una deja s-a vorbit: plasarea unei sume de bani la bănci (perfectarea contractelor de depozite). Pentru acest împrumut băncile plătesc dobânzi.


O altă modalitate de majorare (temporară) a veniturilor este contractarea unui ***credit*** (împrumut). Persoana (agentul economic) care acordă împrumut se numește ***creditor***, suma împrumutată se numește ***credit***, iar persoana (agentul economic) care ia împrumut – ***debitor***.

Creditul este comod pentru realizarea unei afaceri costisitoare, fiindcă ulterior el poate fi rambursat în tranșe. La contractarea creditului se specifică termenele de rambursare, mărimea tranșelor pentru fiecare perioadă, rata dobânzii care trebuie plătită creditorului, obligațiunile, penalitățile etc.

Creditele sunt diverse. Ele se clasifică în funcție de:

- ***tipul creditului*** – *credit bancar*, *comercial*, *bugetar* (*investițional*), ...;
- ***durata împrumutului*** – *credit pe termen scurt* (până la un an), *pe termen mediu* (1–5 ani), *pe termen lung* (peste 5 ani);
- ***plasamentul creditului*** – *intern*, *internațional* (dacă debitorul, creditorul sunt din diferite țări).

**Problemă rezolvată**

Un antreprenor a acordat un credit de 16 000 u.m. pe o perioadă de 1,5 ani în regim de dobândă simplă, cu rata anuală a dobânzii de 18%. Să se determine suma pe care o va primi antreprenorul la sfârșitul acestui termen.

*Rezolvare*:

Calculăm dobânda simplă $(S_0 = 16\,000)$:

$$D_t = \frac{p}{100}\cdot S_0 \cdot t = \frac{18}{100}\cdot 16\,000 \cdot 1{,}5 = 4\,320\,\text{(u.m.)}.$$

Deci, la sfârșitul termenului antreprenorul va primi suma:

$$S_t = S_0 + D_t = 16\,000 + 4\,320 = 20\,320 \text{ (u.m.)}.$$

*Răspuns*: 20 320 u.m.

Creditul pe termen scurt sau mediu poate fi rambursat într-o singură tranșă la sfârșitul termenului. În acest caz se aplică dobânda simplă. Rambursarea creditului pe termen lung se poate efectua după diverse scheme. De exemplu, suma inițială se împarte în părți egale și se achită periodic împreună cu dobânda pentru suma neachitată, sau suma împrumutată și dobânda totală se împart la numărul de subperioade și se achită sume egale în fiecare subperioadă.

## Probleme propuse

### *Profilurile umanist, arte, sport*

### A

1. Venitul anual al unei familii este de 120 000 u.m.
a) În bugetul anual al familiei este preconizată pentru vacanţă suma de 16 000 u.m. Ce procent reprezintă această sumă din venitul familiei?
b) Ce sumă trebuie preconizată pentru alimente dacă cota lor în bugetul familiei este de 22%?

2. Bugetul lunar al unui student este 200 u.m.: 80 u.m. – bursa şi 120 – ajutorul părinţilor. După concursul orăşenesc al tinerilor inventatori el a fost premiat cu o bursă de merit, care e mai mare cu 25% decât cea pe care o primea. Cu câte procente a crescut bugetul lunar al studentului dacă el primeşte doar bursa de merit şi ajutorul părinţilor rămâne acelaşi?

3. Un client a depus o sumă de bani la o bancă cu o rată anuală de 9% în regim de dobândă simplă. Ce sumă a depus clientul dacă după un an el a primit 2452,5 lei?

### B

4. *Lucraţi în perechi!* Se constituie un depozit în sumă de 1 000 lei, cu rata anuală a dobânzii de 4,5%.
Ce sumă va obţine persoana peste 4 ani:
a) în regim de dobândă simplă;
b) în regim de dobândă compusă, cu capitalizare anuală;
c) în regim de dobândă compusă, cu capitalizare lunară?

5. O bancă a acordat un credit în sumă de 4 500 lei la o rată anuală a dobânzii de 7%. Ce sumă va primi banca peste 2 ani: a) cu capitalizare anuală;
b) cu capitalizare lunară?

6. O persoană a depus la o bancă o sumă de bani în regim de dobândă compusă (cu capitalizare anuală), cu rata anuală de 6,5%, şi după 2 ani a primit 3 970 lei. Ce sumă de bani a fost depusă iniţial?

### C

7. Pentru un computer s-au plătit la magazin 2 500 u.m. Preţul include 20% TVA şi adaosul comercial de 31%. Care este preţul computerului la producător?

8. În bugetul anual al unei familii, pentru alimente erau planificate iniţial 20% din venituri. S-au economisit 8% din aceste cheltuieli şi astfel economiile familiei s-au majorat cu 400 u.m. Să se afle suma planificată pentru distracţii, dacă ea reprezintă 5% din venituri.

### *Profilul real*

### $A_1$

1. *Lucraţi în grup!* Pentru plasarea banilor, o bancă propune 3 tipuri de depozite:
a) în regim de dobândă simplă, la rata anuală de 9%;
b) în regim de dobândă compusă cu capitalizare anuală, la rata anuală de 8%;
c) în regim de dobândă compusă cu capitalizare lunară, la rata anuală de 8%.
Care depozit este mai convenabil pe termen de 1,5 ani?

2. Pentru producerea a 15 trotinete s-au cheltuit în total 2 040 u.m., şi în urma vânzărilor întreprinderea a obţinut un profit de 244,8 u.m. Să se afle preţul de vânzare al unei trotinete, dacă TVA a fost de 10%.

3. *Investigaţi!* O persoană vrea să depună 10 000 u.m. la bancă pe un termen de 2 ani şi are 2 variante:
a) primul an – rata dobânzii (simplă) de 5%, al doilea an – de 7% (la fel, dobândă simplă) (din suma acumulată după un an);
b) un depozit în regim de dobândă compusă, la rata anuală de 6,1%, cu capitalizare lunară.
Care variantă va aduce un venit mai mare?

### $B_1$

4. Din venitul anual al unei familii cheltuielile pentru îmbrăcăminte reprezintă 8%, iar pentru distracţii – 6%. Dacă cheltuielile pentru îmbrăcăminte s-ar reduce cu 40%, iar pentru distracţii – cu 25%, atunci economiile ar constitui 114,24 u.m. Să se afle venitul anual al familiei.

5. După 3 ani, în contul unui depozit cu rata anuală $r$ a dobânzii compuse cu capitalizare anuală erau 5 788,125 u.m. Să se afle rata $r$, dacă la deschiderea depozitului în cont erau:
a) 5 000 u.m.; b) 4 500 u.m.

6. Un credit de 10 000 u.m. se achită peste 10 ani. Ce sumă se achită în total dacă rata anuală a dobânzii compuse (cu capitalizare anuală) este de: a) 10%; b) 16% ?

### $C_1$

7. O fabrică produce 200 de tricouri şi primeşte de la magazin 90 u.m. pentru fiecare. Să se afle profitul total al fabricii, dacă materia primă costă 10 000 u.m., cheltuielile de producţie constituie 30% din costul materiei prime şi TVA este de 20%.

# Exerciții și probleme recapitulative

***Profilurile umanist, arte, sport***

## A

1. Să se determine care dintre exemplele ce urmează reprezintă o caracteristică statistică:
a) numărul zilelor lunii noiembrie;
b) vârsta studenților admiși în anul 2023 la Universitatea de Stat din Moldova;
c) cantitatea de carburanți necesară unor automobile pentru parcurgerea distanței de 100 km;
d) vârsta la care un cetățean al Republicii Moldova poate vota pentru prima dată în viață.

2. Ioana Pădure are lunar un salariu brut de 2 700 u.m. Din acest salariu se rețin în total 37% (asigurare obligatorie de asistență medicală, impozit pe venit, achitare credit ș.a.). Colega sa, Ana Luchian, are un salariu brut de 2 550 u.m., din care se rețin în total 32%. Al cui salariu net este mai mare și cu cât?

## B

3. Se dă distanța (în kilometri) parcursă cu 10 litri de carburanți de 50 de autoturisme de aceeași marcă.
a) Să se construiască histograma și poligonul frecvențelor absolute.
b) Să se calculeze media aritmetică, mediana și modul acestei serii statistice.

| Distanța (km) interval | Numărul de autoturisme ($n_i$) |
|---|---|
| [85, 90) | 2 |
| [90, 95) | 8 |
| [95, 100) | 18 |
| [100, 105) | 14 |
| [105, 110) | 5 |
| [110, 115] | 3 |
| **Total** | **50** |

4. Un ansamblu muzical a contractat un credit (pe o perioadă de o lună, cu rata anuală a dobânzii 18%) în sumă de 100 000 u.m. pentru a efectua un turneu. Fiecare concert aduce un profit de cel puțin 5 000 u. m. Câte concerte trebuie să susțină în această lună ansamblul ca după întoarcerea creditului el să obțină și un profit de cel puțin 15 000 u.m.?

## C

5. ***Lucrați în perechi!*** Seria statistică de mai jos reflectă numărul de frați și surori ai fiecăruia dintre cei 30 de elevi ai unei clase.
a) Să se determine numărul mediu de frați și surori ai unui elev.
b) Să se indice numărul de frați și surori a cărui frecvență relativă cumulată este mai mare decât 0,8 și mai mică decât 0,9.
c) Să se construiască diagrama cu bare a seriei statistice.

| Numărul de frați și surori | Frecvența absolută (numărul de elevi) |
|---|---|
| 0 | 7 |
| 1 | 12 |
| 2 | 6 |
| 3 | 2 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |

6. Un colectiv artistic are finanțare de stat 50 000 u.m. lunar, dar are dreptul să desfășoare activitate concertistică pentru a-și crește venitul. Cu câte procente va crește venitul lunar dacă câștigul (lunar) de la aceste concerte este de 42 000 u.m., din care se transferă statului impozite în mărime de 12 %?

7. ***Investigați!*** Să se reprezinte evoluția recordurilor la săritura în înălțime de la primul record (2 m, 1912, George Horine) până la recordul actual (2,45 m, 1993, Javier Sotomayor) cu ajutorul unei serii statistice, unde recordurile vor fi grupate pe 5 intervale. Caracteristica statistică $X$ fiind înălțimea (record), să se determine media aritmetică $\overline{X}$.

8. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Credit pentru casa mea*.

***Profilul real***

## $A_1$

1. Într-o clasă sunt 21 de fete și 14 băieți. Înălțimea medie a elevilor este de 1,64 m, înălțimea medie a fetelor este de 1,6 m. Să se determine înălțimea medie a băieților.

2. ***Investigați!*** *Credite bancare: avantaje și riscuri.*

3. O școală de sport intenționează să procure 150 de treninguri la prețul de 110 u.m. fiecare. Întrucât se cumpără un lot mare, magazinul oferă un rabat de 15%. Ce sumă se va achita în final dacă se va plăti și TVA în mărime de 10% din prețul net (după reducere)?

## $B_1$

**4.** ***Lucrați în grup!*** S-a preparat o soluție de acid azotic ($HNO_3$) de concentrația 70%. La verificare, în urma a 60 de măsurători, s-au obținut următoarele valori ale concentrației:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 70,4 | 71,3 | 70,1 | 69,9 | 70,6 | 69,8 |
| 68,4 | 70,9 | 69,8 | 69,3 | 70,9 | 71,9 |
| 69,2 | 70,3 | 69,7 | 68,2 | 69,1 | 70,9 |
| 71,5 | 70,5 | 69,4 | 70,5 | 72,2 | 71,7 |
| 70,4 | 68,1 | 67,6 | 70,3 | 68,7 | 71,1 |
| 69,7 | 70,4 | 67,3 | 68,4 | 70,2 | 69,6 |
| 70,1 | 67,7 | 68,9 | 70,9 | 69,9 | 72,4 |
| 70,6 | 69,8 | 70,1 | 72,5 | 70,3 | 71,8 |
| 70,4 | 69,2 | 70,2 | 71,6 | 70,5 | 72,3 |
| 70,8 | 70,6 | 68,9 | 70,4 | 71,6 | 70,9 |

a) Să se grupeze aceste date pe intervalele:
$[67, 68), [68, 69), [69, 70), [70, 71), [71, 72), [72, 73)$.

b) Să se construiască histograma frecvențelor relative.

c) Să se determine media aritmetică, mediana și modul concentrației soluției.

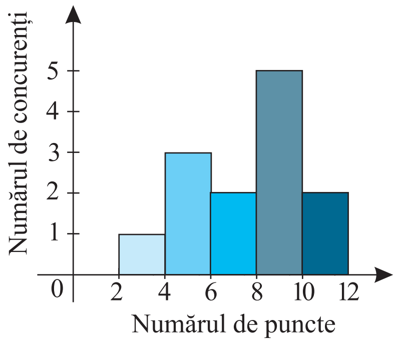
**5.** ***Lucrați în perechi!*** Sunt date publicității vânzările de autoturisme ale unui magazin specializat.
a) Care este caracteristica statistică? Este cantitativă sau calitativă? Dacă este cantitativă, atunci este discretă sau continuă?
b) Să se construiască diagrama circulară a acestei serii statistice.

| Marca | Autoturisme vândute ($n_i$) |
|---|---|
| Renault | 27 |
| Peugeot | 25 |
| Citröen | 22 |
| BMW | 7 |
| Mercedes | 6 |
| Toyota | 3 |
| **Total** | **90** |

**6.** La magazin, un televizor costă 2 900 u.m., iar la depozitul de electronice și electrocasnice el se propune cu un rabat de 25%. Întrucât se va achita și 16% TVA, cumpărătorul consideră că prețul final se va obține scăzând 9% din suma de 2 900 u.m. Are dreptate cumpărătorul?

## $C_1$

**7.** Numărul de puncte acumulate de participanții la un concurs este reflectat de histograma frecvențelor absolute.
a) Să se determine media aritmetică, mediana și modul seriei statistice respective.
b) Ce procent din numărul total de concurenți au acumulat mai puțin de 6 puncte?




**8.** ***Investigați!*** După corectarea lucrărilor la matematică ale elevilor unei clase s-a constatat că nota medie este 6,9.
a) Dacă nota fiecărei lucrări ar fi fost cu 1,1 puncte mai mare, care ar fi fost nota medie?
b) Dacă nota fiecărei lucrări ar fi fost cu 10% mai mare, care ar fi fost nota medie?

**9.** ***Lucrați în grup!*** Proiect *Siguranța financiară a statului*.

## Test sumativ

*Timp efectiv de lucru: 45 de minute*

***Profilurile umanist, arte, sport***

**1.** Completați spațiile astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) „Datele statistice pot fi grupate pe ________________ sau pe ________________”.

b) „Histograma se folosește în cazul în care datele sunt grupate pe ________________”.

c) „Mediana unei succesiuni de numere, ordonate ___________ sau ___________, este numărul care se află ___________”.

**2.** Tabelul alăturat prezintă cele mai frecvente prenume ale nou-născuților înregistrați în Republica Moldova în anul 2020.
Construiți diagrama prin bare.

| Prenumele | Frecvența absolută |
|---|---|
| David | 846 |
| Sofia | 747 |
| Amelia | 729 |
| Matei | 663 |
| Bogdan | 568 |

3. Se contractează un credit în sumă de 6 000 u.m. pe un termen de 2 ani. Ce sumă va restitui debitorul dacă:
a) rata anuală a dobânzii simple este de 20%;
b) rata anuală a dobânzii compuse, cu capitalizare anuală, este de 18%?

4. Evoluția recordurilor mondiale la proba de 100 m (bărbați) din 1912 până în 2007 este reflectată în următorul tabel, unde recordurile sunt grupate pe intervale.
a) Care este caracteristica statistică $X$?
b) Determinați media aritmetică a lui $X$.
c) Cui îi aparține ultimul record?

| Timpul | Numărul recordurilor ($n_i$) |
|---|---|
| [9,58; 9,79) | 7 |
| [9,79; 10,00) | 10 |
| [10,00; 10,21) | 3 |
| [10,21; 10,42) | 7 |
| [10,42; 10,63] | 1 |

### *Profilul real*

1. Repartiția angajaților unei firme după salariul lunar net este redată de seria statistică alăturată.
a) Completați spațiul pentru a obține o propoziție adevărată:
„Datele statistice sunt grupate pe ____________”.
b) Aflați media aritmetică.
c) Determinați mediana acestei serii.

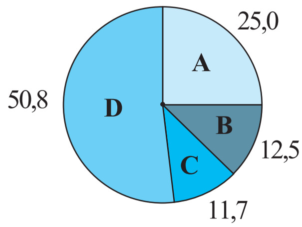
| Salariul (mii lei) | Numărul de angajați ($n_i$) |
|---|---|
| [3,0; 3,5) | 4 |
| [3,5; 4,0) | 6 |
| [4,0; 4,5) | 16 |
| [4,5; 5,0) | 10 |
| [5,0; 5,5] | 4 |
| [5,5; 6,0] | 3 |
| **Total** | **43** |

2. Tabelul alăturat prezintă cele mai frecvente prenume de fetițe înregistrate în Republica Moldova în anul 2020.
Construiți diagrama prin bare.

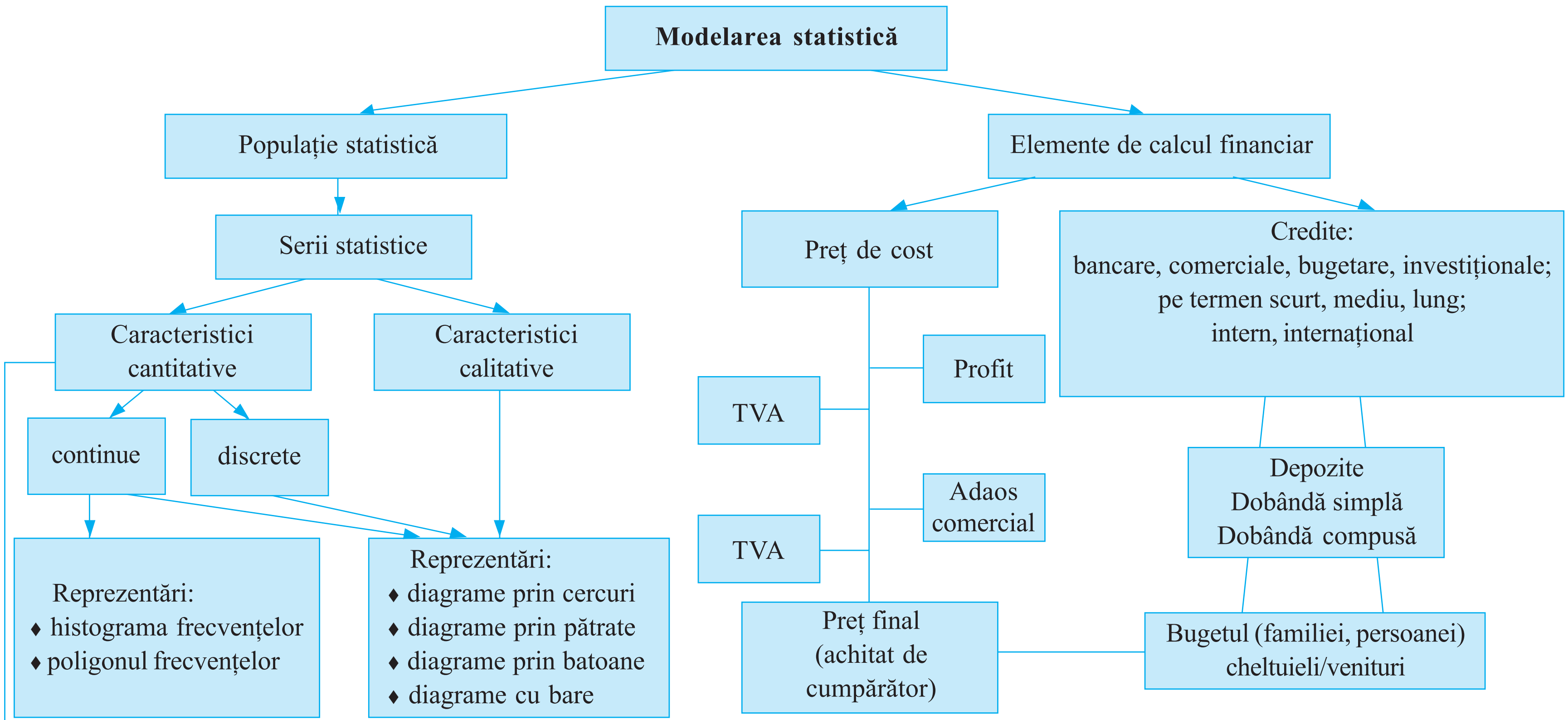
| Prenumele | Frecvența absolută |
|---|---|
| Sofia | 747 |
| Amelia | 729 |
| Anastasia | 448 |
| Maria | 438 |
| Victoria | 431 |

3. Un credit de 10 000 u.m. se achită peste 10 ani. Ce sumă va achita debitorul dacă:
a) rata anuală a dobânzii simple este de 19%;
b) rata anuală a dobânzii compuse este de 16% și capitalizarea se efectuează anual?

4. Se consideră seria statistică de volum 120, reprezentată prin cercul de structură alăturat.
Determinați frecvența absolută a valorii **B** a caracteristicii statistice respective.



# Elemente de statistică matematică şi de calcul financiar




Parametri:

- medie aritmetică: $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}x_i^{*}n_i$, unde $x_i^{*}$ – mijlocul intervalului
- mediană: $Me=x_{\inf}(m_e)+h(m_e)\cdot\dfrac{\frac{n+1}{2}-\sum_{i=1}^{m_e-1}n_i}{n_{m_e}}$, unde $n$ – volumul selecției caracteristicii statistice,
  $h(m_e)$ – lungimea intervalului median,
  $m_e$ – indicele intervalului median,
  $n_{m_e}$ – frecvența absolută în intervalul median.
- modul: $Mo=x_{\inf}+h\dfrac{n_2'-n_1'}{(n_2'-n_1')+(n_2'-n_3')}$

Modulul

# 7

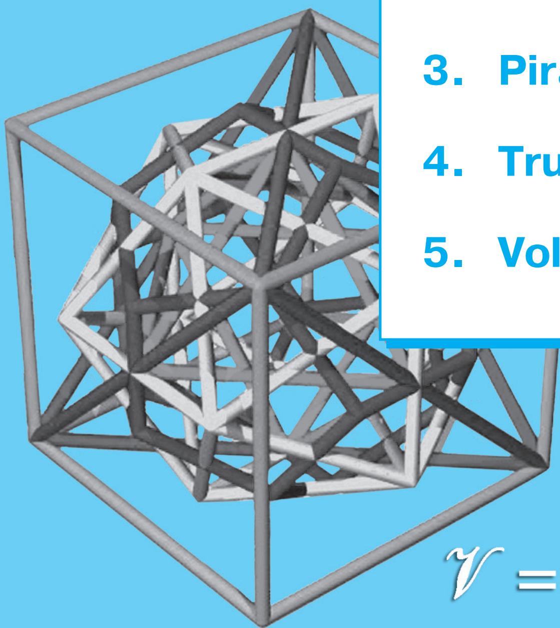
# Poliedre

*Geometria este arta de a raționa corect pe figuri incorecte.*
Henri Poincare

**Obiectivele modulului**

- recunoaşterea poliedrelor, clasificarea lor după diferite criterii;
- construirea secțiunilor poliedrelor cu diferite plane;
- recunoaşterea figurilor geometrice plane din cadrul poliedrelor;
- utilizarea în diferite contexte a proprietăților poliedrelor;
- utilizarea în diferite contexte a formulelor pentru calculul ariilor suprafețelor şi volumelor poliedrelor.





$$\mathscr{V} = \frac{1}{3}H(\mathscr{A}' + \sqrt{\mathscr{A}'\mathscr{A}} + \mathscr{A})$$

# § 1 NOȚIUNEA DE POLIEDRU

Amintim că în geometrie prin figură se înțelege orice mulțime de puncte. Cele mai simple figuri geometrice sunt punctele, dreptele, semidreptele, segmentele, planele, semiplanele. Acestea sunt *figuri plane*. Cubul, paralelipipedul dreptunghic, unghiul diedru sunt *figuri geometrice spațiale*, deoarece ele conțin şi puncte necoplanare.

**Definiții**

• Se numeşte **sferă** de centru $O$ şi rază $R$, $R > 0$, mulțimea punctelor spațiului situate la distanța $R$ de punctul $O$. Segmentul ce uneşte punctul $O$ cu un punct arbitrar al sferei se numeşte **rază** a sferei.

• Se numeşte **corp sferic deschis (închis)** sau **bilă deschisă (închisă)** de centru $O$ şi rază $R$, $R > 0$, locul geometric al punctelor spațiului ale căror distanțe până la punctul $O$ sunt mai mici decât numărul $R$ (sunt mai mici sau egale cu numărul $R$).

• Un punct al figurii spațiale se numeşte **punct interior** al figurii dacă există un corp sferic deschis, cu centrul în acest punct, ale cărui puncte, toate, aparțin figurii. Mulțimea punctelor interioare ale figurii se numeşte **interiorul figurii**.

• Un punct al spațiului se numeşte **punct exterior** pentru o figură dacă există un corp sferic deschis, cu centrul în acest punct, ce nu conține niciun punct al figurii.

• O figură se numeşte **domeniu** dacă toate punctele ei sunt interioare şi oricare două dintre ele pot fi unite printr-o linie frântă, formată din puncte ale figurii.

• Un punct al spațiului se numeşte **punct de frontieră** al unei figuri dacă orice corp sferic deschis, cu centrul în acest punct, conține puncte ce aparțin figurii şi puncte ce nu aparțin figurii. Mulțimea punctelor de frontieră ale figurii date se numeşte **frontiera** figurii.

• O figură se numeşte **figură finită** sau **mărginită** dacă există un corp sferic ce o conține.

• Se numeşte **corp geometric** (**corp**) un domeniu finit împreună cu frontiera lui.

• Frontiera corpului se mai numeşte **suprafața** corpului.

**Exemple**

**1** Corpul sferic închis de centru $O$ şi rază $R$ este corp geometric (fig. 7.1). Sfera de centru $O$ şi rază $R$ este suprafața acestui corp. Mulțimea tuturor punctelor situate la distanțe mai mici decât $R$ de la centrul $O$ formează interiorul corpului sferic şi este domeniu. Punctele $A$ şi $C$ sunt puncte de frontieră, iar punctul $B$ este punct interior.

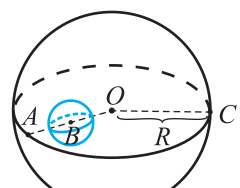



Fig. 7.1

**2** În figura 7.2 este reprezentat un unghi diedru. Această figură nu este mărginită şi este formată doar din puncte de frontieră. Unghiul diedru nu este corp geometric.

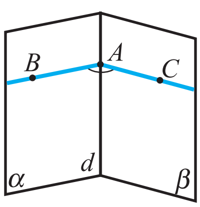



Fig. 7.2

**3** Fie $A$, $B$, $C$, $D$ puncte necoplanare. Figura formată din reuniunea segmentelor $AB$, $AC$, $AD$, $BD$, $BC$, $DC$ se numeşte ***tetraedru transparent***. Tetraedrul transparent nu este corp geometric, deoarece constă doar din puncte de frontieră (fig. 7.3).

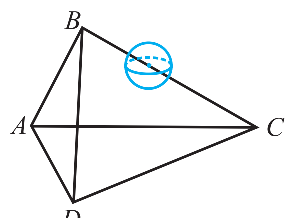



Fig. 7.3

**4** Amintim că figura ce constă din partea finită a planului mărginită de un poligon se numeşte ***suprafaţă poligonală***. Fie $A$, $B$, $C$, $D$ puncte necoplanare. Figura formată din reuniunea suprafeţelor triunghiulare $ABC$, $DBC$, $ADC$, $DAB$ se numeşte ***tetraedru opac***. Această figură nu are puncte interioare, deci nu este corp geometric (fig. 7.4).

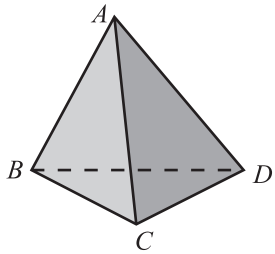


Fig. 7.4

**5** Fie $A$, $B$, $C$, $D$ puncte necoplanare. Figura formată din reuniunea tuturor segmentelor $DM$, unde punctul $M$ aparţine suprafeţei triunghiulare $ABC$, se numeşte ***tetraedru*** sau ***piramidă triunghiulară*** (fig. 7.5).

Această figură este un corp geometric, deoarece ea este mărginită şi constă numai din puncte interioare şi puncte de frontieră. Punctele suprafeţelor triunghiulare $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$ sunt puncte de frontieră, iar toate punctele $N \in (DM)$ sunt interioare (fig. 7.5).

Într-adevăr, fie $R$ cea mai mică distanţă de la punctul $N$ până la planele $ABC$, $ABD$, $ACD$, $BCD$. Atunci, corpul sferic de centru $N$ şi rază $\frac{R}{2}$ este format numai din puncte ale tetraedrului.

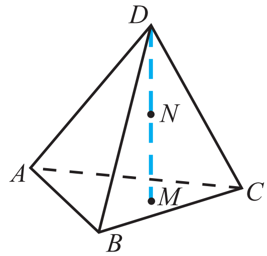


Fig. 7.5

Admitem, fără a demonstra,

**Teorema 1**

Orice semidreaptă cu originea într-un punct interior al unui corp geometric intersectează frontiera lui cel puţin într-un punct.

**Definiţii**

• Se numeşte **poliedru** corpul a cărui frontieră (suprafaţă) constă dintr-un număr finit de suprafeţe poligonale.

• Suprafeţele poligonale ce mărginesc poliedrul se numesc **feţe** ale poliedrului, laturile feţelor se numesc **muchii**, iar extremităţile lor – **vârfuri** ale poliedrului. Segmentul ce uneşte două vârfuri ale poliedrului care nu aparţin aceleiaşi feţe se numeşte **diagonala** poliedrului.

**Observaţie**

În continuare vom numi feţele poliedrului cu numele poligonului care mărgineşte suprafaţa poligonală.

**Definiţii**

• Poliedrul se numeşte **poliedru convex** dacă el se află de aceeaşi parte a fiecărui plan ce conţine o faţă a lui.

• Un poliedru convex se numeşte **poliedru regulat** dacă toate feţele lui sunt poligoane regulate congruente şi numărul de muchii de la fiecare vârf este unul şi acelaşi în poliedrul respectiv.

Există numai cinci tipuri de poliedre regulate: tetraedrul regulat, cubul, octaedrul regulat, dodecaedrul regulat, icosaedrul regulat (a se vedea *Harta noţională*, pag. 150).

**Definiţii**

• Corpul $K$ se numeşte **congruent** cu corpul $K'$ dacă există o izometrie $f$ a spaţiului, astfel încât $f(K) = K'$.

• Corpul $K$ se numeşte **asemenea** cu corpul $K'$ dacă există o transformare de asemănare $f$ a spaţiului de coeficient $\lambda$, astfel încât $f(K) = K'$. Numărul $\lambda$ se numeşte **coeficient de asemănare** a corpurilor $K$ şi $K'$.

# § 2 PRISMA

Vom spune că ***punctul C este situat între planele paralele distincte*** $\alpha$ ***şi*** $\beta$ dacă există un segment $AB$ cu extremităţile în aceste plane şi care conţine punctul $C$ (fig. 7.6).

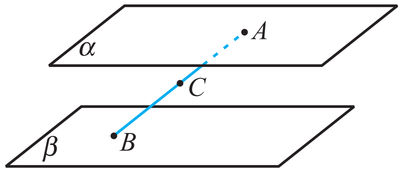


Fig. 7.6

Observăm că mulţimea punctelor situate între planele paralele $\alpha$ şi $\beta$ este un domeniu, iar aceste plane formează frontiera lui.

**Definiţie**

Se numeşte **strat** determinat de planele paralele distincte $\alpha$ şi $\beta$ reuniunea mulţimii punctelor situate între aceste plane şi a planelor $\alpha$ şi $\beta$.

**Definiţie**

Fie $A_1A_2...A_n$ o suprafaţă poligonală inclusă în planul $\alpha$, $g$ – o dreaptă neparalelă cu planul $\alpha$ şi $\beta$ – un plan paralel cu planul $\alpha$, $\beta \neq \alpha$. Poliedrul format din intersecţia stratului determinat de planele $\alpha$ şi $\beta$ cu reuniunea dreptelor paralele cu dreapta $g$ ce trec prin fiecare punct al suprafeţei poligonale $A_1A_2...A_n$ se numeşte **prismă** (fig. 7.7).

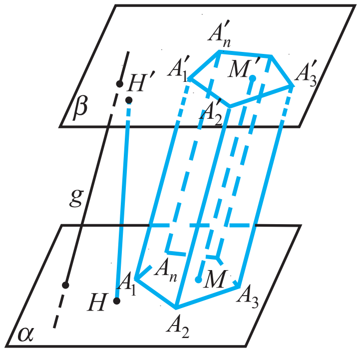


Fig. 7.7

La translaţia paralelă, de-a lungul dreptei $g$, ce aplică planul $\alpha$ pe planul $\beta$, poligonul $A_1A_2...A_n$ se aplică pe un poligon $A'_1A'_2...A'_n$. Deci, aceste poligoane sunt congruente.

Feţele $A_1A_2...A_n$ şi $A'_1A'_2...A'_n$ se numesc ***bazele prismei***.

Prin urmare, am demonstrat

**Teorema 2**

Bazele prismei sunt poligoane congruente.

Celelalte feţe ale prismei $(A_1A_2A'_2A'_1,\ A_2A_3A'_3A'_2, ...)$ se numesc ***feţe laterale***; muchiile paralele cu dreapta $g$ $(A_1A'_1, A_2A'_2, ...)$ se numesc ***muchii laterale***.

Segmentul $HH'$ cu extremităţile în planele bazelor $\alpha$ şi $\beta$, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălţimea*** prismei (fig. 7.7). Distanţa dintre planele bazelor prismei de asemenea se numeşte ***înălţime*** a prismei.

Din definiţia prismei rezultă că muchiile laterale sunt paralele şi congruente. Prin urmare, feţele laterale ale prismei sunt paralelograme.

O prismă se numeşte ***prismă triunghiulară*** (***patrulateră*** sau ***n-unghiulară***) dacă baza ei este un triunghi (patrulater sau poligon cu $n$ laturi).

Suprafaţa prismei $n$-unghiulare este formată din două poligoane $n$-unghiulare (bazele ei) şi din $n$ paralelograme (feţele laterale ale prismei).

**Definiţii**

- Suma ariilor tuturor feţelor unei prisme se numeşte **aria totală** a prismei.
- Suma ariilor feţelor laterale ale unei prisme se numeşte **aria laterală** a prismei.

Dacă notăm cu $\mathcal{A}_T$, $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_B$ respectiv aria totală, aria laterală şi aria unei baze a prismei, atunci

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + 2\mathcal{A}_B}.$$

**Definiții**

• O prismă se numeşte **prismă dreaptă** dacă muchiile ei laterale sunt perpendiculare pe baze (fig. 7.8).

• O prismă se numeşte **prismă oblică** dacă muchiile ei laterale nu sunt perpendiculare pe baze (fig. 7.7).

Menționăm că fețele laterale ale prismei drepte sunt dreptunghiuri şi muchia laterală coincide cu înălțimea prismei. Dacă notăm lungimea muchiei laterale a prismei drepte cu $l$, iar perimetrul poligonului de la bază cu $\mathcal{P}$, atunci ***aria laterală a prismei drepte*** se calculează folosind formula

$$\boxed{\mathcal{A}_L = \mathcal{P} \cdot l}.$$

**Definiție**

Prisma dreaptă a cărei bază este un poligon regulat se numeşte **prismă regulată**.

Dacă notăm raza cercului înscris în baza prismei regulate cu $r$ şi folosim notațiile precedente, obținem ***formula de calcul a ariei totale a prismei regulate***:

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{P} \cdot l + \mathcal{P} \cdot r} \quad \text{sau} \quad \boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{P}(l + r)}.$$

**Definiție**

O prismă se numeşte **paralelipiped** dacă baza ei este un paralelogram.

Toate fețele paralelipipedului sunt paralelograme (fig. 7.8).

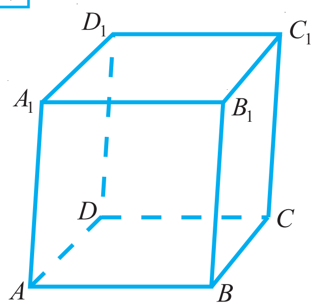


Fig. 7.8

**Definiție**

Paralelipipedul drept a cărui bază este un dreptunghi se numeşte **paralelipiped dreptunghic**.

**Teorema 3**

Pătratul lungimii diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor muchiilor sale ce pornesc din acelaşi vârf.

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 3.

**Definiție**

Paralelipipedul dreptunghic care are toate muchiile congruente se numeşte **cub**.

Evident, toate fețele cubului sunt pătrate congruente. Cubul are nouă plane de simetrie.

**Problemă rezolvată**

O cutie de carton are forma şi dimensiunile indicate în figura 7.9 a). Ea se deschide separând două părți tăiate după segmentele $AD_1$, $D_1C_1$, $C_1B$ prin rotirea în jurul dreptei $AB$ (fig. 7.9 b)).

a) Ştiind că toți pereții cutiei sunt dreptunghiuri, să se calculeze lungimea bandei adezive necesare pentru închiderea cutiei prin lipirea ei după linia frântă $AD_1C_1B$.

b) Poate oare fi împachetată în această cutie o sabie cu lungimea de 72 cm? (A se neglija lățimea sabiei.)

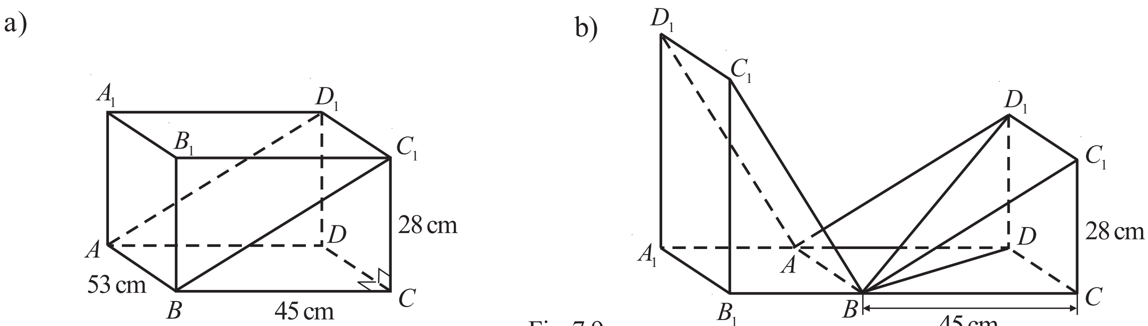



Fig. 7.9

*Rezolvare*:

a) Cutia este un paralelipiped dreptunghic. Deoarece $AD_1 = BC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2} = \sqrt{2\,809} = 53$ (cm), obținem că lungimea bandei adezive este $AD_1 + D_1C_1 + C_1B = 159$ cm.

b) Conform teoremei 3, diagonala

$$AC_1 = \sqrt{45^2 + 28^2 + 53^2} =$$

$$= 53\sqrt{2} \approx 74{,}9 \text{ (cm)}.$$

Prin urmare, sabia cu lungimea de 72 cm poate fi împachetată în cutie amplasând-o de-a lungul diagonalei acesteia (fig. 7.10).

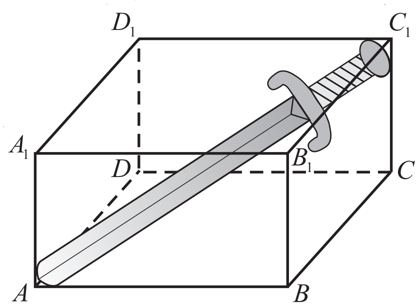



Fig. 7.10

**Definiție**

Intersecția nevidă a unui poliedru cu un plan se numește **secțiune** a poliedrului cu acest plan. Se mai spune în acest caz că planul secționează poliedrul şi acest plan se numeşte **plan secant**.

Secțiunile unui poliedru cu un plan pot fi: a) puncte; b) segmente; c) poligoane.

Vom cerceta numai secțiunile-poligoane, celelalte cazuri fiind triviale.

A construi secțiunea poliedrului cu planul dat înseamnă a indica punctele de intersecție a planului secant cu muchiile poliedrului şi a uni aceste puncte prin segmente ce aparțin fețelor poliedrului. În general, punctele de intersecție a planului secant cu muchiile poliedrului sunt vârfuri ale poligonului ce se obține la secționarea poliedrului cu planul dat, iar segmentele ce aparțin fețelor sunt laturi ale acestui poligon.

Pentru a construi secțiunea poliedrului cu planul dat, procedăm astfel:

1) indicăm în planul fiecărei fețe a poliedrului, intersectate de planul secant, două puncte ce aparțin secțiunii;
2) găsim punctele de intersecție a dreptei determinate de aceste puncte cu muchiile poliedrului;
3) unim aceste puncte şi evidențiem secțiunea.

Planul secant poate fi definit în mai multe moduri (trei puncte necoliniare, un punct şi o dreaptă ce nu trece prin acest punct ş.a.).

**Exemple**

**1** Secțiunea prismei cu un plan determinat de două muchii laterale ce nu aparțin aceleiaşi fețe este un paralelogram. Această secțiune se numeşte ***secțiune diagonală*** a prismei.

**2** Secțiunea paralelipipedului cu un plan ce trece printr-o diagonală a paralelipipedului este un paralelogram. Planul secant este definit în acest caz de extremitățile diagonalei şi un punct de pe o față (sau de pe o muchie).

**3** Secțiunea prismei cu un plan paralel bazelor este un poligon congruent cu bazele prismei.

**Probleme rezolvate**

**1** Să se construiască secțiunea unei prisme patrulatere $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu planul determinat de punctele $A_1$, $C_1$ și $C$ (fig. 7.11).

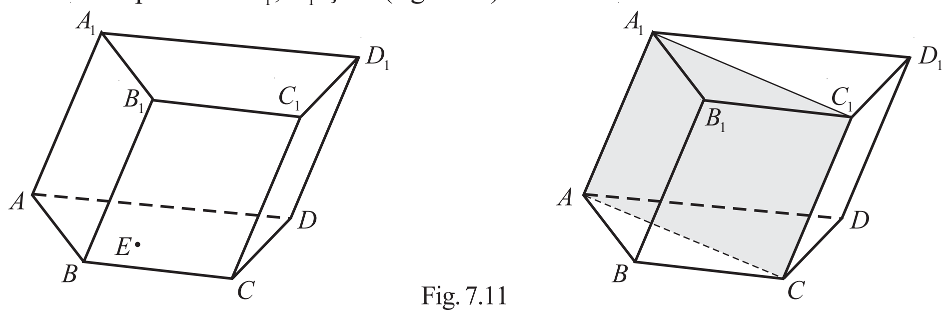



Fig. 7.11

*Rezolvare*:

Planul $A_1C_1C$ conține muchiile paralele $AA_1$ și $CC_1$, care nu aparțin aceleiași fețe. Deci, obținem secțiunea diagonală – paralelogramul $ACC_1A_1$.

**2** Fie $ABCDA_1B_1C_1D_1$ un paralelipiped, iar punctul $M$ intersecția planului $BDA_1$ și a diagonalei $AC_1$ (fig. 7.12). Să se afle raportul $AM : MC_1$.

*Rezolvare*:

Punctul $M$ este punctul de intersecție a medianelor triunghiului $BA_1D$. Într-adevăr, planul $BA_1D$ se intersectează cu planele $AA_1C_1$, $ABC_1$, $ADC_1$, determinate de diagonala $AC_1$ și de muchiile $AA_1$, $AB$ și respectiv $AD$ după dreptele ce conțin medianele triunghiului $BA_1D$.

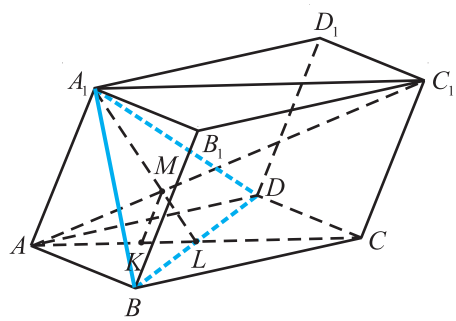



Fig. 7.12

Considerăm secțiunea paralelipipedului cu planul $AA_1C_1$ și fie $[A_1L]$ mediana laturii $BD$ a triunghiului $BA_1D$, iar $[MK] \| [AA_1]$, $K \in [AC]$. Din asemănările $\Delta AA_1L \sim \Delta KML$, $\Delta AKM \sim \Delta ACC_1$ și din faptul că $M$ este centrul de greutate al triunghiului $BA_1D$ obținem:

$$1:3 = ML : LA_1 = KM : AA_1 = KM : CC_1 = AM : AC_1.$$

De aici, obținem $AM : MC_1 = 1:2$.

$$\mathcal{A}_L = \mathcal{P} \cdot l$$

**3** Muchia laterală a unei prisme are lungimea $l$, iar perimetrul poligonului cu vârfurile în punctele de intersecție a dreptelor suport ale muchiilor laterale cu un plan perpendicular pe ele (secțiunea perpendiculară pe muchie) este $\mathcal{P}$. Să se determine aria laterală a prismei.

*Rezolvare*:

Considerăm, pentru determinare, prisma $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ și secțiunea $FGHKL$ perpendiculară pe muchia laterală (fig. 7.13). Pentru aria laterală a prismei obținem:

$$\mathcal{A}_L = AA_1 \cdot FG + BB_1 \cdot GH + \ldots + EE_1 \cdot FL =$$
$$= l(FG + GH + \ldots + FL) = l \cdot \mathcal{P}.$$

Deci, aria laterală a unei prisme este egală cu produsul dintre lungimea muchiei laterale și perimetrul secțiunii perpendiculare pe muchia laterală a prismei.

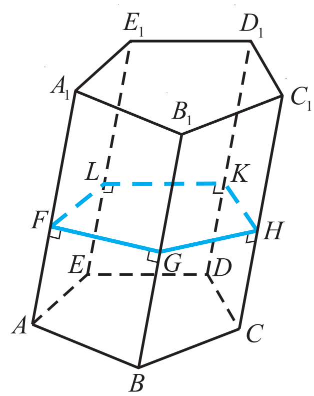



Fig. 7.13

# Probleme propuse

*Profilurile umanist, arte, sport*

## A

**1.** Aria totală a unui cub este de 96 $cm^2$. Să se afle:
a) lungimea diagonalei cubului;
b) lungimea diagonalei unei fețe a cubului.

**2.** Diagonala unei prisme patrulatere regulate este de 13 cm, iar diagonala feței laterale – de 12 cm. Să se afle aria totală a prismei.

**3.** Baza unei prisme drepte cu toate muchiile de 4 cm este un romb cu un unghi de 30°. Să se determine aria totală a prismei.

**4.** Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic, a cărui ipotenuză este de două ori mai mare decât o catetă. Să se afle măsurile unghiurilor secțiunii prismei cu planul determinat de mijloacele muchiilor laterale.

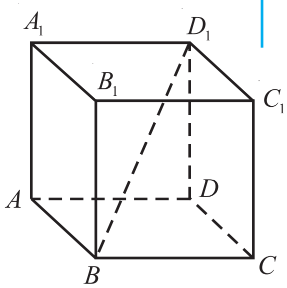
## B

**5.** Baza unei prisme drepte este un romb cu latura de 6 cm şi unghiul ascuțit de 60°. Cea mai mare diagonală a prismei formează cu planul bazei un unghi de 45°. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor prismei;
b) aria totală a prismei.

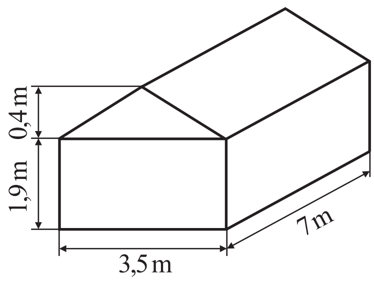
**6.** Lungimea fiecărei muchii a unei prisme hexagonale regulate este de 6 cm. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor prismei;
b) ariile secțiunilor diagonale;
c) aria totală a prismei.

**7.** *Lucrați în perechi!* Baza unei prisme drepte este un trapez isoscel cu bazele de 10 cm și 4 cm. Unghiul ascuțit al trapezului este congruent cu unghiul format de diagonala prismei şi planul bazei şi este de 45°. Să se afle lungimea:
a) muchiei laterale a prismei;
b) diagonalei prismei.

**8.** În desenul alăturat $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este un cub. Desenați proiecția ortogonală a segmentului $BD_1$ pe planul $(ABB_1)$.




**9.** Să se determine cantitatea de vopsea necesară pentru a vopsi pe dinafară un garaj de forma şi dimensiunile indicate în desen, consumul de vopsea fiind de 40 g la 1 $m^2$.




**10.** Determinați aria totală a paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile 1 cm, 2 cm şi 3 cm.

**11.** Lungimile laturilor bazei unui paralelipiped drept sunt de 6 cm şi 8 cm, iar măsura unghiului format de ele este de 60°. Lungimea muchiei laterale este de 8 cm. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor paralelipipedului;
b) aria totală a paralelipipedului.

## C

**12.** Lungimea laturii bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 6 cm, iar înălțimea ei este de 8 cm. Să se afle unghiul format de două diagonale, ce pornesc din acelaşi vârf, ale fețelor laterale ale prismei.

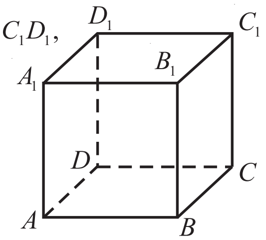
**13.** Prin latura bazei prismei triunghiulare regulate $ABCA_1B_1C_1$ este dus un plan care intersectează muchia laterală opusă în mijlocul ei $E$. Se ştie că latura bazei este de 6 cm, iar muchia laterală este de 8 cm. Să se afle:
a) aria triunghiului $ABE$;
b) aria totală a poliedrului $EABB_2A_2$, unde $A_2B_2E$ este secțiunea paralelă cu bazele prismei.

**14.** Muchiile unui paralelipiped dreptunghic au lungimile de 2 cm, 3 cm, 6 cm. Să se afle:
a) lungimile diagonalelor acestui paralelipiped;
b) măsura unghiului format de o diagonală a paralelipipedului şi fețele lui.

*Profilul real*

## A₁

**1.** BAC Dacă cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$, reprezentat în desenul alăturat, are lungimea muchiei egală cu 2 cm, atunci distanța de la vârful $B_1$ la planul $(AA_1C)$ este egală cu ☐ cm.




**2.** BAC În desenul alăturat $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este un cub cu muchia de 1 cm. Scrieți în casetă lungimea diagonalei $AC_1$ a cubului.

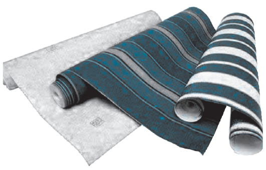
$AC_1 =$ ☐ cm.

**3.** Baza unui paralelipiped drept este un romb. Lungimea laturii rombului este de 6 cm, iar măsura unghiului ascuțit este de 60°. Se știe că aria laterală este de 144 cm². Să se afle lungimile diagonalelor paralelipipedului.

**4.** Baza unui paralelipiped dreptunghic este un pătrat cu latura de 10 cm, iar muchia laterală a paralelipipedului este de 12 cm. Să se afle:
a) aria totală a paralelipipedului dreptunghic;
b) distanța de la centrul unei baze până la dreapta ce unește centrul celeilalte baze cu un vârf al primei baze.

## B₁

**5.** *Lucrați în perechi!*
Pereții a două camere cu dimensiunile 4 m × 5 m × 2,6 m și 3 m × 4 m × 2,6 m urmează să fie tapetați.



Suprafața ușilor și ferestrelor constituie 10% din suprafața totală a pereților. Câte rulouri de tapete se vor cumpăra dacă dimensiunea foii din rulou este de 0,5 m × 10 m?

**6.** Baza prismei triunghiulare $ABCA_1B_1C_1$ este un triunghi echilateral cu lungimea laturii $a$. Muchia laterală $AA_1$ formează cu laturile bazei $AB$ și $AC$ unghiuri congruente, măsura lor fiind $\alpha$. Se știe că $AA_1 = b$.
Să se afle: a) aria laterală a prismei;
b) înălțimea prismei.

**7.** *Lucrați în perechi!* Baza prismei triunghiulare $ABCA_1B_1C_1$ este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Muchia laterală $AA_1$ formează cu planul bazei un unghi de 60°. Se știe că proiecția punctului $A_1$ pe planul bazei coincide cu centrul cercului înscris în triunghiul $ABC$. Să se afle:
a) înălțimea prismei;
b) distanța de la punctul $A_1$ până la mijlocul laturii $BC$;
c) distanța de la punctul $A$ până la mijlocul laturii $B_1C_1$;
d) aria laterală a prismei.

**8.** Baza prismei triunghiulare $ABCA_1B_1C_1$ este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Muchia laterală $AA_1$ formează cu planul bazei un unghi de 60°. Se știe că proiecția punctului $A_1$ pe planul bazei coincide cu mijlocul laturii $BC$. Să se afle:
a) înălțimea prismei;
b) distanța de la punctul $A$ până la mijlocul laturii $B_1C_1$.

**9.** În prisma patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$ se știe că $AB = a$, $AA_1 = h$. Să se afle măsura unghiului format de dreptele: a) $AB_1$ și $BC_1$;
b) $A_1C_1$ și $AB_1$.

$\mathcal{A}_L = \mathcal{P} \cdot l$

**10.** Toate muchiile prismei hexagonale regulate $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ sunt congruente.
Să se afle cosinusul unghiului format de dreptele:
a) $AB_1$ și $BC$; b) $AB_1$ și $CD_1$;
c) $AB_1$ și $DE_1$; d) $AB_1$ și $EF_1$;
e) $AB_1$ și $BD_1$; f) $AB_1$ și $BE_1$.

## C₁

**11.** În prisma triunghiulară regulată $ABCA_1B_1C_1$ se știe că $AB = a$, $AA_1 = h$.
a) Să se afle măsura unghiului format de dreptele $A_1B$ și $B_1C$.
b) Să se determine relația dintre $a$ și $h$, astfel încât dreptele menționate să fie perpendiculare.

**12.** Baza unei prisme este un trapez isoscel cu laturile paralele de 88 cm și 56 cm și cele neparalele de 34 cm. Una dintre secțiunile diagonale ale prismei este perpendiculară pe baze și este un romb cu un unghi de 30°. Să se afle înălțimea prismei.

**13.** Diagonala unei prisme patrulatere regulate are lungimea $d$ și formează cu planul bazei un unghi de măsură $\varphi$. Să se afle:
a) aria suprafeței laterale a prismei;
b) aria secțiunii diagonale a prismei.

$\mathcal{A}_T = \mathcal{P}(l + r)$

# § 3 PIRAMIDA

**Definiție**

Fie $A_1A_2...A_n$ o suprafață poligonală și $V$ un punct ce nu aparține planului poligonului. Poliedrul format din reuniunea tuturor segmentelor $VA$, unde punctul $A$ aparține poligonului $A_1A_2...A_n$, se numește **piramidă** de vârf $V$ și bază $A_1A_2...A_n$ (fig. 7.14).

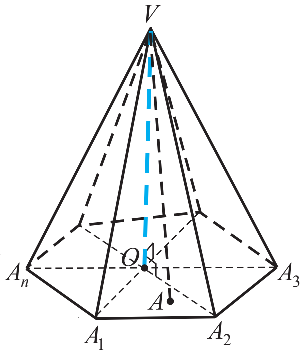



Fig. 7.14

Piramida de vârf $V$ și bază $A_1A_2...A_n$ se notează $VA_1A_2...A_n$. Punctele $A_1, A_2, ..., A_n$ se numesc ***vârfuri ale bazei***, segmentele $VA_1, VA_2, ..., VA_n$ se numesc ***muchii laterale***, suprafețele triunghiulare $VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_{n-1}A_n$ se numesc ***fețe laterale*** ale piramidei, unghiurile $A_1VA_2, A_2VA_3, ..., A_nVA_1$ se numesc ***unghiuri plane de la vârful piramidei*** (fig. 7.14).

Considerăm dreapta ce trece prin vârful $V$ al piramidei perpendiculară pe planul bazei, care intersectează acest plan în punctul $O$. Segmentul $VO$ se numește ***înălțimea*** piramidei (fig. 7.14). Lungimea acestui segment de asemenea se numește ***înălțime***.

Menționăm că piramidele pot fi clasificate după numărul de laturi ale poligonului de la bază: triunghiulare, patrulatere, pentagonale etc.

**Definiție**

Piramida se numește **piramidă regulată** dacă baza ei este un poligon regulat și proiecția vârfului pe planul bazei coincide cu centrul de simetrie al bazei.

Toate fețele laterale ale piramidei regulate sunt triunghiuri isoscele congruente.

Înălțimea unei fețe laterale a piramidei regulate, corespunzătoare laturii bazei, se numește ***apotemă*** a acestei piramide.

***Arie totală*** a unei piramide se numește suma ariilor tuturor fețelor piramidei.

Se notează $\mathcal{A}_T$.

Suma ariilor fețelor laterale ale unei piramide se numește ***arie laterală*** a piramidei.

Se notează $\mathcal{A}_L$.

Dacă notăm aria bazei cu $\mathcal{A}_B$, atunci obținem $\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B}$.

Dacă într-o piramidă regulată se cunosc lungimea $h$ a apotemei, semiperimetrul $p$ al bazei și lungimea $r$ a razei cercului înscris în baza piramidei, atunci avem:

$$\boxed{\mathcal{A}_L = h \cdot p}, \quad \boxed{\mathcal{A}_B = r \cdot p} \quad \text{și} \quad \boxed{\mathcal{A}_T = p(h+r)}.$$

**Teorema 4**

Dacă muchiile laterale ale piramidei sunt congruente, atunci poligonul de la bază este inscriptibil și înălțimea piramidei trece prin centrul cercului circumscris bazei.

*Demonstrație*:

Fie $A_1A_2...A_n$ baza piramidei, $V$ – vârful ei, iar $O$ – piciorul înălțimii (fig. 7.14).

Obținem $\Delta A_1VO \equiv \Delta A_2VO \equiv ... \equiv \Delta A_nVO$ ca triunghiuri dreptunghice ce au o catetă comună și ipotenuzele congruente. Din congruența triunghiurilor menționate rezultă că $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, adică vârfurile poligonului de la bază sunt egal depărtate de punctul $O$. Deci, punctul $O$ este centrul cercului circumscris bazei. ►

**Corolar**

Dacă unghiurile formate de înălţimea piramidei şi muchiile laterale (sau unghiurile formate de muchiile laterale cu planul bazei) sunt congruente, atunci poligonul de la bază este inscriptibil şi înălţimea piramidei trece prin centrul cercului circumscris bazei.

**Teorema 5**

Dacă feţele laterale ale piramidei formează cu planul bazei unghiuri diedre congruente, atunci în poligonul de la bază poate fi înscris un cerc, iar înălţimea piramidei trece prin centrul acestui cerc.

Menţionăm că unghiurile diedre formate de planul bazei piramidei şi feţele ei laterale se numesc ***unghiuri diedre de la bază***.

**Exerciţiu.** Demonstraţi teorema 5.

**Corolarul 1**

Dacă înălţimea piramidei formează cu feţele laterale unghiuri congruente, atunci în poligonul de la bază poate fi înscris un cerc, iar înălţimea piramidei trece prin centrul acestui cerc.

**Corolarul 2**

Dacă înălţimile feţelor laterale ale piramidei duse din vârful lor comun sunt congruente, atunci în poligonul de la bază poate fi înscris un cerc şi înălţimea piramidei trece prin centrul acestui cerc.

**Definiţie**

Secţiunea piramidei cu un plan ce trece prin vârful piramidei şi o diagonală a bazei se numeşte **secţiune diagonală**.

Secţiunea unei piramide cu un plan se construieşte la fel ca şi secţiunea prismei cu un plan.

**Problemă rezolvată**

Baza piramidei $SABCD$ este paralelogramul $ABCD$ cu laturile $AB = 6\,\text{cm}$ şi $AD = 10\,\text{cm}$. Feţele laterale $SAB$ şi $SAD$ sunt perpendiculare pe planul bazei şi formează un unghi diedru de $120°$. Cea mai mare muchie laterală a piramidei este de 14 cm (fig. 7.15). Să se reprezinte secţiunile diagonale ale piramidei. Să se determine ariile acestor secţiuni.

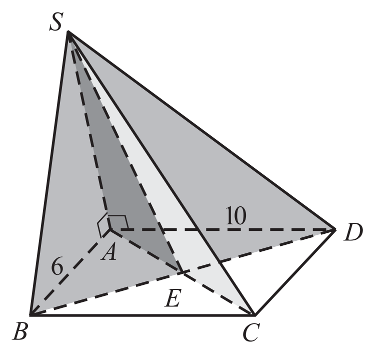


Fig. 7.15

*Rezolvare*:

Secţiunile cerute sunt triunghiurile $SAC$ şi $SBD$. Conform teoremei cosinusurilor aplicată trinughiului $ABC$ şi $ABD$ obţinem $AC = \sqrt{76}$ cm, $BD = 14$ cm.

Cum $[AB]$, $[AC]$ şi $[AD]$ sunt proiecţii ale oblicelor construite din acelaşi punct $S$ pe acelaşi plan $ABC$, rezultă că cea mai mare oblică este oblica $SD$ (ea are cea mai mare proiecţie). Deci, $SD$ = 14 cm.

Determinăm înălţimea $SA$ a piramidei:

$$SA = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Prin urmare, $\mathcal{A}_{\Delta SAC} = \frac{1}{2} SA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{19} = 4\sqrt{114}$ (cm$^2$).

Cum $\Delta SBD$ este isoscel cu laturile $SD = BD = 14$ cm, $SB = 2\sqrt{33}$ cm, obţinem $\mathcal{A}_{\Delta SBD} = \sqrt{5379}$ cm$^2$.

**Teorema 6** Dacă un plan paralel cu baza piramidei de înălțime $H$ intersectează o muchie laterală a ei și distanța de la vârful piramidei la planul secant este $h$, atunci planul secționează piramida după un poligon asemenea cu baza, coeficientul de asemănare fiind $\frac{h}{H}$.

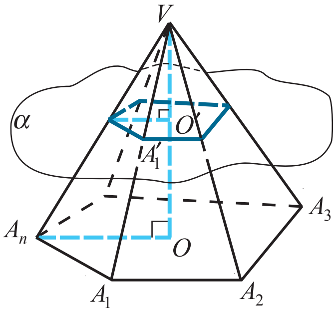


Fig. 7.16

*Demonstrație*:

Fie că muchia $VA_1$ a piramidei $VA_1A_2...A_n$ este intersectată în punctul $A_1'$ de planul $\alpha$ paralel cu baza (fig. 7.16). Considerăm omotetia cu centrul $V$ și coeficientul $k = \frac{h}{H} = \frac{VO'}{VO}$.

Această omotetie aplică punctul $A_1$ pe punctul $A_1'$, iar planul bazei – pe planul ce trece prin punctul $A_1'$ paralel cu baza, adică pe planul $\alpha$. Cum omotetia este o transformare de asemănare, rezultă că secțiunea piramidei cu planul $\alpha$ este un poligon asemenea cu baza. ►

**Corolar** $\mathcal{A}_{\text{sec.}} : \mathcal{A}_B = h^2 : H^2 = k^2$, unde $\mathcal{A}_{\text{sec.}}$ – aria secțiunii, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei.

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

1. Baza unei piramide este un dreptunghi cu laturile de 3 cm și 4 cm. Fiecare muchie laterală a piramidei are lungimea de 6,5 cm. Să se afle aria secțiunii diagonale a piramidei.

2. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este de 8 cm, iar înălțimea ei este de 7 cm. Să se afle:
a) lungimea muchiei laterale a piramidei;
b) măsura unghiului diedru format de fața laterală și planul bazei.

3. Aria laterală a unei piramide patrulatere regulate este de 140 cm$^2$, iar aria totală este de 165 cm$^2$. Să se afle:
a) lungimea laturii bazei piramidei;
b) înălțimea piramidei;
c) distanța de la vârful piramidei la planul secant paralel cu baza, astfel încât aria secțiunii să fie de $\frac{1200}{253}$ cm$^2$.

### B

4. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic cu catetele de 5 cm și 12 cm. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri congruente de 45°. Să se afle înălțimea piramidei.

5. Baza unei piramide este un dreptunghi cu laturile de 6 cm și 8 cm. Înălțimea piramidei este de 10 cm și trece prin punctul de intersecție a diagonalelor bazei. Să se afle măsura unghiului format de o muchie laterală și planul bazei.

6. ***Lucrați în perechi!*** Baza unei piramide este un triunghi echilateral cu latura de 12 cm. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri congruente de aceeași măsură 30°. Să se afle:
a) înălțimea piramidei;
b) aria totală a piramidei.

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B$$

### C

7. Baza unei piramide este un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Una dintre muchiile laterale este perpendiculară pe planul bazei și congruentă cu latura ei. Să se afle aria laterală a piramidei.

8. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic având catetele de 12 cm și 16 cm. Înălțimile fețelor laterale formează cu înălțimea piramidei unghiuri congruente de aceeași măsură 45°. Să se afle:
a) înălțimea piramidei; b) aria laterală a piramidei.

*Profilul real*

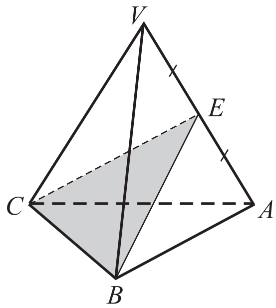
## A₁

**1.** Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic având catetele de lungimi 5 cm şi 12 cm. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri congruente de măsură 60°. Să se determine înălţimea piramidei.

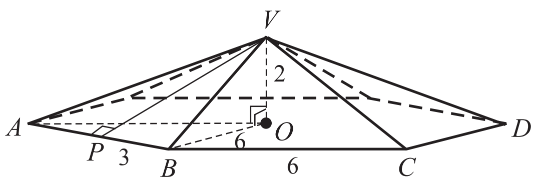
**2.** ***Lucraţi în perechi!*** Baza unei piramide este un trapez isoscel având lungimile laturilor paralele 10 cm şi 40 cm. Se ştie că înălţimile feţelor laterale, duse din vârful piramidei, sunt egale cu 12,5 cm. Să se determine:
a) înălţimea piramidei;
b) aria laterală a piramidei;
c) măsura unghiurilor diedre de la baza piramidei;
d) aria secţiunii piramidei cu planul care trece prin mijlocul înălţimii piramidei şi este paralel cu baza ei.

## B₁

**3.** Baza piramidei regulate $VABC$ este triunghiul echilateral $ABC$ cu latura egală cu 12 cm. Muchia laterală este egală cu 5 cm. Să se afle aria triunghiului $BCE$, unde $E$ este mijlocul muchiei laterale $VA$.




**4.** ***Investigaţi!*** Acoperişul unui rezervor are forma unei piramide hexagonale regulate cu înălţimea de 2 m şi latura bazei de 6 m. Să se afle numărul de foi de tablă de formă dreptunghiulară necesare pentru acoperiş, dacă o foaie are dimensiunile de 0,7 m şi 1,4 m şi pentru încheieturi se folosesc 10% din suprafaţa necesară de tablă.




**5.** Să se afle lungimea muchiei laterale şi aria laterală a unei piramide regulate cu latura bazei de 20 cm şi unghiul diedru de la bază de 60°, dacă piramida este:
a) triunghiulară;
b) patrulateră;
c) hexagonală;
d) $n$-unghiulară, $n \geq 3$.

$$\mathcal{A}_L = h \cdot p$$

**6.** Baza piramidei $VABC$ este triunghiul echilateral $ABC$ cu lungimea laturii 16 cm. Faţa laterală $VCB$ este perpendiculară pe planul $ABC$. Se ştie că $m(\angle VAB) = m(\angle VAC) = 60°$. Să se afle:
a) lungimile muchiilor laterale ale piramidei;
b) aria laterală a piramidei;
c) măsura $\varphi$ a unghiului diedru format de feţele $VAB$ şi $CAB$.

$$\mathcal{A}_T = p(h + r)$$

## C₁

**7.** Baza piramidei este un paralelogram ale cărui diagonale au lungimile $d_1$ şi $d_2$. Unghiurile diedre de la bază au aceeaşi măsură $\varphi$. Să se afle:
a) aria laterală a piramidei;
b) ariile secţiunilor diagonale ale piramidei.

**8.** Baza unei piramide este un romb şi proiecţia vârfului pe planul bazei coincide cu punctul de intersecţie a diagonalelor bazei. Să se demonstreze că unghiurile diedre de la bază sunt congruente.

**9.** Baza unei piramide este un trapez isoscel. Proiecţia vârfului pe planul bazei coincide cu punctul de intersecţie a mediatoarelor laturilor laterale ale trapezului. Să se demonstreze că:
a) unghiurile formate de muchiile laterale şi planul bazei sunt congruente;
b) muchiile laterale sunt congruente.

**10.** ***Lucraţi în grup!*** Proiect *Aplicaţii ale piramidelor: de la piramidele egiptene până la piramidele contemporane*.

# § 4 TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

Dacă o piramidă este intersectată de un plan paralel cu baza, atunci se obțin două poliedre situate în semispații diferite delimitate de acest plan. Unul dintre aceste poliedre este o piramidă, iar celălalt poliedru se numeşte ***trunchi de piramidă*** (fig. 7.17).

Poligonul din secțiune şi poligonul de la baza piramidei se numesc ***baza mică*** şi, respectiv, ***baza mare*** ale trunchiului de piramidă, celelalte fețe ale trunchiului de piramidă sunt trapeze şi se numesc ***fețe laterale***. Laturile neparalele ale fețelor laterale se numesc ***muchii laterale***. Segmentul cu extremitățile în planele bazelor trunchiului de piramidă, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălțimea*** trunchiului de piramidă ($[OO']$, fig. 7.17). Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălțime*** a trunchiului de piramidă.

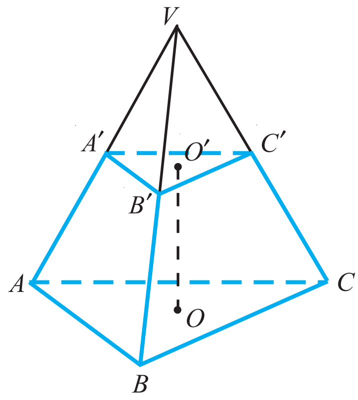
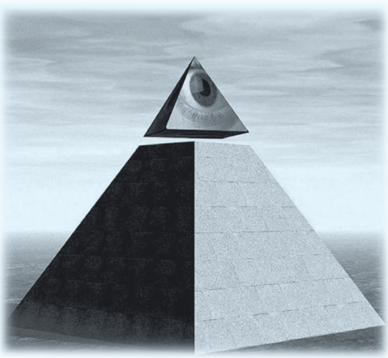


Fig. 7.17



***Aria totală*** a unui trunchi de piramidă se notează $\mathcal{A}_T$ şi este suma ariilor tuturor fețelor trunchiului. Suma ariilor fețelor laterale se numeşte ***arie laterală*** şi se notează $\mathcal{A}_L$. Dacă aria bazei mici este $\mathcal{A}_b$, iar aria bazei mari este $\mathcal{A}_B$, atunci obținem:

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b}.$$

Trunchiul de piramidă obținut dintr-o piramidă regulată se numeşte ***trunchi de piramidă regulată***. Înălțimea unei fețe laterale a trunchiului de piramidă regulată se numeşte ***apotemă***. Dacă lungimea apotemei unui trunchi de piramidă regulată este $h$, iar lungimile laturilor bazelor sunt $a$ şi $b$, atunci

$$\boxed{\mathcal{A}_L = n\frac{a+b}{2}h},$$

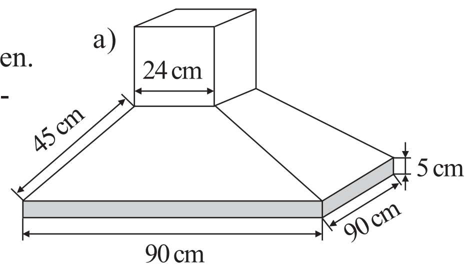
unde $n$ este numărul de laturi ale bazei.

**Observație**

Pot fi construite diverse secțiuni ale planului cu trunchiul de piramidă: secțiuni diagonale, secțiuni paralele cu bazele, secțiuni care conțin înălțimea etc.

**Problemă rezolvată**

Coşul unei hote are dimensiunile indicate în desen. Câți metri pătrați de tablă sunt necesari pentru confecționarea unui astfel de coş dacă pentru încheieturi se folosesc 10% din suprafața necesară de tablă (fig. 7.18 a))?



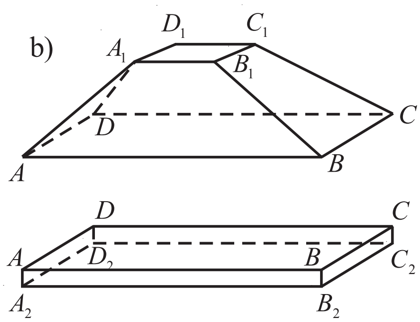



Fig. 7.18

*Rezolvare*:

Coşul hotei are forma unui trunchi de piramidă $ABCDA_1B_1C_1D_1$ de care este ataşat paralelipipedul dreptunghic $A_2B_2C_2D_2ABCD$ (fig. 7.18 b)). Calculăm aria laterală $\mathcal{A}_1$ a paralelipipedului: $\mathcal{A}_1 = 4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}05 = 0{,}18$ (m$^2$). Aflăm înălțimea $h$ a trapezului $ABB_1A_1$ şi determinăm aria laterală $\mathcal{A}_2$ a trunchiului de piramidă:

$$h = \sqrt{0{,}45^2 - 0{,}33^2} \approx 0{,}306 \text{ (m)}, \quad \mathcal{A}_2 = 4\cdot\frac{0{,}9+0{,}24}{2}\cdot 0{,}306 \approx 0{,}70 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Calculăm aria coşului: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = 0{,}18 + 0{,}70 = 0{,}88$ (m$^2$).

Deci, necesarul de tablă este: $0{,}88 + 0{,}1\cdot 0{,}88 = 0{,}968 \approx 1$ (m$^2$).

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Laturile bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 4 cm şi 14 cm, iar muchia laterală este de 13 cm. Să se determine:
a) aria laterală a trunchiului de piramidă;
b) înălţimea trunchiului de piramidă;
c) ariile secţiunilor diagonale ale trunchiului de piramidă.

**2.** *Lucraţi în perechi!* Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt de 4 cm şi 10 cm, iar muchia laterală este de 5 cm. Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de piramidă;
b) înălţimea trunchiului de piramidă;
c) aria secţiunii trunchiului cu planul care trece prin mijlocul înălţimii şi este paralel cu bazele trunchiului.

### B

**3.** Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 6 cm şi 16 cm, iar înălţimea este de 10 cm.
Să se determine:
a) lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă;
b) aria laterală a trunchiului de piramidă.

**4.** Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt de 2 cm şi 8 cm, iar înălţimea este de 6 cm. Să se afle:
a) lungimea muchiei laterale a trunchiului de piramidă;
b) aria totală a trunchiului de piramidă.

### C

**5.** O groapă săpată în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată are adâncimea de 1,5 m. Latura bazei de jos este de 0,8 m, iar latura bazei de sus – de 1,6 m. Să se determine lungimea muchiei laterale a trunchiului (gropii).

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$$

***Profilul real***

### $A_1$

**1.** Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sunt $a$ şi $b$ $(a < b)$, iar măsura unghiului diedru de la baza mare este $\varphi$. Să se afle:
a) înălţimea trunchiului de piramidă;
b) apotema trunchiului de piramidă;
c) aria laterală a trunchiului de piramidă.

### $B_1$

**2.** *Lucraţi în perechi!* În trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1 = a$, $AB = b$ $(a < b)$ şi măsura unghiului format de muchia laterală şi planul bazei mari este $\alpha$. Să se determine:
a) aria triunghiului $AB_1D_1$;
b) cosinusul unghiului diedru format de planul $AB_1D_1$ şi planul bazei $ABCD$;
c) ariile secţiunilor diagonale.

$$\mathcal{A}_L = n\frac{a+b}{2}h$$

**3.** Un piedestal de granit are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Laturile bazelor sunt de 2,8 m şi 2 m, iar muchia laterală este de 3,64 m. Să se determine înălţimea piedestalului (cu aproximaţie de 0,01 m).

### $C_1$

**4.** Bazele unui trunchi de piramidă sunt dreptunghiuri. Laturile bazei mici sunt de 3 cm şi 4 cm, iar ale bazei mari – de 9 cm şi 12 cm. Muchia laterală este de 13 cm. Să se afle:
a) aria secţiunilor diagonale;
b) aria laterală a trunchiului de piramidă.

# § 5 VOLUMUL POLIEDRELOR

## 5.1. Noțiunea de volum al corpului

În clasele precedente deja am calculat volumele unor corpuri, însă formulele respective n-au fost demonstrate. În cele ce urmează vom prezenta demonstrațiile acestora.

Vom considera numai ***corpuri simple***, adică corpuri ce pot fi divizate într-un număr finit de tetraedre care nu au puncte interioare comune.

**Definiție**

Se numeşte **funcție volum** funcția $f\colon K \to \mathbb{R}_+$, $f = \mathcal{V}(K)$, care asociază fiecărui corp simplu $K$ un număr real nenegativ $\mathcal{V}(K)$, numit **volumul corpului respectiv**, astfel încât au loc proprietățile:

**1°** dacă corpurile $K_1$ şi $K_2$ sunt congruente, atunci $\mathcal{V}(K_1) = \mathcal{V}(K_2)$;

**2°** dacă corpul $K$ este reuniunea a două corpuri $K_1$ şi $K_2$, ce nu au puncte interioare comune, atunci $\mathcal{V}(K) = \mathcal{V}(K_1) + \mathcal{V}(K_2)$ (*proprietatea aditivă*);

**3°** există corpul $K_0$, al cărui volum este egal cu unitatea de volum, adică $\mathcal{V}(K_0) = 1$.

În calitate de unitate de volum, de regulă, se ia volumul cubului a cărui muchie are lungimea egală cu 1, fără a specifica unitatea de măsură a lungimii laturii. Astfel, dacă latura cubului este 1 mm, 1 cm, 1 m etc., atunci acestora le vor corespunde, respectiv, unități de volum 1 mm³, 1 cm³, 1 m³ etc.

Din proprietatea 2° a funcției volum rezultă următoarea

**Consecință**

Dacă corpul $K_1$ se include în corpul $K_2$, adică $K_1 \subseteq K_2$, atunci

$$\mathcal{V}(K_1) \le \mathcal{V}(K_2).$$

Pentru simplificarea calculului volumelor corpurilor, vom admite, fără a demonstra,

**Teorema 7**

**Principiul lui Cavalieri**

Fie $K_1$ şi $K_2$ două corpuri simple şi $\alpha$ un plan. Dacă corpurile $K_1$ şi $K_2$ sunt amplasate față de planul $\alpha$ astfel încât pentru orice plan $\beta \parallel \alpha$ secțiunile corpurilor $K_1$ şi $K_2$ cu planul $\beta$ au arii egale, atunci $\mathcal{V}(K_1) = \mathcal{V}(K_2)$.

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647), geometru italian

Pentru a ilustra principiul lui Cavalieri, vom considera două piramide, $K_1$ şi $K_2$: baza piramidei $K_1$ este un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime $\sqrt{2}a$, iar piramida $K_2$, de aceeaşi înălțime cu $K_1$, are baza un pătrat cu latura de lungime $a$ (fig. 7.19).

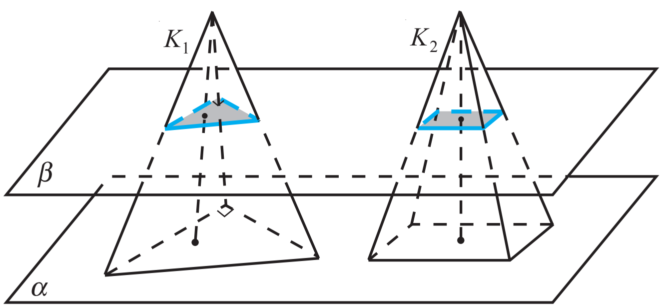



Fig. 7.19

Fie $\alpha$ un plan arbitrar fixat. Piramidele se amplasează astfel, încât bazele lor să se conțină în planul $\alpha$, iar vârfurile lor să fie situate în unul din semispațiile delimitate de planul $\alpha$ (fig. 7.19).

Fie planul $\beta \parallel \alpha$ care intersectează piramidele $K_1$ și $K_2$.

Dacă aria secțiunii piramidei $K_1$ cu planul $\beta$ este $\mathcal{A}_1$, iar aria secțiunii piramidei $K_2$ cu planul $\beta$ este $\mathcal{A}_2$, atunci se poate arăta că $\frac{\mathcal{A}_1}{a^2} = \frac{\mathcal{A}_2}{a^2}$ (corolarul teoremei 6 din § 3, ariile bazelor piramidelor date sunt egale cu $a^2$), de unde $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.

Deci, $\mathcal{V}(K_1) = \mathcal{V}(K_2)$.

**Observație** Din cele relatate mai sus rezultă că piramidele (respectiv prismele) cu ariile bazelor egale și cu înălțimile congruente au volume egale.

## 5.2. Volumul paralelipipedului

Admitem fără demonstrație următoarea teoremă.

**Teorema 8** Volumul unui paralelipiped dreptunghic este egal cu produsul lungimilor muchiilor ce pornesc din același vârf.

$$\boxed{\mathcal{V} = abc}$$

**Observație** Aici și în celelalte teoreme se consideră că lungimile muchiilor se exprimă în aceleași unități de măsură.

**Corolar** Volumul cubului cu muchia $a$ este $\boxed{\mathcal{V} = a^3}$.

## 5.3. Volumul prismei

**Teorema 9** Volumul prismei este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțime.

*Demonstrație*:

Fie $\alpha$ planul suport al bazei prismei date, $H$ – înălțimea prismei, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei prismei. Construim un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu una dintre baze în planul $\alpha$, situat în același semispațiu, delimitat de planul $\alpha$, cu prisma dată, având dimensiunile:

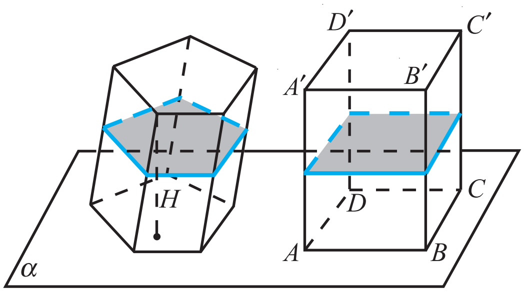


Fig. 7.20

$AB = a = \sqrt[3]{\mathcal{A}_B \cdot H}$, $BC = \frac{a^2}{H}$, $AA' = H$ (fig. 7.20).

Deci, aria bazei paralelipipedului dreptunghic este

$$AB \cdot BC = a \cdot \frac{a^2}{H} = \frac{a^3}{H} = \frac{\mathcal{A}_B \cdot H}{H} = \mathcal{A}_B.$$

Secțiunea prismei date și cea a paralelipipedului dreptunghic construit cu plane paralele cu planul $\alpha$ au arii egale cu $\mathcal{A}_B$, deoarece poligoanele obținute în secțiuni sunt congruente respectiv cu baza fiecărei prisme. Din teorema 8 rezultă că volumul paralelipipedului dreptunghic construit $\mathcal{V}_{\text{par.}} = a \cdot \frac{a^2}{H} \cdot H = a^3 = \mathcal{A}_B \cdot H$, iar din teorema 7 rezultă că $\mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{V}_{\text{par.}} = \mathcal{A}_B \cdot H$, deci $\boxed{\mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{A}_B \cdot H}$.

## 5.4. Volumul piramidei

Fie $ABCA_1$ o piramidă triunghiulară. Completăm piramida până la o prismă triunghiulară cu bazele $ABC$ şi $A_1B_1C_1$ (fig. 7.21), muchia laterală fiind $AA_1$. Bazele piramidelor $ABCA_1$ şi $A_1B_1C_1B$ au arii egale şi înălţimile piramidelor sunt congruente, deci $\mathcal{V}_{ABCA_1} = \mathcal{V}_{A_1B_1C_1B}$. Pe de altă parte, planul $A_1BC_1$ împarte piramida $A_1BCC_1B_1$ cu vârful $A_1$ în două piramide triunghiulare, $BCC_1A_1$ şi $BC_1B_1A_1$, cu vârful comun $A_1$ şi cu bazele $BCC_1$ şi respectiv $BC_1B_1$. Aceste piramide au aceeaşi înălţime (dusă din vârful comun $A_1$) şi ariile bazelor egale $(\mathcal{A}_{\Delta BCC_1} = \mathcal{A}_{\Delta BB_1C_1})$, deci $\mathcal{V}_{B_1C_1BA_1} = \mathcal{V}_{BC_1CA_1}$ (a se vedea observaţia din secvenţa 5.1).

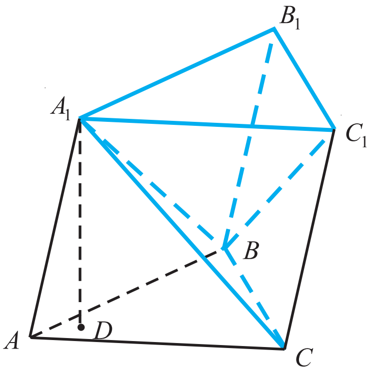



Fig. 7.21

Prisma construită este divizată în trei piramide triunghiulare ($ABCA_1$, $A_1B_1C_1B$, $BC_1CA_1$) ce nu au puncte interioare comune şi care au volume egale. Dacă notăm volumul unei piramide cu $\mathcal{V}_{\text{pir.}}$, atunci $3\mathcal{V}_{\text{pir.}} = \mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{A}_B \cdot H$, unde $\mathcal{A}_B$ este aria triunghiului $ABC$, iar $H$ este înălţimea comună a prismei şi a piramidei.

Prin urmare, ***volumul unei piramide triunghiulare*** se calculează folosind formula

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H}\ .$$

Dacă baza piramidei este un poligon convex cu $n$ laturi, atunci dintr-un vârf al poligonului de la bază ducem toate diagonalele lui şi considerăm planele determinate de aceste diagonale şi muchia laterală ce uneşte vârful piramidei cu vârful comun al diagonalelor construite. Aceste plane divizează piramida dată în $(n-2)$ piramide triunghiulare, care au aceeaşi înălţime şi ariile bazelor egale cu $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-2}$ (fig. 7.22, $n = 5$). În baza proprietăţii aditive a funcţiei volum, constatăm că volumul piramidei date este egal cu suma volumelor piramidelor triunghiulare în care s-a divizat piramida dată, adică

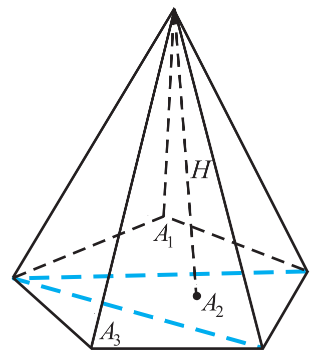



Fig. 7.22

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_1 \cdot H + \frac{1}{3}\mathcal{A}_2 \cdot H + \ldots + \frac{1}{3}\mathcal{A}_{n-2} \cdot H =$$

$$= \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_{n-2}) = \frac{1}{3}H \cdot \mathcal{A}_B,$$

unde $\mathcal{A}_B$ este aria bazei piramidei date.

**Teorema 10**

Dacă $H$ este înălţimea unei piramide, iar $\mathcal{A}_B$ este aria bazei acestei piramide, atunci volumul piramidei se calculează folosind formula:

$$\mathcal{V}_{\text{pir.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H.$$

## 5.5. Volumul trunchiului de piramidă

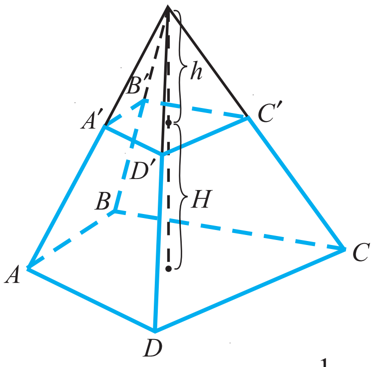



Fig. 7.23

Fie un trunchi de piramidă cu înălțimea $H$, iar $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{A}_B$ $(\mathcal{A}_b < \mathcal{A}_B)$ – ariile bazelor.

Completăm trunchiul de piramidă până la o piramidă al cărei vârf va fi intersecția dreptelor suport ale muchiilor laterale (în figura 7.23 se consideră cazul $n = 4$).

Astfel, obținem două piramide cu același vârf, iar bazele trunchiului de piramidă sunt și bazele acestor două piramide. Notăm cu $h$ înălțimea piramidei a cărei bază are aria $\mathcal{A}_b$. Atunci, volumul trunchiului de piramidă este egal cu diferența volumelor piramidelor construite.

Obținem:

$$\mathcal{V}_{\text{tr. pir.}} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B(h+H) - \frac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot h = \frac{1}{3}H\left[\mathcal{A}_B\left(\frac{h}{H}+1\right) - \mathcal{A}_b \cdot \frac{h}{H}\right] = \frac{1}{3}H\left[\frac{h}{H}(\mathcal{A}_B - \mathcal{A}_b) + \mathcal{A}_B\right]. \qquad (1)$$

Baza mică a trunchiului de piramidă poate fi considerată ca secțiune a piramidei construite cu planul care este paralel cu planul bazei. Se știe (corolarul teoremei 6 din § 3) că raportul ariilor secțiunilor paralele cu baza este egal cu pătratul raportului distanțelor acestor secțiuni de la vârful piramidei, adică $\dfrac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B} = \left(\dfrac{h}{h+H}\right)^2$, de unde $\dfrac{h}{h+H} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}}$ sau $\dfrac{h}{H} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}}$.

Dacă substituim valoarea raportului $\dfrac{h}{H}$ în (1), obținem:

$$\mathcal{V}_{\text{tr. pir.}} = \frac{1}{3}H\left[\frac{\sqrt{\mathcal{A}_b}}{\sqrt{\mathcal{A}_B} - \sqrt{\mathcal{A}_b}}(\mathcal{A}_B - \mathcal{A}_b) + \mathcal{A}_B\right] = \frac{1}{3}H[\sqrt{\mathcal{A}_b}(\sqrt{\mathcal{A}_B} + \sqrt{\mathcal{A}_b}) + \mathcal{A}_B] \text{ sau}$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{tr. pir.}} = \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_b\mathcal{A}_B} + \mathcal{A}_B)}\,.$$

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

1. Diagonala unui cub este de 8 cm. Să se afle volumul cubului.

$$\mathcal{V} = a^3$$

2. Aria feței unui cub este de 16 cm$^2$. Să se determine volumul cubului.
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este un cub cu muchia de 3 cm.
   a) Determinați lungimea diagonalei $A_1C$.
   b) Aflați aria suprafeței cubului.
   c) Determinați volumul cubului.
4. Lungimile muchiilor unui paralelipiped dreptunghic se raportă ca 2 : 3 : 5. Se știe că muchia mai mare este de 15 cm. Să se afle:
   a) lungimea diagonalei paralelipipedului;
   b) aria suprafeței totale a paralelipipedului;
   c) volumul paralelipipedului.

### B

5. ***Lucrați în perechi!*** O piscină are forma unui paralelepiped dreptunghic. La un moment dat în piscină era o anumită cantitate de apă. După un timp oarecare, se pierde prin evaporare o cantitate de $600\ \text{m}^3$ de apă. Se știe că aria bazei piscinei este de $500\ \text{m}^2$, iar nivelul la care ar ajunge apa dacă peste cantitatea inițială s-ar adăuga cea rămasă după evaporare ar fi de 3 m.
   a) Determinați nivelul inițial al apei din piscină.
   b) Aflați nivelul final al apei din piscină.

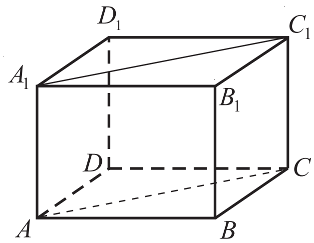
**6.** Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 5 cm şi 12 cm. Măsura unghiului format de diagonala trunchiului şi planul bazei este de 60°.
Să se determine:
a) aria secțiunii diagonale a trunchiului de piramidă;
b) volumul trunchiului de piramidă.

**7.** Baza unei prisme drepte este un triunghi. Lungimile a două laturi ale triunghiului sunt de 7 cm şi 8 cm, iar măsura unghiului format de ele este de 60°. Se ştie că lungimea muchiei laterale este de 6 cm.
Să se afle:
a) aria secțiunii prismei cu planul ce trece prin muchia laterală şi mediana bazei, corespunzătoare laturii necunoscute;
b) volumul prismei.

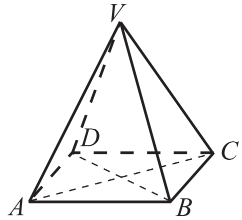
**8.** ***Investigați!*** Lungimea unei bârne de lemn de forma unei prisme drepte este de 235 cm, secțiunea ei perpendiculară pe muchia laterală este un trapez isoscel, lungimile bazelor fiind de 12 cm şi 30 cm, iar latura laterală – de 15 cm. Capacitatea de încărcare a unui camion este de 3,5 tone. Să se afle numărul maxim de bârne pe care le poate transporta un camion, dacă densitatea lemnului este de 0,7 g/cm$^3$.

**9.** Pentru construirea unui zid s-au folosit 5286 de blocuri de piatră. Dimensiunile fiecărui bloc sunt 20 cm × 20 cm × 40 cm.
Să se afle volumul zidului construit (cu aproximație de 0,1 m$^3$), dacă se ştie că mortarul a mărit volumul zidului cu 12%.

**10.** BAC Volumul prismei patrulatere regulate $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este egal cu 24 cm$^3$, iar înălțimea prismei este egală cu 6 cm. Determinați aria secțiunii diagonale $ACC_1A_1$.




**11.** BAC Aria bazei unei piramide patrulatere regulate este egală cu 32 cm$^2$. Determinați lungimea muchiei laterale a piramidei, dacă volumul ei este egal cu 32 cm$^3$.




**12.** Lucrare practică *Calcularea ariei suprafeței clasei.*

## C

**13.** Toate muchiile unei piramide triunghiulare au lungimea de 6 cm.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H$$

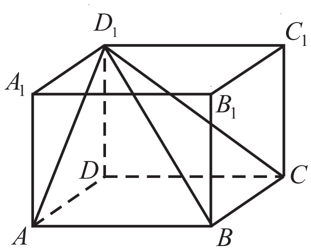
Să se afle:
a) aria totală a piramidei;
b) volumul piramidei.

**14.** Un cub cu muchia de 4 cm şi un paralelipiped dreptunghic cu muchiile de 8 cm, 14 cm, 4 cm sunt confecționate din plumb. Aceste două corpuri au fost topite într-un singur cub. Să se afle lungimea muchiei cubului obținut.

***Profilul real***

## A$_1$

**1.** BAC În desenul alăturat $ABCDA_1B_1C_1D_1$ este o prismă dreaptă, volumul căreia este egal cu 9 cm$^3$. Scrieți în casetă volumul piramidei $ABCDD_1$.




☐ cm$^3$

**2.** Baza unei prisme este un trapez isoscel cu bazele de 8 cm şi 16 cm şi unghiul ascuțit de 45°. Proiecția unei muchii laterale pe planul bazei coincide cu latura laterală a trapezului de la bază. Să se afle volumul prismei, dacă măsura unghiului format de muchia laterală şi planul bazei este de 60°.

**3.** Baza unei prisme este un trapez isoscel cu bazele de 28 cm şi 44 cm şi laturile laterale de 17 cm. Proiecția unei muchii laterale a prismei coincide cu raza cercului circumscris bazei. Să se determine volumul prismei, dacă lungimea muchiei laterale este de 32 cm.

**4.** Baza unei prisme este un trapez cu bazele de 8 cm şi 16 cm, iar una dintre laturile laterale are lungimea de 10 cm. Unul dintre vârfurile unei baze este situat la distanța de 15 cm de toate laturile celeilalte baze. Să se afle volumul prismei.

$$\mathcal{V}_{\text{prismei}} = \mathcal{A}_B \cdot H$$

## B1

5. Baza unui paralelipiped drept este un romb. Înălțimea paralelipipedului este egală cu $\sqrt{3}$ cm, iar diagonalele lui formează cu planul bazei unghiuri de 45° și 30°. Determinați volumul paralelipipedului.

6. Muchia laterală a unei piramide triunghiulare regulate este de 5 cm, iar latura bazei este de $4\sqrt{3}$ cm. Determinați volumul piramidei.

7. ***Lucrați în perechi!*** Fețele unui paralelipiped sunt romburi congruente. Lungimea laturii unui romb este $a$ și unghiul ascuțit are măsura $\alpha$.
Să se afle:
a) aria totală a paralelipipedului;
b) volumul paralelipipedului.

8. Baza unei piramide este un triunghi isoscel cu laturile de 10 cm, 10 cm, 12 cm. Toate muchiile laterale au lungimea de 14 cm. Să se determine volumul piramidei.

9. ***Lucrați în perechi!*** Baza unei piramide este un trapez cu lungimile bazelor de 4 cm și 10 cm, iar lungimea unei laturi laterale este de 5 cm. Unghiurile diedre de la baza piramidei sunt congruente și au măsura de 60°.
Să se afle:
a) aria laterală a piramidei;
b) volumul piramidei.

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B$$

10. Un bazin are forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 4 m, 6 m și 0,9 m și se umple cu apă prin două țevi. În cât timp se va umple cu apă bazinul gol dacă debitul unei țevi este de 60 $l$ de apă pe minut, iar al celeilalte – de 40 $l$ pe minut?

11. Baza unei prisme drepte este un paralelogram cu laturile de 2 cm și 4 cm și un unghi de 60°. Determinați volumul prismei, dacă diagonala cea mai mare a prismei formează cu planul bazei un unghi de 30°.

12. Lungimea laturii bazei unei piramide triunghiulare regulate este de 8 cm, iar unghiul format de muchia laterală și planul bazei are măsura de 60°. Să se afle:
a) aria laterală a piramidei;
b) volumul piramidei.

13. ***Lucrați în perechi!*** Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt de 4 cm și 10 cm. Măsura unghiului diedru de la baza mai mare este de 60°. Să se afle:
a) aria totală a trunchiului de piramidă;
b) volumul trunchiului de piramidă.

## C1

14. Înălțimea unei piramide triunghiulare regulate este congruentă cu latura bazei. Să se determine măsura unghiului format de muchia laterală și planul bazei.

15. Cele trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghic sunt în progresie aritmetică și suma lor este egală cu 18 cm. Aria totală a paralelipipedului este de 198 cm$^2$. Să se determine volumul paralelipipedului.

16. În prisma triunghiulară $ABCA_1B_1C_1$ se știe că: $AC = b$, $CB = a$, $CC_1 = l$, $m(\angle ACB) = \gamma$, $\angle BCC_1 \equiv \angle ACC_1$. Să se determine volumul prismei, dacă înălțimea prismei dusă din vârful $C_1$ intersectează latura $AB$.

17. Bazele unei prisme oblice sunt poligoane regulate cu $n$ laturi. Toate muchiile prismei au lungimile egale cu $a$. Să se afle măsura unghiului format de planul bazei și muchia laterală, dacă volumul prismei este $\mathcal{V}$.

# Exerciții și probleme recapitulative

***Profilurile umanist, arte, sport***

## A

1. O sală de clasă are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 14 m, lățimea de 7 m și înălțimea de 3,5 m. Pereții și tavanul sălii vor fi acoperiți cu două straturi de vopsea de aceeași culoare. Suprafața ocupată de ușă și ferestre constituie $\frac{1}{10}$ din suprafața preconizată vopsirii. La prima vopsire se consumă câte 1 kg de vopsea pentru fiecare 8 m$^2$ de suprafață, iar la a doua vopsire, 1 kg de vopsea acoperă 11 m$^2$ de suprafață. Să se determine cantitatea totală de vopsea necesară pentru efectuarea acestor lucrări.

**2.** ***Lucrați în perechi!***

În sala de clasă cu dimensiunile din problema **1** sunt 40 de elevi și profesorul. Se știe că aerul dintr-o încăpere devine periculos pentru respirație când fiecare metru cub de aer conține 4 $dm^3$ de dioxid de carbon. Se mai știe că fiecare persoană expiră de 16 ori într-un minut câte 0,5 $dm^3$ de aer, care conține 5% dioxid de carbon. În aceste condiții, să se determine timpul maxim admisibil fără aerisirea sălii de clasă.

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_B\cdot H$$

## B

**3.** ***Investigați!*** O cutie paralelipipedică are lungimea de 51 cm, lățimea de 24 cm și înălțimea de 15 cm. Cutia este umplută cu piese cubice cu muchia de 3 cm. Câte cubușoare sunt în cutie?

**4.** ***Lucrați în perechi!*** Latura bazei unei piramide regulate *VABCD* este de 12 cm, iar muchia laterală – de 10 cm.
a) Desenați piramida *VABCD* și trasați înălțimea *VO*.
b) Calculați aria triunghiului *VAC*.
c) Aflați aria suprafeței totale a piramidei *VABCD*.
d) Calculați volumul piramidei *VABCD*.

**5.** Lucrare de laborator *Calcularea volumelor obiectelor de forma poliedrelor*.

## C

**6.** Diferența lungimilor muchiilor a două cuburi este *d*, iar diferența volumelor lor este $37d^3$. Să se afle lungimile muchiilor cuburilor.

**7.** Muchiile unui paralelipiped dreptunghic sunt congruente cu laturile unui triunghi dreptunghic, suma lungimilor lor fiind egală cu 60 cm. Volumul paralelipipedului este de 6,24 $dm^3$. Să se determine lungimile muchiilor paralelipipedului.

**8.** ***Lucrați în grup!*** Proiect *Poliedrele în arhitectura localității*.

***Profilul real***

## $A_1$

**1.** Într-un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei 20 cm × 25 cm și înălțimea de 10 cm este turnată apă până la jumătatea înălțimii lui. Cu cât se va ridica nivelul apei în vas dacă în el se scufundă un cub greu cu muchia de 5 cm?

**2.** ***Investigați!*** Să se determine cu cât se ridică nivelul apei în recipient, dacă cubul din problema **1** este din lemn (greutatea specifică a lemnului fiind de 0,5 $g/cm^3$).

## $B_1$

**3.** BAC Baza unei prisme drepte este un triunghi dreptunghic cu o catetă de 8 cm. Raza cercului înscris în triunghiul din bază este de 3 cm și este congruentă cu înălțimea prismei. Determinați volumul prismei.

**4.** BAC Într-o piramidă patrulateră regulată aria bazei este de 64 $cm^2$, iar muchia laterală este de $\sqrt{41}$ cm. Determinați volumul piramidei.

**5.** BAC Rombul *ABCD* cu aria de $18\sqrt{3}$ $cm^2$ și $m(\angle ABC)=60°$ este baza piramidei *VABCD*. Muchia *VB* este perpendiculară pe planul bazei și are lungimea de $6\sqrt{3}$ cm. Determinați măsura unghiului format de muchia *VD* cu planul bazei piramidei.

**6.** ***Lucrați în perechi!*** Laturile bazelor unui trunchi de piramidă hexagonală regulată sunt de 36 cm și 22 cm, iar fețele laterale sunt înclinate față de planul bazei mari sub un unghi de 60°. Să se determine volumul trunchiului de piramidă.

**7.** Lucrare de laborator *Calcularea volumelor corpurilor de forma poliedrelor*.

## $C_1$

**8.** Fie rombul *ABCD* cu diagonalele $AC=2d$, $BD=2b$ și dreptele $AA_1$, $CC_1$ perpendiculare pe planul rombului, astfel încât $AA_1=a$, $CC_1=c$, punctele $A_1$ și $C_1$ sunt de aceeași parte a planului rombului. Să se determine volumele piramidelor $BACC_1A_1$, $BADA_1$, $BCDC_1$, $BDA_1C_1$.

**9.** Fie *OABC* o piramidă ale cărei fețe *OAB*, *OAC*, *OBC* sunt triunghiuri dreptunghice cu $OA=OB=OC=a$.
Să se afle: a) volumul piramidei; b) aria feței *ABC*; c) înălțimea piramidei dusă din *O*.

**10.** ***Lucrați în grup!*** Proiect *Poliedrele în arhitectura localității*.

# Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

### *Profilurile umanist, arte, sport*

**1.** Completați spațiile astfel încât propozițiile obținute să fie adevărate:

a) „Fețele laterale ale unei prisme drepte sunt ____________, iar muchia laterală coincide cu ____________ prismei”.

b) „Toate fețele laterale ale piramidei regulate sunt triunghiuri ____________ ____________”.

c) „Secțiunea diagonală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este un ____________”.

**2.** Lungimea muchiei laterale a unei piramide patrulatere regulate este de 12 cm şi formează cu planul bazei un unghi de 60°. Aflați:

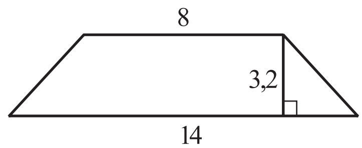
a) aria totală a piramidei;

b) ce procent constituie aria bazei din aria laterală;

c) volumul piramidei.

**3.** Un postament are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată, lungimile laturilor bazelor căruia sunt de 4 cm şi 8 cm, iar înălțimea este de 12 cm. Determinați de câtă vopsea e nevoie pentru a vopsi fața laterală a postamentului, dacă pentru 1 m² se foloseşte 200 g de vopsea. Rotunjiți răspunsul până la zecimi.

**4.** Secțiunea terasamentului căii ferate este un trapez isoscel şi arată ca în figura alăturată (dimensiunile sunt indicate în metri). Aflați câți metri cubi de pământ sunt într-un kilometru de terasament de cale ferată.




### *Profilul real*

**1.** Încercuiți litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

a) „Secțiunea prismei cu planul care conține înălțimea este un dreptunghi.” **A** **F**

b) „Secțiunea piramidei cu planul care conține înălțimea este un triunghi.” **A** **F**

c) „Secțiunea diagonală a trunchiului de piramidă patrulateră este un trapez isoscel.” **A** **F**

**2.** Baza unei piramide patrulatere *EABCD* este un romb *ABCD* cu latura de lungime $a$ şi măsura unghiului ascuțit *BAD* egală cu $a$. Unghiurile diedre formate de planul bazei şi fețele laterale sunt congruente şi au măsura $b$. Determinați:

a) aria totală a piramidei;

b) volumul piramidei.

**3.** Lungimile laturilor bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată se raportă ca 2 : 3. Muchia laterală are lungimea $l$ şi formează cu planul bazei mai mari un unghi de măsură $a$. Aflați:

a) aria laterală a trunchiului de piramidă;

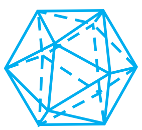
b) volumul trunchiului de piramidă.

**4.** Secțiunea transversală a unui canal de scurgere este un triunghi isoscel cu baza de 1,4 m şi înălțimea corespunzătoare bazei de 1,2 m. Determinați cantitatea maximă (în metri cubi) de apă care poate curge prin acest canal timp de o oră, dacă viteza apei este de 2 m/s.

# Poliedre

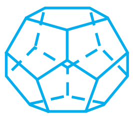
## Poliedre regulate

### Icosaedru regulat



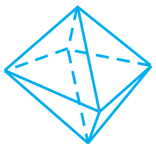
Toate fețele sunt triunghiuri echilaterale congruente și din fiecare vârf pleacă 5 muchii.

### Dodecaedru regulat



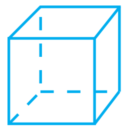
Toate fețele sunt penta-goane regulate congruente și din fiecare vârf pleacă 3 muchii.

### Octaedru regulat



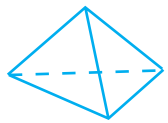
Toate fețele sunt triunghiuri echilaterale congruente și din fiecare vârf pleacă 4 muchii.

### Cub



Toate fețele sunt pătrate congruente.

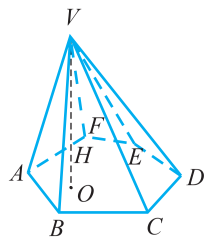
### Tetraedru regulat



Toate patru fețe sunt triunghiuri echilaterale congruente.

## Alte poliedre

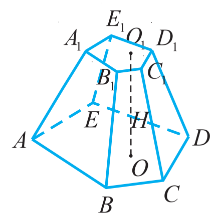
### Piramidă




$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H;$

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_b$

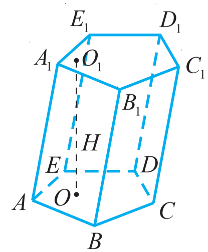
### Trunchi de piramidă




$\mathcal{V} = \frac{1}{3}H(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \mathcal{A}_b})$

$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$

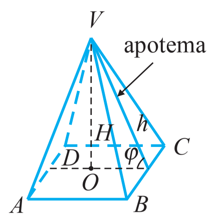
### Prismă




$\mathcal{V} = \mathcal{A}_B \cdot H;$

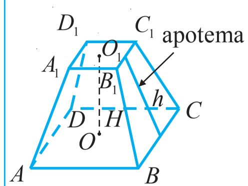
$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_L$

### Piramidă regulată



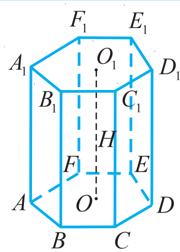

$\mathcal{A}_L = \mathcal{P}_B \cdot h = \frac{\mathcal{A}_B}{\cos\varphi}$

### Trunchi de piramidă regulată




$\mathcal{A}_L = \frac{1}{2}(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot h$

### Prismă regulată




$\mathcal{A}_L = \mathcal{P}_B \cdot H$

Modulul

# 8

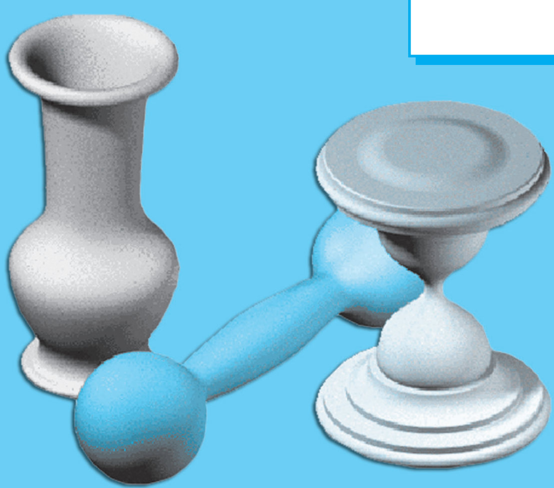
# Corpuri de rotație

*Ceea ce cunoaştem este prea puțin, ceea ce nu ştim este imens.*
Pierre-Simon de Laplace

**Obiectivele modulului**

- recunoaşterea corpurilor de rotație, clasificarea lor după diferite criterii;
- construirea secțiunilor corpurilor de rotație cu diferite plane;
- recunoaşterea figurilor geometrice plane din cadrul corpurilor de rotație;
- utilizarea în diferite contexte a proprietăților corpurilor de rotație;
- utilizarea în diferite contexte a formulelor pentru calculul ariilor suprafețelor şi volumelor corpurilor de rotație;
- *recunoaşterea secțiunilor conice şi a aplicării acestora în diverse domenii.

1. Cilindrul
2. Conul
3. Trunchiul de con
4. Sfera. Corpul sferic



$$\mathcal{A}_T = \pi R(G+R)$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

# § 1 CILINDRUL

## 1.1. Noțiunea de cilindru

Prin analogie cu definiția prismei se definește și cilindrul.

**Definiție**

Fie $\mathscr{D}$ un disc inclus în planul $\alpha$, $g$ – o dreaptă ce intersectează planul $\alpha$ într-un singur punct (fig. 8.1) și planul $\beta$ paralel cu planul $\alpha$ $(\alpha \neq \beta)$.
Corpul geometric format din intersecția stratului determinat de planele $\alpha$ și $\beta$ cu reuniunea dreptelor paralele cu dreapta $g$ ce trec prin fiecare punct al discului $\mathscr{D}$ se numește **cilindru circular** (fig. 8.1).

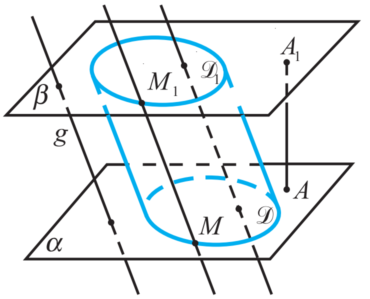


Fig. 8.1

Intersecția reuniunii tuturor dreptelor paralele cu $g$, ce trec prin fiecare punct al discului $\mathscr{D}$, cu planul $\beta$ este un disc $\mathscr{D}_1$. Discul $\mathscr{D}_1$ este congruent cu discul $\mathscr{D}$, deoarece la translația în direcția dreptei $g$, ce aplică planul $\alpha$ pe planul $\beta$, discul $\mathscr{D}$ se aplică pe discul $\mathscr{D}_1$.

Discurile $\mathscr{D}$ și $\mathscr{D}_1$ se numesc ***baze*** ale cilindrului. Dacă punctul $M$ aparține cercului care mărginește discul $\mathscr{D}$, iar $M_1$ aparține cercului care mărginește discul $\mathscr{D}_1$ și $[MM_1] \parallel g$, atunci segmentul $MM_1$ se numește ***generatoare*** a cilindrului (fig. 8.1). Dacă punctul $A \in \alpha$, iar $A_1 \in \beta$ și $[AA_1] \perp \alpha$, atunci segmentul $AA_1$ se numește ***înălțimea*** cilindrului. Lungimea acestui segment de asemenea se numește ***înălțimea*** cilindrului.

Reuniunea tuturor generatoarelor unui cilindru se numește ***suprafață laterală*** a cilindrului.

Se poate constata că orice punct ce aparține bazelor sau suprafeței laterale este punct de frontieră a cilindrului, iar celelalte puncte ale cilindrului sunt interioare cilindrului și reuniunea lor formează ***interiorul cilindrului***.

În cele ce urmează vom studia un caz particular și frecvent întâlnit al cilindrului, în care dreapta $g$ este perpendiculară pe planul $\alpha$. În acest caz cilindrul se numește ***cilindru circular drept***.

În conformitate cu definiția rotației (a se vedea manualul de matematică pentru clasa a XI-a, modulul X, § 7) formulăm următoarea

**Definiție**

Se numește **cilindru circular drept** corpul geometric ce se obține prin rotația unui dreptunghi $ABCD$ în jurul dreptei suport a unei laturi (fig. 8. 2).

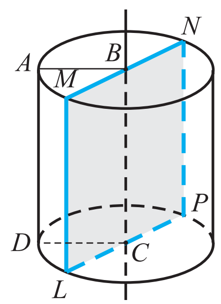


Fig. 8.2

Dreapta suport în jurul căreia se rotește dreptunghiul se numește ***axă de rotație a cilindrului*** sau ***axă a cilindrului***. Secțiunea cilindrului circular drept cu un plan ce trece prin axa cilindrului este un dreptunghi şi se numeşte ***secțiune axială*** (*LMNP*, fig. 8.2). Laturile lui (*ML* şi *NP*), paralele axei, se numesc generatoare ale cilindrului. Cercurile ce se obțin la rotația laturilor perpendiculare axei ([*BA*] şi [*CD*], fig. 8.2) se numesc **baze ale cilindrului**. Raza bazei se mai numeşte şi **rază a cilindrului**. Fiecare generatoare este perpendiculară bazelor cilindrului. Lungimea generatoarei se numeşte **înălțime a cilindrului**.

## 1.2. Aria laterală, aria totală şi volumul cilindrului

În clasa a IX-a am obținut ***formula de calcul a ariei laterale a cilindrului***, folosind desfăşurarea lui:

$$\boxed{\mathcal{A}_L = 2\pi RH}\,.$$

**Definiție**

Suma dintre aria laterală a cilindrului şi ariile celor două baze se numeşte **aria totală a cilindrului**:

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + 2\mathcal{A}_B = 2\pi HR + 2\pi R^2} \quad \text{sau} \quad \boxed{\mathcal{A}_T = 2\pi R(H+R)}\,.$$

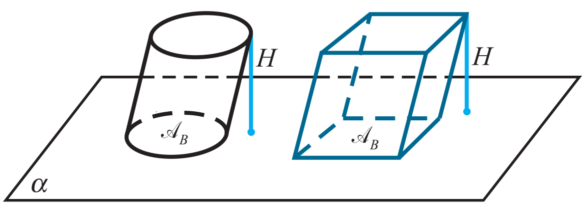


Fig. 8.3

Pentru a deduce formula de calcul al volumului cilindrului, vom considera o prismă a cărei înălțime este egală cu înălțimea cilindrului (notată cu *H*) şi care are aria bazei egală cu aria bazei cilindrului: $\mathcal{A}_B = \pi R^2$. Dacă o bază a cilindrului şi o bază a prismei se includ în planul $\alpha$ (fig. 8.3), atunci, conform principiului lui Cavalieri, rezultă că prisma şi cilindrul au volume egale, adică $\mathcal{V}_{\text{cil.}} = \mathcal{V}_{\text{prismei}} = H \cdot \mathcal{A}_B = H \cdot \pi R^2$, unde *H* este înălțimea cilindrului, iar *R* este raza bazei.

Aşadar, ***volumul unui cilindru circular*** poate fi calculat folosind formula

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{cil.}} = \pi R^2 H}\,.$$

Menționăm că pentru un cilindru circular drept formula $\mathcal{V}_{\text{cil}} = \pi R^2 H$ poate fi obținută folosind integrala definită (modulul 3, § 2).

**Probleme rezolvate**

**1** Să se determine volumul unui cilindru circular drept cu aria totală de $72\pi(1+\sqrt{3})$ cm$^2$, ştiind că un segment determinat de centrul unei baze şi un punct de pe cercul celeilalte baze este congruent cu diametrul bazei.

*Rezolvare*:

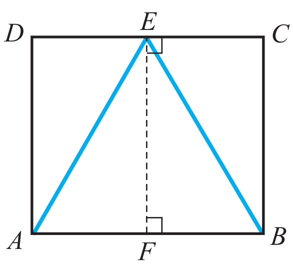


Fig. 8.4

Considerăm o secțiune axială *ABCD* a cilindrului (fig. 8.4). Fie *E* şi *F* centrele bazelor cilindrului.

Din enunțul problemei deducem că $\Delta EAB$ este echilateral, deci $EA = EB = AB = 2R$, unde *R* este raza bazei cilindrului. Înălțimea cilindrului $EF = \dfrac{AB\cdot\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} = H$.

Aria totală a cilindrului $\mathcal{A}_T = 2\pi R(R+H) = 2\pi R(R+R\sqrt{3}) = 2\pi R^2(1+\sqrt{3})$.

Obținem ecuația: $2\pi R^2(1+\sqrt{3}) = 72\pi(1+\sqrt{3})$, din care aflăm $R = 6$ (cm).

Prin urmare, volumul cilindrului $\mathcal{V} = \pi FB^2 \cdot EF = \pi \cdot 6^2 \cdot 6\sqrt{3} = 216\pi\sqrt{3}$ (cm$^3$).

*Răspuns:* $216\pi\sqrt{3}$ cm$^3$.

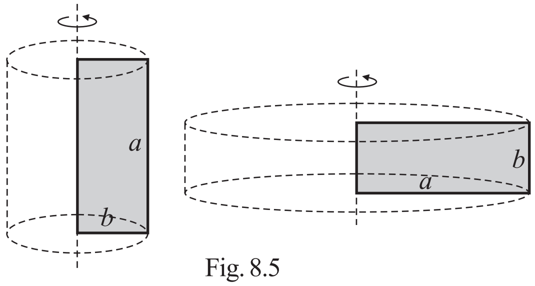


Fig. 8.5

**2** La rotația completă a unui dreptunghi în jurul dreptei suport a laturii mai mari de lungime $a$ şi în jurul dreptei suport a laturii mai mici de lungime $b$ se obțin în spațiu doi cilindri ale căror arii totale sunt de $150\pi$ cm$^2$ şi, respectiv, $300\pi$ cm$^2$ (fig. 8.5).

a) Să se afle dimensiunile dreptunghiului.

b) Să se compare ariile laterale ale cilindrilor.

c) Să se compare volumele cilindrilor.

*Rezolvare*:

a) În conformitate cu formula pentru aria totală a cilindrului şi datele problemei, alcătuim şi rezolvăm sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 2\pi b(a+b)=150\pi \\ 2\pi a(a+b)=300\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(a+b)=75 \\ a(a+b)=150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5, \\ a=10. \end{cases}$$

Deci, dreptunghiul are latura mai mare $a=10$ cm şi latura mai mică $b=5$ cm.

b) Ariile laterale ale cilindrilor sunt egale şi sunt de $100\pi$ cm$^2$.

c) Volumul cilindrului obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mici se calculează cu formula $\mathscr{V}=\pi a^2 b$ şi este egal cu $500\pi$ cm$^3$, iar volumul cilindrului obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mari se calculează cu formula $\mathscr{V}=\pi b^2 a$ şi este egal cu $250\pi$ cm$^3$.

Deci, cilindrul obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mari are volumul mai mic decât volumul cilindrului obținut la rotația dreptunghiului în jurul laturii mai mici.

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria de 16 cm$^2$. Să se determine:
a) aria laterală a cilindrului;
b) volumul cilindrului.

$$\mathscr{A}_L = 2\pi RH$$

**2.** Să se afle volumul unui cilindru, dacă suma razei bazei şi înălțimii lui este egală cu 30 cm, iar raportul dintre aria laterală şi suma ariilor bazelor lui este $\frac{7}{3}$.

**3.** Înălțimea unui cilindru circular drept este de 5 cm, iar raza bazei lui este de 6 cm. Să se afle lungimea diagonalei secțiunii axiale a cilindrului.

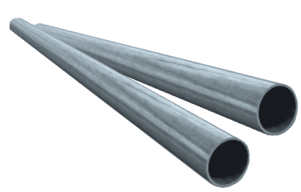
### B

**4.** Secțiunea axială a unui cilindru are perimetrul de 18 cm şi raportul dintre aria totală a cilindrului şi aria lui laterală este $\frac{7}{5}$. Să se determine volumul cilindrului.

**5.** Să se afle înălțimea unui cilindru, ştiind că ea este cu 4 cm mai mare decât diametrul bazei şi că aria laterală a cilindrului este de $32\pi$ cm$^2$.

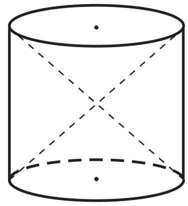
**6.** ***Lucrați în perechi!*** La o fabrică se produc cutii de tinichea în formă de cilindru cu raza bazei de 5 cm şi înălțimea de 6 cm. Să se determine câți metri pătrați de tinichea se consumă la confecționarea a 5 000 000 de cutii, dacă se ştie că pentru unirea bazelor cutiei cu suprafața laterală se folosesc suplimentar 13% de tinichea din suprafața totală (considerăm $\pi=3{,}14$).

**7.** ***Investigați!*** Capacitatea de încărcare a unui camion este de 3,5 tone. Să se afle numărul maxim de țevi pe care le poate transporta camionul, dacă țevile



sunt confecționate din plumb, lungimea lor este de 4 m, diametrul exterior al țevilor este de 16 cm, diametrul lor interior este de 12 cm, iar densitatea plumbului este de 11,38 g/cm$^3$ (considerăm $\pi = 3{,}14$).

8. Diagonalele secțiunii axiale a unui cilindru circular drept sunt reciproc perpendiculare şi au lungimea de 4 cm. Determinați aria laterală a cilindrului.



## C

9. Lungimea unor bârne de lemn în formă de cilindru circular drept este de 3,3 m. Diametrul bârnelor variază între 14 cm şi 26 cm. Capacitatea de încărcare a unui camion este de 3,5 t. Să se afle limitele între care variază numărul maxim de bârne pe care le poate transporta un camion, dacă densitatea specifică a lemnului este de 0,8 g/cm$^3$.

10. Un vas fără capac are forma unui cilindru. Înălțimea vasului este de 1,5 m, iar diametrul bazei reprezintă 40% din înălțime. Să se determine dacă este suficient 1 kg de vopsea pentru a vopsi integral vasul în interior şi exterior, consumul fiind de 150 g la 1 m$^2$ (considerăm $\pi = 3{,}14$).

$$\mathcal{V}_{cil.} = \pi R^2 H$$

*Profilul real*

## A₁

1. Aria laterală a unui cilindru circular drept este $A$. Să se afle aria secțiunii axiale a cilindrului.

$$\mathcal{A}_L = 2\pi RH$$

## B₁

2. *Lucrați în perechi!* Ariile laterale a doi cilindri sunt egale. Să se demonstreze că raportul volumelor lor este egal cu raportul razelor.

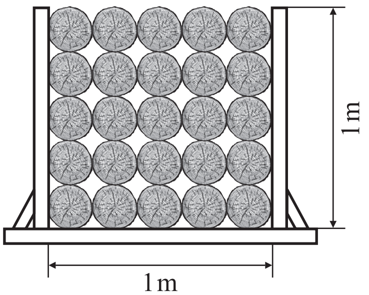
$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + 2\mathcal{A}_B$$

## C₁

3. Înălțimea unui cilindru circular drept este $H$, iar raza bazei este $R$. Un plan intersectează bazele cilindrului după două coarde congruente de lungime $R$ (planul intersectează axa cilindrului). Să se afle distanța dintre aceste două coarde.

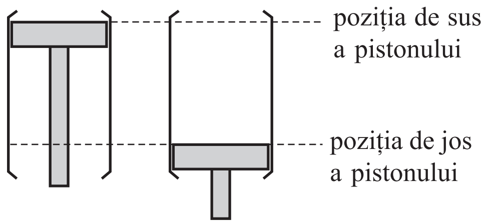
4. Extremitățile segmentului $AB$ aparțin cercurilor bazelor unui cilindru circular drept. Înălțimea cilindrului este de 6 cm, raza bazei – de 5 cm şi distanța dintre axa cilindrului şi dreapta $AB$ – de 3 cm. Să se afle:
a) lungimea segmentului $AB$;
b) măsura unghiului format de dreapta $AB$ şi una dintre bazele cilindrului.

5. Unitatea de măsură pentru volume egală cu 1 m$^3$ utilizată pentru măsurarea lemnelor aşezate în stive se numeşte *ster*. Presupunem că 1 m$^3$ de buşteni de formă cilindrică cu diametrul de 20 cm şi lungimea de 1 m sunt aşezați în stivă ca în desen.




a) Să se determine volumul locului gol dintre buşteni (considerăm $\pi = 3{,}14$).
b) Ce procent din volum ocupă lemnele?
c) Se va schimba oare volumul locului gol dintre buşteni dacă buştenii ar avea diametrul de 25 cm? De 10 cm?

6. Motorul unui autoturism conține patru cilindri cu diametrul interior de 79 mm. În fiecare cilindru este un piston care efectuează o mişcare alternativă de ridicare şi coborâre. Cursa pistonului este distanța dintre poziția de sus a pistonului şi poziția de jos a pistonului şi este de 80 mm. Volumul de lucru al motorului este volumul determinat de cursa celor 4 pistoane. Să se determine volumul de lucru al motorului (în cm$^3$) (considerăm $\pi = 3{,}14$).




7. Fundul unui vas de formă cilindrică cu raza de 0,6 m şi înălțimea de 1,6 m este situat pe podeaua unei încăperi cu înălțimea de 1,95 m. Poate oare fi răsturnat vasul pentru a-l scoate prin rostogolire din încăpere?

# § 2 CONUL

## 2.1. Noțiuni generale

Fie discul $\mathcal{D}$ inclus în planul $\alpha$ şi $S$ un punct care nu aparține planului $\alpha$.

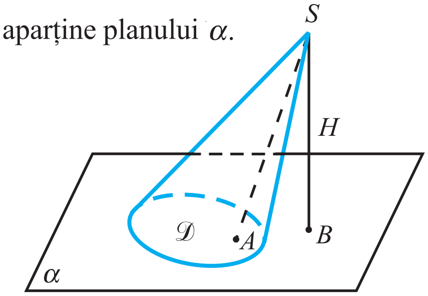


Fig. 8.6

**Definiție**

Corpul geometric format din reuniunea segmentelor ce unesc punctele discului $\mathcal{D}$ cu punctul $S$ se numeşte **con circular** (fig 8.6).

Punctul $S$ se numeşte ***vârful*** conului, iar discul $\mathcal{D}$ se numeşte ***baza*** lui.

Fie $B$ proiecția vârfului $S$ pe planul $\alpha$. Segmentul $SB$ se numeşte ***înălțimea*** conului. Lungimea segmentului $SB$, pe care o vom nota cu $H$, de asemenea se numeşte ***înălțimea*** conului.

Segmentul ce uneşte vârful conului cu un punct al cercului de la bază se numeşte ***generatoarea*** conului.

Reuniunea tuturor generatoarelor conului constă din puncte de frontieră şi formează ***suprafața laterală*** a conului. Menționăm că orice punct al bazei de asemenea este punct de frontieră.

Mulțimea tuturor punctelor conului ce nu sunt puncte de frontieră se numeşte ***domeniul interior*** al conului.

Dacă proiecția ortogonală a vârfului conului pe planul bazei coincide cu centrul bazei, atunci conul se numeşte ***circular drept*** (fig. 8.7).

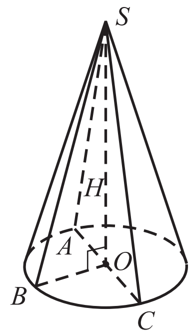


Fig. 8.7

**Definiție**

Se numeşte **con circular drept** corpul geometric ce se obține prin rotația unui triunghi dreptunghic $\Delta(SOB)$ în jurul dreptei suport a unei catete ($SO$) (fig 8.7).

Generatoarele unui con circular drept sunt congruente. Într-adevăr, dacă $[SA]$ şi $[SB]$ sunt două generatoare ale conului (fig. 8.7), atunci triunghiurile $SOA$ şi $SOB$ sunt congruente, ca triunghiuri dreptunghice ce au catete respectiv congruente.

Are loc egalitatea $SB^2 = BO^2 + OS^2$ sau $G^2 = R^2 + H^2$, unde $G$ este lungimea generatoarei, $R$ – raza bazei, $H$ – înălțimea conului circular drept.

Ca şi cilindrul circular drept, conul circular drept este un corp de rotație. El poate fi obținut prin *rotația unui triunghi dreptunghic BSO în jurul dreptei suport a unei catete* (fig. 8.7). În acest caz, cateta $SO$ ce determină axa este înălțimea conului, cealaltă catetă $BO$ este raza bazei conului, iar ipotenuza $SB$ descrie suprafața laterală a conului şi este o generatoare a lui.

Secțiunea conului circular drept cu un plan care conține axa lui se numeşte ***secțiune axială*** a conului şi este un triunghi isoscel (fig. 8.7, $\Delta SAC$).

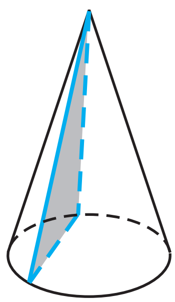


Fig. 8.8

Secțiunea conului circular drept cu un plan ce trece prin două generatoare ale lui este un triunghi isoscel (fig. 8.8).

În cele ce urmează vom secționa conul circular cu un plan paralel cu planul bazei lui.

**Teorema 1** Secțiunea conului circular cu un plan paralel cu planul bazei este un disc.

**Exercițiu.** Demonstrați teorema 1.

**Corolarul 1** Orice con secționat de un plan paralel cu planul bazei, ce intersectează înălțimea conului într-un punct interior, este împărțit în două corpuri, unul dintre care este un con. Dacă raza bazei conului dat este $R$, înălțimea $OS = H$, generatoarea $SB = G$, iar raza bazei conului obținut prin secționare este $R'$, înălțimea $OA' = H'$, generatoarea $B'S = G'$, atunci $\frac{R'}{R} = \frac{H'}{H} = \frac{G'}{G}$.

**Corolarul 2** Raportul dintre aria bazei $\mathcal{A}_B$ a unui con circular și aria $\mathcal{A}'_B$ a secțiunii paralele cu baza este egal cu pătratul raportului dintre înălțimea conului dat și înălțimea conului format prin secționare. Într-adevăr, $\frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}'_B} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \left(\frac{H}{H'}\right)^2$, deci $\frac{\mathcal{A}_B}{\mathcal{A}'_B} = \left(\frac{H}{H'}\right)^2$.

## 2.2. Aria laterală, aria totală şi volumul conului circular drept

Fie $\mathcal{C}$ un con circular drept cu raza bazei $R$ şi generatoarea $G$, atunci desfăşurarea conului constă dintr-un disc de rază $R$ şi un sector de cerc de rază $G$ (8.9). Lungimea arcului acestui sector este $2\pi R$, iar unghiul $\alpha = \frac{2\pi R}{G}$. Aria laterală $\mathcal{A}_L$ a conului este egală cu aria sectorului din desfăşurare, deci $\mathcal{A}_L = \frac{1}{2}G^2\alpha = \frac{1}{2}G^2\frac{2\pi R}{G} = \pi RG$.

Astfel, ***formula de calcul a ariei laterale a conului circular drept*** este $\boxed{\mathcal{A}_L(\mathcal{C}) = \pi RG}$ .

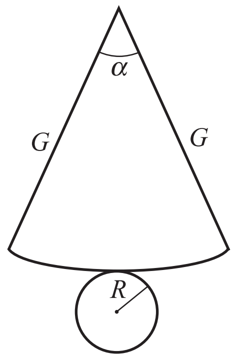



Fig. 8.9

**Definiție** Suma dintre aria laterală $\mathcal{A}_L$ şi aria bazei $\mathcal{A}_B$ se numeşte **aria totală** $\mathcal{A}_T$ a conului circular drept:

$$\boxed{\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_L + \mathcal{A}_B = \pi RG + \pi R^2} \quad \text{sau} \quad \boxed{\mathcal{A}_T = \pi R(G+R)}\,.$$

***Volumul unui con circular drept*** se calculează folosind formula:

$$\boxed{\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H}\,.$$

Pentru a demonstra această formulă, considerăm o piramidă $\mathcal{P}$ cu baza inclusă în planul $\alpha$ în care se include şi baza conului. Piramida se alege astfel încât înălțimea ei să fie egală cu înălțimea conului şi aria bazei ei să fie egală cu aria bazei conului $\mathcal{A}_B$.

Conform principiului lui Cavalieri, obținem $\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \mathcal{V}(\mathcal{P}) = \frac{1}{3}\mathcal{A}_B \cdot H$.

Deoarece $\mathcal{A}_B = \pi R^2$, obținem ***formula de calcul al volumului unui con circular drept***:

$$\boxed{\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H}\,. \qquad (2)$$

Pentru conul circular drept, acest rezultat poate fi obținut folosind calculul integral (a se vedea modulul 4, § 2, problema rezolvată 2, considerând $r = 0$).

**Problemă rezolvată**

Înălțimea unui con este $h$. Două generatoare reciproc perpendiculare împart suprafața laterală a conului în două părți ale căror arii se raportă ca $1:2$. Să se afle aria laterală și volumul conului.

*Rezolvare*:

Fie raza bazei conului $R$, iar $G$ lungimea generatoarei (fig. 8.10). Fie $[EA]$ și $[EB]$ cele două generatoare reciproc perpendiculare, iar $[EO]$ înălțimea conului. Fie partea suprafeței laterale a conului cu aria mai mică determinată de arcul $ACB$. Cum aria laterală a conului este $\pi RG$, iar ariile părților se raportă ca $1:2$, aria acestei părți este $\frac{1}{3}\pi RG$. Dacă $\alpha$ este unghiul de la vârful desfășurării acestei părți a conului, atunci aria ei este $\frac{\alpha G^2}{2}$.

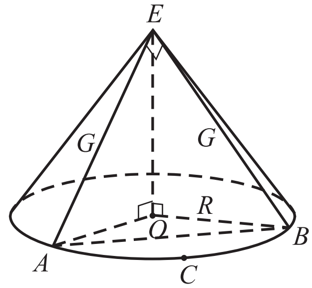


Fig. 8.10

Din egalitatea $\frac{\alpha G^2}{2}=\frac{\pi RG}{3}$ rezultă că $\alpha=\frac{2\pi R}{3G}$.

Pentru lungimea arcului $ACB$ a sectorului circular $EACB$ obținem $l=\alpha G=\frac{2\pi R}{3}$.

Fie $x=m(\angle AOB)$. Pentru lungimea arcului $ACB$ a sectorului circular $OACB$ avem $l=xR$. Din $xR=\frac{2\pi R}{3}$ rezultă $x=\frac{2\pi}{3}$. Din triunghiul dreptunghic $AEB$ obținem $AB=G\sqrt{2}$, iar din triunghiul $AOB$ obținem $AB=R\sqrt{3}$. Prin urmare, $G=R\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$. Din $\Delta EOB$ obținem $R=\sqrt{2}h$ și $G=\sqrt{3}h$. Aflăm $\mathcal{A}_L=\pi RG=\pi\sqrt{6}h^2$, $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{2}{3}\pi h^3$.

*Răspuns*: $\pi\sqrt{6}h^2$ cm$^2$, $\frac{2}{3}\pi h^3$ cm$^3$.

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Un con circular drept are generatoarea de 13 cm și raza bazei de 5 cm. Să se afle:
a) aria laterală și aria totală a conului;
b) volumul conului;
c) aria secțiunii axiale a conului.

$$\mathcal{A}_L(\mathscr{C})=\pi RG$$

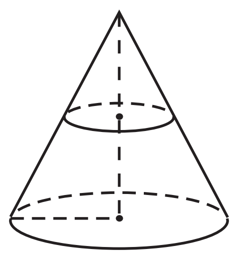
**2.** *Lucrați în perechi!* Aria totală a unui con circular drept este de $384\pi$ cm$^2$, iar aria bazei lui – de $144\pi$ cm$^2$. Să se calculeze volumul conului.

**3.** Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi dreptunghic isoscel care are o catetă de 5 cm. Să se determine: a) aria totală a conului;
b) volumul conului.

### B

**4.** *Lucrați în perechi!* Acoperișul unei fântâni este de forma unui con cu diametrul bazei de 6 m și înălțimea de 2 m. Să se afle numărul de foi de tinichea necesare pentru confecționarea acoperișului, dacă dimensiunile unei foi sunt $0,6\text{ m}\times1,5\text{ m}$, iar la încheieturi și deșeuri se consumă 11% din suprafața acoperișului ($\pi\approx3,14$).

**5.** BAC Într-un con circular drept înălțimea este de 24 cm, iar raza bazei este de 10 cm. La distanța de 6 cm de la vârf este dus un plan paralel cu baza. Determinați lungimea generatoarei conului mic obținut după secționare.



**6.** BAC Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi echilateral cu înălțimea de $4\sqrt{3}$ cm. Determinați aria latzerală a conului.

**7.** Aria laterală a unui con este egală cu $544\pi$ cm$^2$, iar înălțimea conului este de 30 cm. Să se determine generatoarea și raza bazei conului.

## C

**8.** Raportul dintre lungimea generatoarei şi lungimea razei bazei unui con circular drept este 2 : 1, iar aria laterală a conului este de $162\pi$ cm$^2$. Să se determine volumul conului.

$$\mathcal{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

**9.** Generatoarea unui con este de 26 cm, iar raportul dintre înălțimea conului şi raza bazei lui este 12 : 5. Să se calculeze aria secțiunii conului cu un plan paralel cu baza şi care divide conul în două corpuri de volume egale.

### *Profilul real*

## A₁

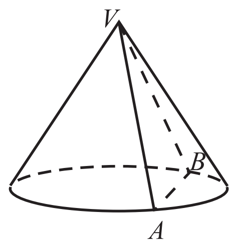
**1.** Raza bazei unui con circular drept este de 20 cm, iar generatoarea formează cu planul bazei un unghi de 45°. Conul este secționat cu un plan $\alpha$ paralel cu baza. Să se afle la ce distanță de la vârf se află planul $\alpha$, dacă:
a) aria secțiunii este egală cu jumătate din aria bazei;
b) volumele corpurilor obținute la secționarea conului sunt egale;
c) aria laterală a conului obținut la secționarea conului dat este egală cu jumătate din aria laterală a conului dat.

**2.** O coardă din baza unui con circular drept de 24 cm subîntinde un arc de 120°. Generatoarea conului formează cu planul bazei un unghi de 60°. Să se determine:
a) aria totală a conului; b) aria secțiunii axiale a conului;
c) volumul conului.

**3.** ***Lucrați în perechi!*** Un triunghi dreptunghic se roteşte în jurul dreptei suport a ipotenuzei. O catetă are lungimea $a$ şi unghiul opus ei are măsura $\alpha$. Să se afle:
a) aria corpului de rotație; b) volumul corpului de rotație.

## B₁

**4.** Fie un con circular drept cu vârful $V$ şi raza bazei de $2\sqrt{6}$ cm. Coarda $AB$ din baza conului are lungimea de $5\sqrt{3}$ cm, iar $m(\angle AVB) = 120°$. Determinați volumul conului.




**5.** Raza bazei unui con circular drept este congruentă cu înălțimea lui. Să se exprime ariile secțiunilor conului cu plane paralele cu baza în funcție de distanța $x$ dintre vârful conului şi planul secțiunii.

**6.** ***Investigați!*** Se consideră mulțimea conurilor a căror generatoare are lungime constantă, egală cu $G$, raza bazei fiind variabilă. Să se determine:
a) raza conului a cărui secțiune axială are cea mai mare arie;
b) volumul conului pentru valoarea razei obținută la a).

**7.** ***Lucrați în perechi!*** Un con din plumb cu înălțimea de 21 cm s-a retopit într-un cilindru de aceeaşi bază. Să se afle înălțimea cilindrului.

**8.** Raza $R$ a bazei unui con circular drept este egală cu înălțimea lui. Să se exprime ariile secțiunilor conului ce trec prin vârful lui în funcție de distanța $x$ dintre centrul bazei şi planul secțiunii.

**9.** ***Investigați!*** Generatoarele a două conuri formează cu planele bazelor unghiuri congruente. Să se demonstreze că ariile lor laterale se raportă ca pătratele generatoarelor.

**10.** Câți metri pătrați de pânză sunt necesari pentru a coase un cort de formă conică, cu înălțimea de 3 m şi diametrul de 4 m, dacă la cusături se consumă 5% de pânză?

**11.** ***Lucrați în perechi!*** Într-un recipient de forma unui con întors cu vârful în jos s-au turnat 340 g de mercur. Ştiind că unghiul de la vârful secțiunii axiale a conului este de 60°, iar densitatea mercurului este de $13{,}6\ \text{g}/\text{cm}^3$, să se determine înălțimea până la care este turnat mercurul ($\pi \approx 3{,}14$).

**12.** Valoarea raportului dintre aria bazei unui con circular drept şi aria secțiunii axiale este $\pi$. Să se determine măsura unghiului format de generatoare şi planul bazei.

## C₁

**13.** Un corp se obține la rotația unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza $c$ şi unghiul ascuțit $\alpha$ în jurul ipotenuzei. Să se demonstreze că volumul lui este $\mathcal{V} = \frac{\pi c^3}{12}\sin^2 2\alpha$.

**14.** ***Investigați!*** Să se demonstreze că dintre toate secțiunile conului cu plane ce trec prin vârful lui, secțiunea axială are cel mai mare perimetru.

# § 3 TRUNCHIUL DE CON

## 3.1. Noțiuni generale

Fie $\mathscr{C}$ un con circular cu vârful $S$ şi baza $\mathscr{D}(O, R)$ (fig. 8.12).

Intersectând conul $\mathscr{C}$ cu un plan $\beta \parallel \alpha$ ($\beta$ intersectează $[SO]$ într-un punct interior), obținem două corpuri. Conul $\mathscr{C}'$ are vârful $S$ şi baza discul $\mathscr{D}'$, care se obține în planul secant $\beta$. Al doilea corp, obținut prin înlăturarea din conul $\mathscr{C}$ a conului $\mathscr{C}'$, fără discul de la bază, se numeşte ***trunchi de con circular***.

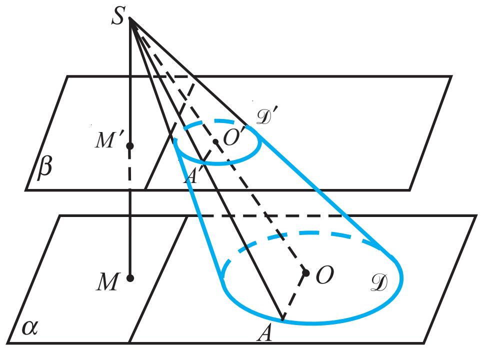



Fig. 8.12

Partea din suprafața laterală a conului $\mathscr{C}$, care se obține după înlăturarea conului $\mathscr{C}'$, se numeşte ***suprafață laterală*** a trunchiului de con.

Intersecția suprafeței laterale a trunchiului de con cu orice generatoare a conului $\mathscr{C}$ este un segment, numit ***generatoare*** a trunchiului de con (în figura 8.12 $[AA']$ este o generatoare).

Distanța dintre planele $\alpha$ şi $\beta$ se numeşte ***înălțimea*** trunchiului de con (fig. 8.12, $MM'$).

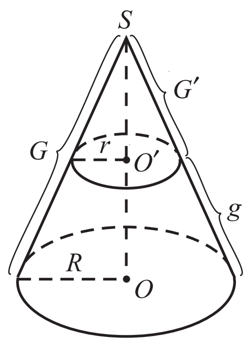



Fig. 8.13

**Definiție**

Un trunchi de con se numeşte **circular drept** dacă dreapta ce conține centrele bazelor este perpendiculară pe planele în care sunt incluse bazele trunchiului de con (fig. 8.13).

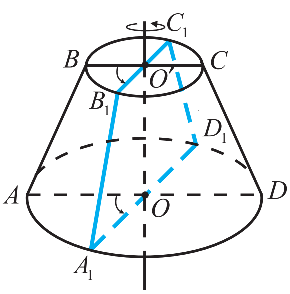



Fig. 8.14

*Un trunchi de con circular drept poate fi obținut prin rotația unui trapez isoscel în jurul dreptei $OO'$ ce trece prin mijloacele bazelor* (fig. 8.14). Dreapta $OO'$ se numeşte ***axă de simetrie*** (sau ***axă de rotație***) a trunchiului de con. Suprafața laterală a trunchiului de con se obține prin rotația segmentului $AB$ în jurul axei $OO'$.

Secțiunea trunchiului de con circular drept cu un plan care conține axa lui se numeşte ***secțiune axială*** a trunchiului şi este un trapez isoscel (fig. 8.14, trapezul $A_1B_1C_1D_1$).

## 3.2. Aria laterală, aria totală şi volumul trunchiului de con

Din definiția suprafeței laterale a trunchiului de con rezultă că aria laterală a unui trunchi de con circular drept este egală cu diferența dintre ariile laterale ale conurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}'$ care au aceeaşi axă de rotație $SO$ şi acelaşi vârf $S$, adică $\mathscr{A}_L(T) = \mathscr{A}_L(\mathscr{C}) - \mathscr{A}_L(\mathscr{C}')$, unde $\mathscr{A}_L(T)$ este aria laterală a trunchiului de con, $\mathscr{A}_L(\mathscr{C})$ este aria laterală a conului din care se obține trunchiul, $\mathscr{A}_L(\mathscr{C}')$ este aria laterală a conului care se înlătură.

Folosind notațiile din figura 8.13, obținem $\mathscr{A}_L(\mathscr{C}) = \pi RG$ şi $\mathscr{A}_L(\mathscr{C}') = \pi rG'$, unde $R$ şi $r$ sunt razele bazelor, iar $G$ şi $G'$ sunt lungimile generatoarelor conurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}'$.

Prin urmare,

$$\mathscr{A}_L(T) = \pi(RG - rG'). \qquad (1)$$

În baza corolarului 1 al teoremei 1 din § 2, avem $\dfrac{R}{r} = \dfrac{G}{G'}$.

Obținem $\dfrac{R-r}{r} = \dfrac{G-G'}{G'} = \dfrac{g}{G'}$, unde $g = G - G'$ este lungimea generatoarei trunchiului de con. Din ultima relație obținem: $G' = \dfrac{gr}{R-r}$.

Analog, se obține $G = \dfrac{Rg}{R-r}$.

Substituind $G$ şi $G'$ în egalitatea (1), obținem:

$$\mathscr{A}_L(T) = \pi\left(\frac{R^2 g}{R-r} - \frac{r^2 g}{R-r}\right) = \pi g \frac{R^2 - r^2}{R-r} = \pi g(R+r).$$

Astfel, ***formula de calcul a ariei laterale a trunchiului de con circular drept*** este

$$\boxed{\mathscr{A}_L(T) = \pi g(R+r)}\ .$$

***Aria totală a unui trunchi de con circular drept*** este egală cu suma dintre aria laterală şi ariile celor două baze ale trunchiului:

$$\boxed{\mathscr{A}_T(T) = \pi g(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2}\ .$$

Aria laterală a unui trunchi de con circular drept poate fi calculată şi prin altă metodă.

**Teorema 2**

Dacă $T$ este un trunchi de con circular drept obținut la rotația unui trapez isoscel în jurul dreptei ce trece prin mijloacele bazelor, $h$ – înălțimea trapezului, iar $d$ – distanța dintre punctul de intersecție a mediatoarei laturii laterale a trapezului cu axa şi mijlocul laturii laterale (fig. 8.15), atunci aria laterală $\mathscr{A}_L(T)$ a trunchiului de con drept este:

$$\boxed{\mathscr{A}_L(T) = 2\pi hd}\ .$$

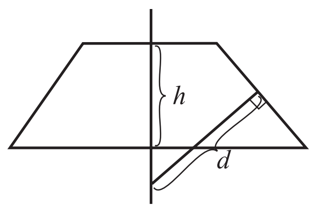



Fig. 8.15

*Demonstrație*:

Aria laterală a trunchiului de con obținut la rotația trapezului isoscel $ABCD$ în jurul axei $EF$ (fig. 8.16), unde punctele $E$ şi $F$ sunt mijloacele bazelor trapezului, se calculează folosind formula

$$\mathscr{A}_L(T) = \pi CD(EC + FD) = 2\pi CD \cdot MN \qquad (2)$$

($[MN]$ este linia mijlocie a trapezului $FECD$ şi, prin urmare, $EC + FD = 2MN$ (fig. 8.16)).

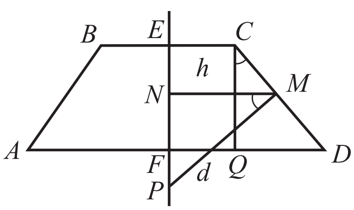



Fig. 8.16

Ducem din vârful $C$ înălțimea $CQ$ a acestui trapez şi mediatoarea $MP$ a laturii $CD$, unde $P$ este punctul de intersecție a axei şi a mediatoarei. Astfel, am obținut două triunghiuri dreptunghice asemenea, $CQD$ şi $MNP$, deoarece $\angle PMN \equiv \angle DCQ$ ca unghiuri cu laturi respectiv perpendiculare.

Din asemănarea celor două triunghiuri rezultă că

$$\frac{CD}{MP} = \frac{CQ}{MN}, \quad \text{sau} \quad CD \cdot MN = CQ \cdot MP.$$

Înlocuind în formula (2) produsul $CD \cdot MN$ cu produsul $CQ \cdot MP$, obținem

$$\mathscr{A}_L(T) = 2\pi CQ \cdot MP,$$

sau $\mathscr{A}_L(T) = 2\pi h \cdot d$, unde $h = CQ$, $d = MP$. ►

Volumul trunchiului de con este diferența dintre volumele conurilor $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}'$, adică

$$\mathscr{V}(T) = \mathscr{V}(\mathscr{C}) - \mathscr{V}(\mathscr{C}') = \frac{\pi}{3}R^2H - \frac{\pi}{3}r^2H' = \frac{\pi}{3}(R^2H - r^2H'), \quad (3)$$

unde $H$ şi $H'$ sunt înălțimile conurilor $\mathscr{C}$ şi, respectiv, $\mathscr{C}'$.

Dacă notăm cu $h$, $h = H - H'$, înălțimea trunchiului de con şi aplicăm corolarul 1 al teoremei 1 din § 2, obținem:

$$\frac{H}{H'} = \frac{R}{r}, \quad \frac{H - H'}{H'} = \frac{R - r}{r}, \quad \frac{H}{H - H'} = \frac{R}{R - r},$$

de unde $H = \dfrac{Rh}{R - r}$, $H' = \dfrac{rh}{R - r}$.

Substituind $H$ şi $H'$ în egalitatea (3), obținem:

$$\mathscr{V}(T) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^3h}{R - r} - \frac{r^3h}{R - r}\right) = \frac{\pi h}{3(R - r)}(R^3 - r^3) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

Deci, ***formula de calcul a volumului unui trunchi de con*** este

$$\boxed{\mathscr{V}(T) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)},$$

unde $h$ este înălțimea trunchiului de con, $R$ şi $r$ sunt razele bazelor trunchiului de con.

Aceeaşi formulă s-a dedus folosind calculul integral (a se vedea modulul 4, § 2, problema rezolvată 2).

**Probleme rezolvate**

**1** Razele bazelor unui trunchi de con se raportă ca 2:3. Aria suprafeței laterale a trunchiului este egală cu suma ariilor bazelor, iar volumul trunchiului este de $1900\pi$ cm$^3$. Să se afle înălțimea trunchiului de con (fig. 8.17 a)).

*Rezolvare*:

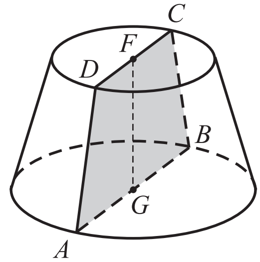
Considerăm o secțiune axială a trunchiului de con. Obținem trapezul isoscel $ABCD$, ale cărui baze $AB$ şi $CD$ sunt diametre ale bazelor trunchiului, iar latura laterală şi înălțimea $CE$ sunt generatoarea şi, respectiv, înălțimea trunchiului (fig. 8.17 b)).

Notând cu $F$ şi $G$ mijloacele bazelor $DC$ şi, respectiv, $AB$, conform enunțului, putem scrie: $FC = 2x$, $GB = 3x$, $x > 0$. De asemenea, conform enunțului, avem:

$$\pi \cdot BC(FC + GB) = \pi(FC^2 + GB^2),$$

de unde, simplificând şi substituind, obținem:

$$5x \cdot BC = 13x^2 \Rightarrow BC = \frac{13x}{5}.$$

a)


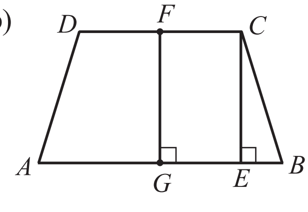

b)



Fig. 8.17

Conform teoremei lui Pitagora aplicată triunghiului dreptunghic $CEB$, avem:

$$CE=\sqrt{CB^2-BE^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{5}x\right)^2-x^2}=\frac{12}{5}x.$$

Egalăm volumul trunchiului exprimat prin $x$ cu volumul dat în enunț:

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\pi CE(FC^2+GB^2+FC\cdot GB)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{12x}{5}(4x^2+9x^2+6x^2)=\frac{4\pi\cdot 19x^3}{5}=1900\pi.$$

Aflăm $x=5$. Prin urmare, $CE=\frac{12x}{5}=12$ (cm).

*Răspuns*: 12 cm.

**2** Un triunghi echilateral cu latura de lungime $a$ se rotește în jurul unei axe, conținută de planul triunghiului, paralelă cu înălțimea triunghiului și situată la distanța $d>\frac{a}{2}$ de înălțime. Să se afle volumul $\mathcal{V}$ al corpului de rotație.

*Rezolvare*:

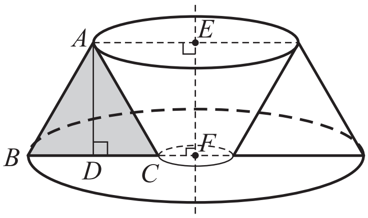


Fig. 8.18

Fie $\Delta ABC$ se rotește în jurul dreptei $EF$ (fig. 8.18). Volumul corpului de rotație obținut este egal cu diferența dintre volumele a două trunchiuri de con.

La rotația trapezului dreptunghic $EFBA$ în jurul axei $EF$ se obține trunchiul de con cu razele bazelor $AE=d$, $FB=d+\frac{a}{2}$ și înălțimea $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Volumul lui este

$$\mathcal{V}_1=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right).$$

La rotația trapezului dreptunghic $EFCA$ în jurul axei $EF$ se obține trunchiul de con cu razele bazelor $AE=d$, $FC=d-\frac{a}{2}$ și înălțimea $EF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Volumul lui este

$$\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right).$$

Prin urmare, volumul corpului de rotație este

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}_1-\mathcal{V}_2=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d+\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}\right)\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(d^2+\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d-\frac{a}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\left(d+\frac{a}{2}\right)^2-\left(d-\frac{a}{2}\right)^2+d\left(d+\frac{a}{2}-d+\frac{a}{2}\right)\right)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 3ad=\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}.$$

*Răspuns*: $\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}$.

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

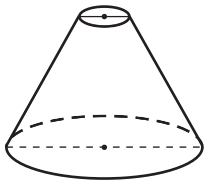
1. Razele bazelor unui trunchi de con circular drept sunt de 18 cm și 30 cm, iar generatoarea este de 20 cm.
Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de con;
b) volumul trunchiului de con;
c) raza cercului circumscris unei secțiuni axiale a trunchiului de con.

2. ***Lucrați în perechi!*** Generatoarea unui trunchi de con circular drept formează cu planul bazei mai mari un unghi de $45°$. Razele bazelor sunt de 3 cm și 6 cm. Să se determine aria laterală și volumul trunchiului de con.

$$\mathcal{A}_L(T)=\pi g(R+r)$$

## B

3. Se consideră un trunchi de con circular drept cu razele bazelor de 1 cm şi 4 cm. Determinați măsura unghiului format de generatoare cu planul bazei mari, dacă se cunoaşte că volumul trunchiului de con este egal cu $21\sqrt{3}\pi$ cm³.



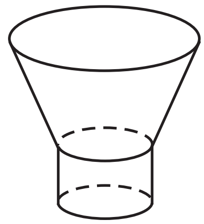
4. Într-un vas de forma unui trunchi de con circular drept s-au turnat $312\pi \text{ cm}^3$ de lichid, ceea ce constituie $\frac{3}{4}$ din capacitatea vasului. Să se determine raza deschizăturii vasului, ştiind că raza fundului vasului este de 2 cm, iar înălțimea lui este de 24 cm.

5. Să se afle capacitatea unei căldări de forma unui trunchi de con, dacă raza fundului căldării este de 9 cm, diametrul deschizăturii – de 35 cm şi adâncimea – de 38,5 cm.

6. O piesă din fontă de forma unui trunchi de con cu razele bazelor de 4 cm şi 22 cm a fost topită şi turnată într-un cilindru echivalent (de acelaşi volum), de aceeaşi înălțime. Să se afle raza bazei cilindrului.

## C

7. Coşul unei mori este alcătuit din suprafața laterală a unui trunchi de con circular drept şi din suprafața laterală a unui cilindru circular drept. Se ştie că razele bazelor trunchiului de con sunt de 1,3 m şi 0,25 m, înălțimea trunchiului de con este de 0,95 m, iar generatoarea suprafeței laterale a cilindrului este de 0,75 m. Să se afle câte foi de tinichea sunt necesare pentru confecționarea unui coş, dacă o foaie are dimensiunile $0,75 \text{ m} \times 1,75 \text{ m}$, iar la încheieturi şi deşeuri se consumă 23% din suprafața totală a coşului $(\pi \approx 3,14)$.



***Profilul real***

## A₁

1. O căldare are forma unui trunchi de con cu razele bazelor de 15 cm şi 10 cm şi generatoarea de 30 cm. Să se determine cantitatea aproximativă de vopsea necesară pentru vopsirea căldării de ambele părți, consumul fiind de 200 g la 1 $\text{m}^2$.

2. Să se afle razele bazelor unui trunchi de con, ştiind că aria laterală a trunchiului de con este de $30\pi \text{ dm}^2$, înălțimea lui este de 3 dm şi produsul razelor lui este egal cu 5.

## B₁

3. Razele bazelor unui trunchi de con circular drept sunt $R$ şi $r$, iar aria secțiunii axiale este egală cu suma ariilor bazelor. Să se afle volumul trunchiului de con.

4. ***Lucrați în perechi!*** Un trunchi de con circular drept are razele bazelor $R$ şi $r$, iar înălțimea – $h$. Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de con;
b) măsura unghiului format de generatoarea conului şi planul bazei mari;
c) măsura unghiului format de planul bazei mari şi planul ce intersectează bazele trunchiului de con după coarde de lungimi egale cu lungimile laturilor hexagoanelor regulate înscrise în baze (planul secant nu intersectează segmentul ce uneşte centrele bazelor).

5. Raza unei baze a unui trunchi de con este de două ori mai mare decât raza celeilalte baze. Să se afle raportul dintre volumele celor două trunchiuri de con care se obțin prin secționarea trunchiului inițial cu un plan care trece prin mijlocul înălțimii trunchiului şi este paralel cu bazele lui.

6. Razele bazelor unui trunchi de con circular drept sunt $R$ şi $r$, iar generatoarea formează cu planul bazei mai mari un unghi de măsură $\alpha$. Să se afle:
a) aria laterală a trunchiului de con;
b) volumul trunchiului de con.

7. ***Lucrați în perechi!*** Înălțimea unui con este împărțită în patru segmente congruente. Prin punctele de diviziune sunt duse plane paralele cu planul bazei. Să se afle volumele trunchiurilor de con obținute, dacă se ştie că înălțimea conului este $H$, iar raza bazei conului – $R$.

## C₁

8. La ce distanță de la baza mică a unui trunchi de con circular drept trebuie să ducem un plan, pentru ca în secțiune să se obțină un disc a cărui arie să fie egală cu:
a) media aritmetică a ariilor bazelor;
b) media geometrică a ariilor bazelor, dacă razele bazelor sunt $R$ şi $r$, iar înălțimea trunchiului de con este $H$?

9. ***Investigați!*** Înălțimea unui trunchi de con este media geometrică a diametrelor bazelor. Să se demonstreze că în secțiunea axială a trunchiului de con se poate înscrie un cerc.

10. ***Lucrați în grup!*** Proiect „Aplicații ale corpurilor de rotație în construcțiile din localitate”.

# § 4 SFERA. CORPUL SFERIC

## 4.1. Noțiuni generale

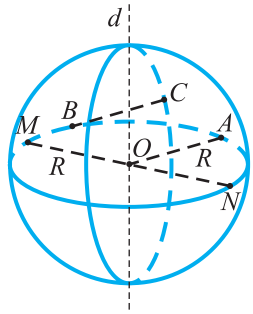


Fig. 8.19

***Sferă*** se numeşte frontiera corpului sferic, adică mulțimea tuturor punctelor spațiului situate de la un punct dat $O$, numit ***centru***, la distanța dată $R$, numită ***rază***. Se notează $\mathcal{S}(O, R)$. Fără pericol de confuzie vom numi rază a sferei şi orice segment ce uneşte centrul sferei cu un punct de pe sferă ($[OA]$ este raza sferei din figura 8.19). Segmentul ce uneşte două puncte ale sferei se numeşte ***coardă*** ($[BC]$ este o coardă a sferei din figura 8.19).

*Sfera se poate obține la rotația completă a unui semicerc în jurul dreptei suport* ***d*** *a diametrului semicercului* (fig. 8.19).

Coarda ce trece prin centrul sferei se numeşte ***diametrul*** sferei ($[MN]$ este un diametru al sferei din figura 8.19).

***Poziții relative ale unei drepte față de o sferă***

1) Dreapta şi sfera nu au niciun punct comun. În acest caz, distanța de la centrul sferei până la dreaptă este mai mare decât raza (fig. 8.20). Vom spune că dreapta este ***exterioară sferei***.

2) Dreapta şi sfera au un singur punct comun. În acest caz vom spune că dreapta este ***tangentă la sferă***. Menționăm că raza dusă în punctul de tangență a dreptei cu sfera este perpendiculară pe dreaptă ($[OT] \perp d$, fig. 8.21).

3) Dreapta şi sfera au două puncte comune. În acest caz vom spune că dreapta este ***secantă la sferă***. Menționăm că distanța de la centrul sferei până la secantă este mai mică decât raza sferei (fig. 8.22).

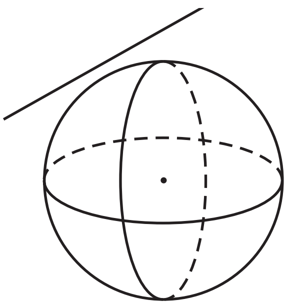


Fig. 8.20

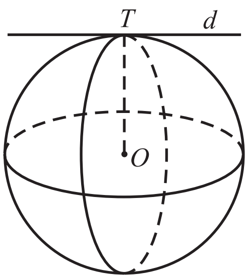


Fig. 8.21

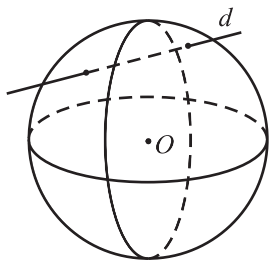


Fig. 8.22

***Poziții relative ale unui plan față de o sferă***

1) Sfera $\mathcal{S}(O, R)$ şi planul $\alpha$ nu au niciun punct comun (fig. 8.23). În acest caz vom spune că planul $\alpha$ este ***exterior sferei***.

Dacă punctul $M$ aparține planului $\alpha$, atunci $OM > R$.

2) Sfera $\mathcal{S}(O, R)$ şi planul $\alpha$ au un singur punct comun (fig. 8.24).

În acest caz vom spune că planul $\alpha$ este ***tangent la sferă***, iar punctul comun $T$ al planului şi sferei se numeşte ***punct de tangență***.

Dacă punctul $N$ aparține planului $\alpha$, atunci $ON \geq R$, egalitatea se obține numai în cazul în care punctul $N$ coincide cu punctul $T$. De aici obținem că $OT$ este distanța de la punctul $O$ la planul $\alpha$, de unde rezultă că $[OT] \perp \alpha$ (fig. 8.24).

Deci, raza în punctul de tangență a unei sfere cu un plan este perpendiculară pe acest plan.

3) Sfera $\mathcal{S}$ și planul $\alpha$ se intersectează (fig. 8.25). În acest caz vom spune că planul $\alpha$ este ***secant sferei***.

Fie $M$ un punct comun al sferei și planului, punctul $O_1$ – proiecția centrului sferei $O$ pe planul $\alpha$. Notăm $OO_1 = d$ și $OM = R$ (fig. 8.25).

Triunghiul $OO_1M$ este dreptunghic și $O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$.
Rezultă că mulțimea punctelor din planul $\alpha$, situate la distanța $\sqrt{R^2 - d^2}$ de punctul $O_1$, formează un cerc și în același timp aparțin sferei, deoarece $OM = R$. Deci, intersecția sferei cu planul $\alpha$ este un cerc de centru $O_1$ și rază $\sqrt{R^2 - d^2}$.

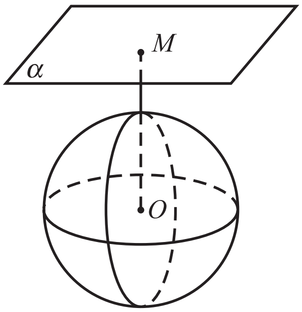


Fig. 8.23

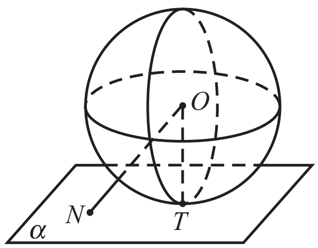


Fig. 8.24

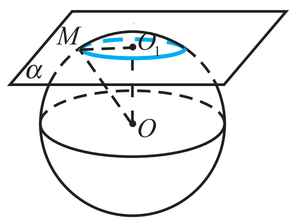


Fig. 8.25

## Vreți să știți mai mult? (Opțional)

Intersecția sferei cu stratul definit de planele paralele $\alpha$ și $\beta$ neexterioare sferei se numește ***zonă sferică***. Distanța dintre planele $\alpha$ și $\beta$ se numește ***înălțimea zonei***.

Cercurile obținute în secțiunea sferei cu planele $\alpha$ și $\beta$ se numesc ***bazele zonei sferice*** (fig. 8.26).

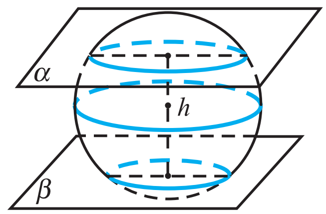


Fig. 8.26

Dacă unul dintre planele stratului este tangent la sferă, iar altul este secant, atunci în intersecție se obține o suprafață numită ***calotă sferică*** (***segment sferic***). În acest caz, cercul din planul secant se numește ***baza calotei*** (***segmentului***).

Distanța $h$ dintre planele $\alpha$ și $\beta$ se numește ***înălțimea calotei*** (fig. 8.27).

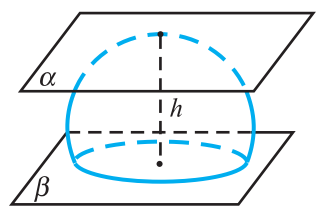


Fig. 8.27

Dacă centrul sferei aparține bazei calotei sferice, atunci calota se numește ***semisferă***.

Corpul obținut prin rotirea unui sector circular în jurul unui diametru care nu conține puncte interioare ale sectorului se numește ***sector sferic***. Diametrul în jurul căruia se rotește sectorul circular este ***axa sectorului sferic***, raza sectorului circular este ***raza sectorului sferic***.

Distanța dintre centrele cercurilor descrise de extremitățile arcului sectorului circular este ***înălțimea sectorului sferic***.

În figura 8.28 este reprezentat sectorul sferic obținut prin rotirea sectorului circular $OAB$ în jurul diametrului $AA_1$ (înălțimea lui $h = CA$).

În figura 8.29 este reprezentat sectorul sferic obținut prin rotirea sectorului circular $OBC$ în jurul diametrului $AA_1$ (înălțimea lui $h = DE$).

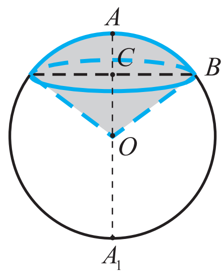


Fig. 8.28

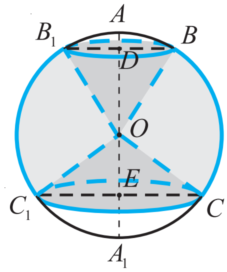


Fig. 8.29

**Observație**

Se poate arăta că ***formula de calcul a ariei zonei sferice*** $Z$ este:

$$\boxed{\mathcal{A}(Z) = 2\pi Rh}\,.$$

Cum calota sferică poate fi considerată caz particular al zonei sferice, formula obținută este valabilă și pentru ***calculul ariei calotei sferice*** (fig. 8.30):

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{calotei}} = 2\pi Rh}\,.$$

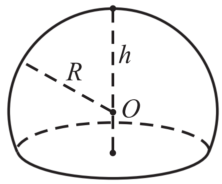


Fig. 8.30

Deoarece sfera este o zonă sferică cu înălțimea $h = 2R$, rezultă că aceeași formulă este valabilă și pentru ***calculul ariei sferei***, adică

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{sferei}} = 4\pi R^2}\,.$$

## 4.2. Aria sferei

Sfera nu are arie laterală și nici arie totală. Ea are doar arie. Se poate demonstra formula de calcul al ariei sferei $\mathcal{A}_{\text{sferei}} = 4\pi R^2$, unde $R$ este raza sferei. Cunoaștem această formulă din clasa a IX-a.

***Rețineți!*** $\boxed{\mathcal{A}_{\text{sferei}} = 4\pi R^2}$

## 4.3. Volumul corpului sferic

Considerăm corpul sferic $\mathcal{S}(O, R)$ și un corp $K$ ce se obține prin înlăturarea dintr-un cilindru circular drept de rază $R$ și înălțime $2R$ a două conuri cu vârful comun $O_2$ – mijlocul axei $BC$ a cilindrului, iar bazele conurilor coincid cu bazele cilindrului. Fie aceste corpuri situate pe planul $\alpha$ ca în figura 8.31.

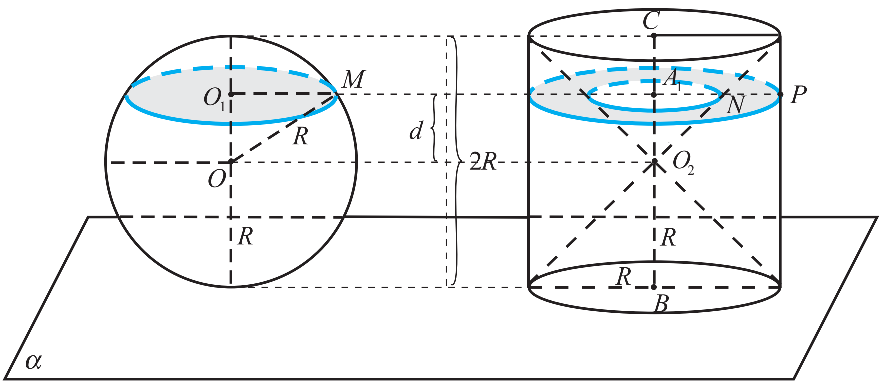


Fig. 8.31

Dacă intersectăm cele două corpuri cu un plan $\beta \parallel \alpha$ la distanța $d < R$ de la centrul corpului sferic, în secțiuni se obțin figuri de arii egale.

Într-adevăr, aria discului din secțiunea planului $\beta$ cu corpul sferic este

$$\pi O_1M^2 = \pi(OM^2 - OO_1^2) = \pi(R^2 - d^2),$$

iar aria inelului din secțiunea planului $\beta$ cu corpul $K$ este

$$\pi A_1P^2 - \pi A_1N^2 = \pi A_1P^2 - \pi O_2A_1^2 = \pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2),$$

de unde obținem că pentru orice valori $d$ $(0 \le d \le R)$ aria discului este egală cu aria inelului.

Aplicând principiul lui Cavalieri, obținem că volumul corpului sferic este egal cu volumul corpului $K$, care este diferența dintre volumul cilindrului și volumul a două conuri cu înălțimea $R$ și raza bazei $R$.

Deci, $\mathcal{V}_{\text{corp. sf.}} = \mathcal{V}_{\text{corp.}} = \mathcal{V}_{\text{cil.}} - 2\mathcal{V}_{\text{con}} = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3.$

Așadar, $\boxed{\mathcal{V}_{\text{corp. sf.}} = \frac{4}{3}\pi R^3}$ .

Aceeași formulă s-a dedus folosind calculul integral (a se vedea modulul 3, § 2, problema rezolvată 1).

**Vreți să știți mai mult? (Opțional)**

***Volumul calotei sferice*** de înălțime $h$ și raza sferei $R$ se calculează prin formula:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{cal. sf.}} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)}\ .$$

***Volumul sectorului sferic*** de înălțime $h$ și raza sferei $R$ se calculează prin formula:

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{sect. sf.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}\ .$$

# 4.4. Secțiunea suprafeței conice cu un plan

## 4.4.1. Secțiuni conice

Considerăm o dreaptă $g$ în spațiu, care intersectează în punctul $V$ dreapta $a$, $g \not\perp a$.

**Definiții**

• Se numește **suprafață conică circulară dreaptă cu două pânze** (pâlnii) suprafața generată de o rotație completă a dreptei $g$ în jurul dreptei $a$ (fig. 8.32).

• Dreapta $g$ și orice altă dreaptă $g'$ a suprafeței conice se numesc **generatoare ale suprafeței conice**.

• Axa $a$ de rotație este și axă de simetrie a suprafeței conice. Punctul $V$ se numește **vârf al suprafeței conice**.

• Curbele care se pot obține secționând suprafața conică cu două pânze cu un plan care nu trece prin vârful ei se numesc **secțiuni conice** sau, mai scurt, **conice**.

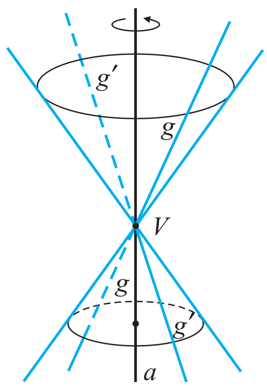


Fig. 8.32

Se disting trei cazuri:

1. Planul secant intersectează toate generatoarele unei pânze: secțiunea conică este o ***elipsă***; în particular, dacă planul secant este perpendicular pe axa suprafeței conice, se obține un ***cerc*** (fig. 8.33 a)).
2. Planul secant este paralel cu o generatoare a suprafeței conice: secțiunea conică este o ***parabolă*** (fig. 8.33 b)).
3. Planul secant intersectează ambele pânze ale suprafeței conice (planul este paralel cu două generatoare): secțiunea conică este o ***hiperbolă*** (fig. 8.33 c)).

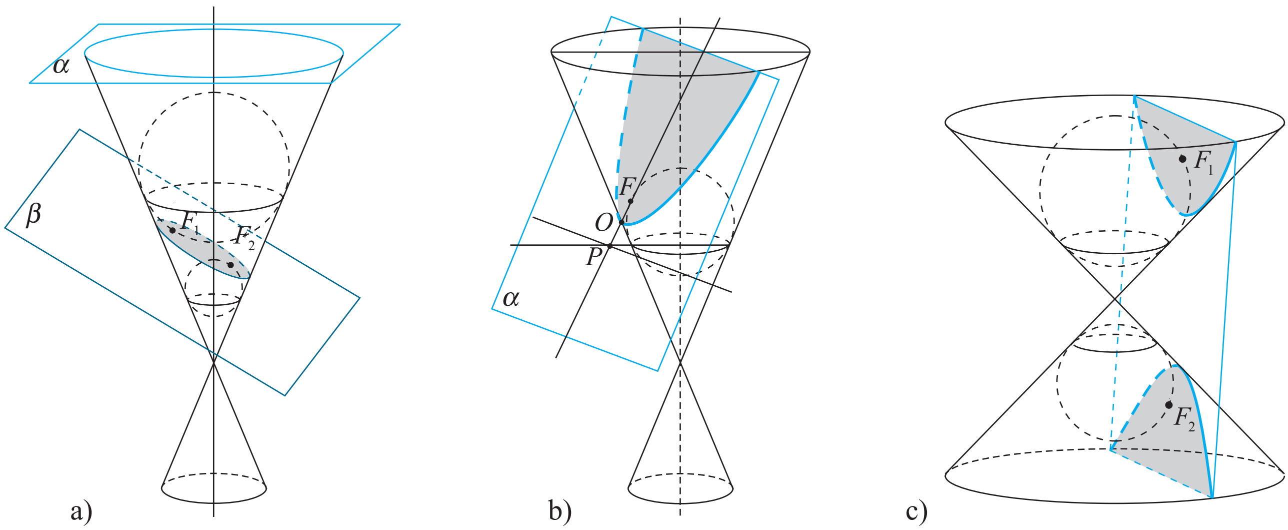
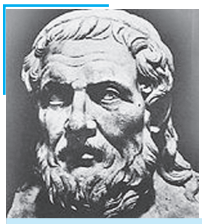


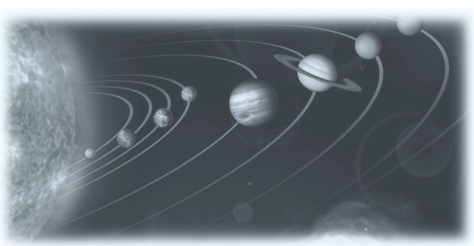

Fig. 8.33



Apollonios din Perga (262 – 180 î.Hr.), geometru şi astronom grec

Prima expunere a teoriei secțiunilor conice îi aparține unuia dintre cei mai mari geometri ai Antichității, Apollonios din Perga. Într-un tratat din opt cărți, numit „Despre secțiunile conice”, Apollonios a sistematizat toate cunoştințele de până la el despre aceste curbe remarcabile, a descoperit un şir de proprietăți importante şi le-a dat denumirile care sunt în uz şi în zilele noastre.

Secțiunile conice au multe aplicații. De exemplu, secțiunile axiale ale farurilor automobilelor, lanternelor de buzunar, proiectoarelor sunt parabole. Farfuria antenei parabolice reprezintă o parte a corpului de rotație obținut la rotația unei parabole în jurul axei sale.



Planetele se rotesc în jurul Soarelui urmând traiectorii eliptice. De asemenea, sateliții artificiali se rotesc în jurul Pământului după orbite eliptice. Elipsele pot fi observate înclinând un pahar în care este turnată apă (fig. 8.34).

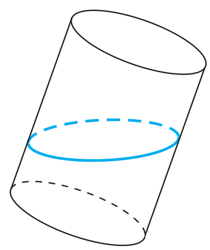
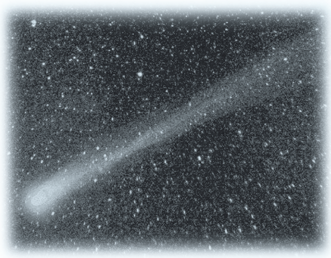


Fig. 8.34

Umbra lăsată de abajurul înclinat al unei lămpi de masă este de formă eliptică, (fig. 8.35)).

Fig. 8.35



Unele comete urmează traiectorii hiperbolice. Secțiunile axiale ale turnurilor de răcire ale centralelor nucleare sunt de formă hiperbolică (fig. 8.36).

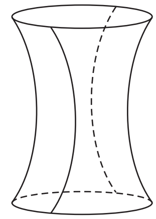


Fig. 8.36

### 4.4.2. Secțiuni conice ca locuri geometrice de puncte

**I. Cercul**

**Definiție**

Mulțimea punctelor planului egal depărtate de un punct dat $C$ din plan se numește **cerc**. Punctul $C$ se numește **centrul cercului**.

Fie $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper cartezian al planului secant $\alpha$ perpendicular pe axa suprafeței conice (fig. 8.33 a)), $C(a, b)$ – un punct din acest plan și $R$ – un număr pozitiv. Cercul $\mathscr{C}(C, R)$ de centru $C$ și rază $R$ (fig. 8.37) are ***ecuația canonică***:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

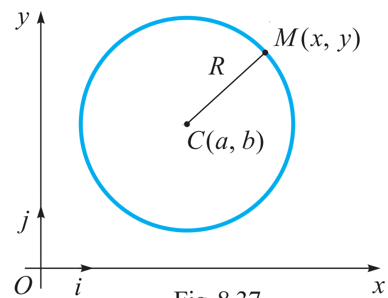



Fig. 8.37

**II. Elipsa**

**Definiție**

Fie $F_1$ și $F_2$ puncte din plan, astfel încât $F_1F_2=2c,\ c>0$, și $a$ un număr mai mare decât $c$. Locul geometric al punctelor $M$ din plan cu proprietatea

$$MF_1+MF_2=2a \ \ (a>c) \qquad (1)$$

se numește **elipsă**.

Punctele $F_1$ și $F_2$ se numesc ***focare ale elipsei***, dreapta $F_1F_2$ se numește ***axa focală***.

Dacă de diferite părți ale planului secant $\beta$ (fig. 8.33 a)) se înscriu două sfere tangente la suprafață conică și la planul secant $\beta$, atunci punctele de tangență a sferelor cu planul secant sunt focarele elipsei din secțiune.

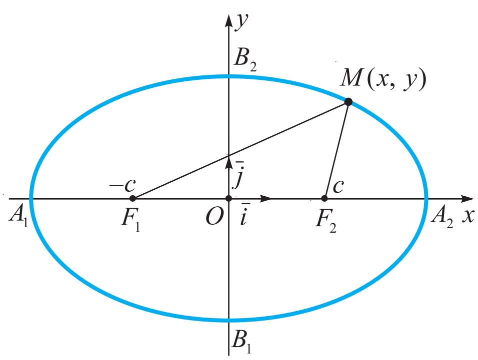



Fig. 8.38

Fixăm în planul secant un reper cartezian de coordonate $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ ca în figura 8.38, atunci egalitatea (1) în coordonate este

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Raționalizând această expresie, obținem ***ecuația canonică a elipsei***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (b^2=a^2-c^2). \qquad (2)$$

Punctele de intersecție a elipsei (2) cu axa $Ox$ sunt $A_1(-a, 0)$ și $A_2(a, 0)$, iar cu axa $Oy$ sunt $B_1(0, -b)$ și $B_2(0, b)$. Aceste puncte se numesc ***vârfurile elipsei***. Segmentul $A_1A_2$ se numește ***axa mare***, iar segmentul $B_1B_2$ – ***axa mică*** (fig. 8.38).

Pentru a construi puncte ale elipsei cu focarele $F_1$ şi $F_2$ şi axa mare $A_1A_2$, construim două cercuri $\mathscr{C}_1(F_1, A_1P)$ şi $\mathscr{C}_2(F_2, A_2P)$, unde $P \in [F_1F_2]$. Punctele $M_1$ şi $M_2$ de intersecție a cercurilor $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$, evident, aparțin elipsei (fig. 8.39). Astfel, se pot construi suficiente puncte care permit să construim elipsa.

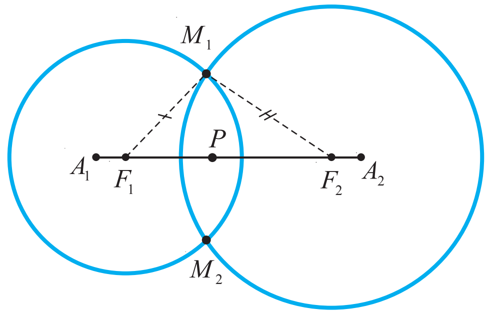


Fig. 8.39

**III. Hiperbola**

**Definiție**

Fie $F_1$ şi $F_2$ puncte din plan, astfel încât $F_1F_2 = 2c > 0$, şi $a$ un număr pozitiv, $a < c$. Locul geometric al punctelor $M$ din plan cu proprietatea

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \qquad (3)$$

se numeşte **hiperbolă**.

Punctele $F_1$ şi $F_2$ se numesc ***focare ale hiperbolei***, dreapta $F_1F_2$ se numeşte ***axă focală***, distanța $F_1F_2 = 2c$ se numeşte ***distanță focală***.

Dacă de aceeaşi parte a planului secant din figura 8.41 c) se înscriu două sfere tangente la suprafață conică şi planul secant, atunci punctele de tangență a sferelor cu planul secant sunt focarele hiperbolei din secțiune.

Fixăm în planul secant din figura 8.33 c) sistemul cartezian de coordonate $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ ca în figura 8.40, atunci egalitatea (3) în coordonate este

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

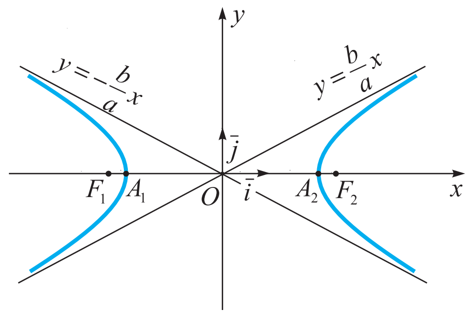


Fig. 8.40

Raționalizând această expresie, obținem ***ecuația canonică a hiperbolei***:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b^2 = c^2 - a^2). \qquad (4)$$

Hiperbola (4) intersectează axa $Ox$ în punctele $A_1(-a, 0)$ şi $A_2(a, 0)$, care se numesc ***vârfuri ale hiperbolei***, iar segmentul $A_1A_2$ se numeşte ***axă focală***.

Dreptele $y = -\frac{b}{a}x$ şi $y = \frac{b}{a}x$ se numesc ***asimptote ale hiperbolei*** (fig. 8.40).

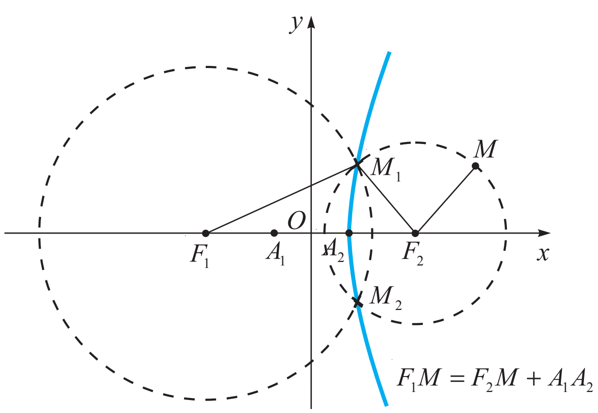


Fig. 8.41

Pentru a construi puncte ale hiperbolei cu focarele $F_1$, $F_2$ şi axa focală $A_1A_2$, construim două cercuri $\mathscr{C}_1(F_2, F_2M)$ şi $\mathscr{C}_2(F_1, F_2M + A_1A_2)$.

Punctele $M_1$ şi $M_2$ de intersecție a acestor cercuri aparțin hiperbolei (fig. 8.41).

## IV. Parabola

**Definiție**

Fie $F$ un punct şi $d$ o dreaptă din plan care nu trece prin $F$. Se numeşte **parabolă** locul geometric al punctelor $M$ ale planului cu proprietatea $\mathrm{d}(M, d) = MF$ (5) (fig. 8.42).

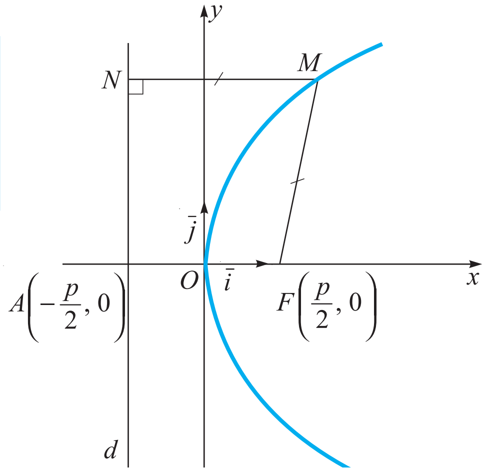


Fig. 8.42

Punctul $F$ se numeşte ***focarul parabolei***, dreapta $d$ se numeşte ***directoarea parabolei***.

Dacă în figura 8.33 b) se înscrie o sferă tangentă la suprafaţa conului şi la planul secant, atunci punctul de tangenţă a sferei cu planul este focarul parabolei, iar intersecţia planului secant cu planul cercului de tangenţă este directoarea parabolei.

Fixăm în planul secant un reper cartezian de coordonate $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ ca în figura 8.42, atunci egalitatea (5) în coordonate este

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|,$$

unde $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

Raţionalizând această expresie, obţinem ***ecuaţia canonică a parabolei***:

$$y^2 = 2px.$$

Numărul $p$ egal cu distanţa de la focar la directoare se numeşte ***parametrul parabolei***.

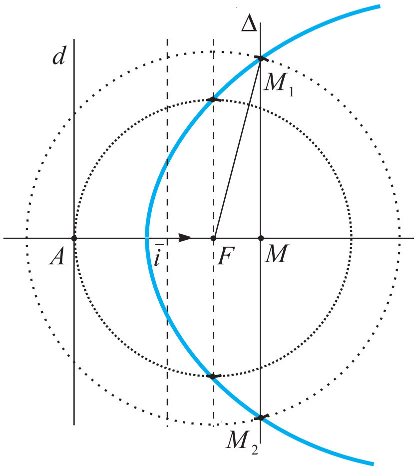


Fig. 8.43

Pentru a construi puncte ale parabolei cu focarul $F$ şi directoarea $d$, construim o dreaptă $\Delta \parallel d$ de aceeaşi parte a directoarei ca şi focarul $F$. Punctele de intersecţie $M_1$ şi $M_2$ a dreptei $\Delta$ cu cercul $\mathscr{C}(F, AM)$ aparţin parabolei (fig. 8.43).

**Notă.** Se ştie că graficul funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, se numeşte parabolă. Se poate arăta că acest grafic este într-adevăr o parabolă a cărei axă de simetrie este paralelă cu axa ordonatelor. Vârful, focarul, directoarea şi parametrul acestei parabole sunt respectiv:

$$V\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right),\ F\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}+\frac{1}{4a}\right),\ d\colon\ y=-\frac{\Delta}{4a}-\frac{1}{4a} \text{ şi } p=\frac{1}{2a}.$$

**Probleme rezolvate**

**1** Să se afle coordonatele centrului şi raza cercului de ecuaţie

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0.$$

*Rezolvare*:

Scriem ecuaţia cercului sub forma:

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

Deci, centrul este $C(4, -1)$ şi raza $R = 5$.

**2** Să se afle punctele de intersecție a elipsei $x^2+9y^2=36$ cu dreapta $x-3y+6=0$.

*Rezolvare*:

Coordonatele punctelor cerute sunt soluții ale sistemului $\begin{cases} x^2+9y^2=36 \\ x-3y=-6. \end{cases}$

Astfel obținem două puncte de intersecție: (−6, 0) şi (0, 2).

**3** Fie hiperbola $16x^2-9y^2=144$. Să se afle:

a) numerele $a$ şi $b$; b) coordonatele focarelor; c) ecuațiile asimptotelor.

*Rezolvare*:

Scriem ecuația canonică a hiperbolei: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. De aici rezultă că $a^2=9$, $b^2=16$, $c^2=a^2+b^2=25$. Obținem:

a) $a=3$, $b=4$; b) $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$; c) $y=-\frac{4}{3}x$, $y=\frac{4}{3}x$.

**4** Să se scrie ecuația canonică a hiperbolei, dacă focarele sunt situate pe axa absciselor, $F_1F_2=10\sqrt{2}$ şi asimptotele hiperbolei au ecuațiile $y=\pm\frac{3}{4}x$.

*Rezolvare*:

Cum ecuațiile asimptotelor la hiperbolă sunt $y=\pm\frac{b}{a}x$, deducem că $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$. Din relațiile $c^2-a^2=b^2$ şi $F_1F_2=2c$, obținem ecuația $50-a^2=b^2$.

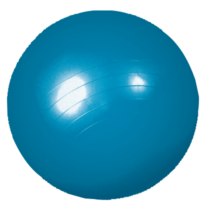
Rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{b}{a}=\frac{3}{4} \\ 50-a^2=b^2, \end{cases}$ obținem $a^2=32$, $b^2=18$, deci ecuația canonică a hiperbolei este $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=1$.

## Probleme propuse

***Profilurile umanist, arte, sport***

### A

**1.** Diametrul exterior al unei mingi de cauciuc este de 22 cm, iar grosimea cauciucului este de 1 cm. Să se afle volumul cauciucului din care este confecționată mingea.



### B

**2.** *Lucrați în perechi!* Două bile de plumb cu razele de 12 cm şi 18 cm sunt retopite într-o singură bilă. Să se afle:

a) aria suprafeței sferice ce mărgineşte bila;

b) volumul corpului sferic obținut.

**3.** BAC Determinați volumul corpului sferic, dacă aria suprafeței sferice este egală cu $36\pi$ cm$^2$.

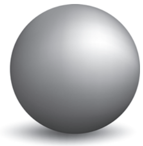
$$\mathcal{V}_{\text{corp. sferic}}=\frac{4}{3}\pi R^3$$

**4.** BAC *Investigați!* Turnând nisipul dintr-un vas de forma unei emisfere de rază $r$ într-un vas de forma unui con circular drept, raza şi înălțimea căruia sunt egale cu $r$, elevul a făcut concluzia că volumul vasului în formă de emisferă este, în aceste condiții, de două ori mai mare decât volumul vasului în formă de con circular drept. Efectuând calculele respective, încercuiți litera **A**, dacă concluzia este adevărată, sau litera **F**, dacă concluzia este falsă.

| A | F |
|---|---|

## C

5. O bilă de fontă are masa de 262,44 g. Să se afle diametrul bilei, dacă densitatea fontei este de $7{,}29\ \text{g/cm}^3$.



6. Un vas are forma unei semisfere de rază 6 cm care este completată cu un cilindru cu raza bazei de 6 cm. Să se afle înălțimea cilindrului astfel încât volumul vasului să fie de $1800\ \text{cm}^3$.

7. Lucrare de laborator *Calcularea volumelor obiectelor de forma corpurilor de rotație.*

***Profilul real***

## $A_1$

1. Să se afle coordonatele centrului și raza cercului:
a) $x^2+y^2+6x-8y=0$;
b) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$;
c) $x^2+y^2-7x+3y-1{,}5=0$;
d) $2x^2+2y^2+4x-3y+1=0$.

2. Să se scrie ecuația canonică a cercului de diametru $AB$, dacă:
a) $A(-1, 1)$, $B(3, 5)$;
b) $A(-1, 1)$, $B(4, 6)$.

3. Să se afle punctele de intersecție a cercului $x^2+y^2=25$ cu dreapta:
a) $x-y+1=0$; b) $x-7y-25=0$.

4. Să se scrie ecuația canonică a elipsei care trece prin punctele $A(-3, 4)$, $B(6, -2)$.

5. Să se scrie ecuația canonică a elipsei, dacă:
a) lungimea axei mari este de 20 cm și cea a axei mici este de 12 cm;
b) distanța dintre focare este de 16 cm, iar lungimea axei mari este de 20 cm.

## $B_1$

6. Distanțele de la un focar al elipsei la extremitățile axei focale sunt de 7 cm și 1 cm. Să se scrie ecuația canonică a elipsei.

7. Să se scrie ecuația canonică a elipsei, dacă se știe că:
a) punctul $M(2\sqrt{5}, -2)$ aparține elipsei și lungimea axei mici este egală cu 6;
b) punctul $M(-2, 2)$ aparține elipsei și lungimea axei mari este egală cu 8;
c) punctul $M(\sqrt{15}, 1)$ aparține elipsei și distanța dintre focare este egală cu 8.

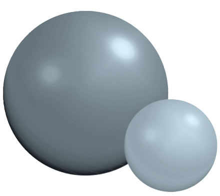
8. Să se determine punctele hiperbolei $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ situate la distanță egală cu 7 de la focarul stâng.

9. Să se afle coordonatele focarului $F$ și ecuația directoarei parabolei $y^2=24x$.

10. Să se afle coordonatele punctelor parabolei $y^2=16x$ care se afla la distanță egală cu 13 de la focar.

11. Să se determine punctele de intersecție a parabolei $x^2=4y$ cu dreapta $x+y-3=0$.

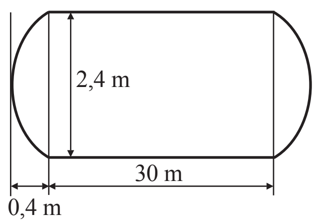
12. *Investigați!* La o fabrică de jucării se produc mingi de cauciuc. Câte cutii de vopsea sunt necesare pentru a vopsi 15 000 de mingi cu diametrul exterior de 32 cm și 42 000 de mingi cu diametrul exterior de 18 cm, dacă într-o cutie sunt 5 kg de vopsea și consumul este de 180 g la $1\ \text{m}^2$?



13. *Lucrați în perechi!* Vârfurile unui triunghi cu laturile de 4 cm, 5 cm și 7 cm sunt situate pe o sferă. Să se afle distanța de la centrul sferei până la planul suport al triunghiului, dacă raza sferei este de $4\sqrt{6}$ cm.

14. Printr-o extremitate a diametrului unui corp sferic este dus un plan ce formează cu diametrul un unghi de măsură $\alpha$. Să se determine aria discului din secțiune, dacă raza corpului sferic este $R$.

15. *Investigați!*
La un depou s-au adus 23 de cisterne, forma și dimensiunile acestora sunt date în figură (un cilindru și două calote sferice). Cisternele trebuie să fie vopsite. Câte kilograme de vopsea trebuie cumpărate, consumul fiind de 150 g la $1\ \text{m}^2$ $(\pi \approx 3{,}14)$?




16. Lucrare de laborator *Calcularea volumelor obiectelor de forma corpurilor de rotație.*

## C₁

17. La confecționarea unui rulment se folosesc 12 bile cu raza de 1 cm. Să se afle masa de oțel care trebuie topită pentru a turna numărul de bile necesare pentru confecționarea a 200 000 de rulmenți. (Se va ține cont că în urma topirii şi turnării oțelului se pierd 0,7% din masa inițială şi că densitatea oțelului este de $7{,}3\ \text{g/cm}^3$.)

18. *Lucrați în perechi!* O turnătorie a primit o comandă de a confecționa 400 000 de ceaune în formă de semisferă, cu grosimea peretelui de 3 mm şi raza interioa-ră de 15 cm. Să se afle masa aliajului care trebuie topit pentru executarea comenzii, dacă densitatea aliajului este de $3{,}2\ \text{g/cm}^3$ şi în procesul topirii şi turnării se pierd 0,9% din masa inițială.

# Exerciții şi probleme recapitulative

***Profilurile umanist, arte, sport***

## A

1. Înălțimea unui cilindru este egală cu jumătate din diagonala secțiunii axiale, iar aria totală a cilindrului este egală cu $16(3+2\sqrt{3})\ \text{cm}^2$.

$$\mathcal{V}_{cil.} = \pi R^2 H$$

Să se afle:
a) unghiul format de diagonala secțiunii axiale cu înălțimea cilindrului;
b) aria laterală a cilindrului;
c) volumul cilindrului.

$$\mathcal{A}_L = 2\pi RH$$

## B

2. Câți metri pătrați de tinichea sunt necesari pentru confecționarea a 100 000 de cutii de conserve cilindrice cu diametrul de 8 cm şi înălțimea de 4 cm, dacă pentru cusături şi deşeuri se consumă 15% din material?

3. Generatoarea unui con este de 10 m, iar înălțimea de 6 m. Să se afle aria totală şi volumul conului.

4. Un trunchi de con are razele bazelor egale cu 6 m şi 3 m, iar generatoarea de 5 m. Să se determine:
a) aria secțiunii axiale;
b) unghiul format de generatoarea trunchiului de con şi planul bazei;
c) volumul şi aria laterală a conului din care provine trunchiul de con.

5. *Lucrați în perechi!*
Un pocal are forma unui con circular drept. Generatoarea cornului formează cu înălțimea acestuia un unghi de măsura $\alpha$. Distanța de la centrul bazei la generatoare este $m$.
a) Aflați capacitatea pocalului.
b) Câte pocale de acest fel sunt necesare pentru a turna tot sucul dintr-un pachet de 1 $l$, dacă $\alpha = 30°$, iar $m = 5$ cm?

6. BAC Raportul dintre lungimea generatoarei şi raza bazei unui con circular drept este de 2 : 1, iar aria suprafeței laterale a conului circular drept este de $72\pi\ \text{dm}^2$. Determinați înălțimea conului.

$$\mathcal{V}(\mathscr{C}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

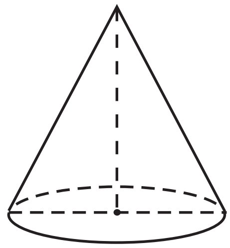
## C

7. Să se afle diametrul unei bile de fontă cu masa de $252\pi$ g (densitatea fontei este de $7\ \text{g/cm}^3$).

8. *Lucrați în grup!* Proiect *Casa mea de vis*.

*Profilul real*

## A₁

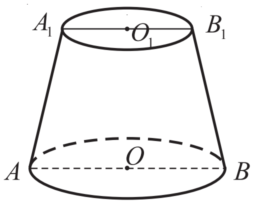


1. Aria laterală a unui con circular drept este de 2 ori mai mare decât aria bazei lui. Determinați măsura unghiului format de generatoare şi planul bazei.

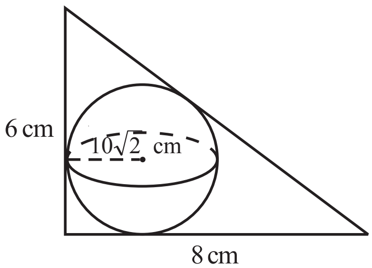
## B₁

2. Înălțimea unui trunchi de con este egală cu media geometrică a diametrelor bazelor. Unghiul format de generatoarea trunchiului de con cu planul bazei mari este egal cu $\varphi$. Să se afle razele bazelor $R$ şi $r$ ale trunchiului de con, dacă:
a) $R+r=s$;
b) $R-r=d$.

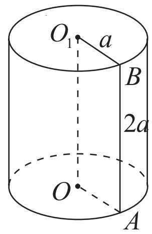
3. În secțiunea axială a unui trunchi de con cu generatoarea $G$ poate fi înscris un cerc de rază $R$. Să se afle aria laterală şi volumul trunchiului de con.




4. O sferă de rază $10\sqrt{2}$ cm este tangentă la toate laturile unui triunghi dreptunghic, ale cărui catete sunt de 6 cm şi 8 cm. Să se afle distanța de la centrul sferei până la planul triunghiului.




5. Este posibil ca într-un vas de forma unui cilindru drept, reprezentat pe desen, să se includă o bilă sferică, volumul căreia este de 2 ori mai mic decât volumul vasului? Utilizând datele din desen, încercuiți **Da**, dacă răspunsul este afirmativ, sau **Nu**, dacă răspunsul este negativ.
Argumentați răspunsul.




| Da | Nu |
|---|---|

6. Un vas are forma unui cilindru circular drept cu raza bazei de 18 cm şi înălțimea de 15 cm. $\frac{2}{3}$ din vas a fost umplut cu apă. Se va scurge apa din vas, dacă în el se va scufunde un corp sferic de metal cu raza de 9 cm? Încercuiți **Da**, dacă răspunsul este afirmativ, sau **Nu**, dacă răspunsul este negativ.
Argumentați răspunsul.

| Da | Nu |
|---|---|

7. Lucrare de laborator *Calcularea volumelor corpurilor de forma corpurilor de rotație.*

$$\mathcal{A}_L(T)=\pi g(R+r)$$

## C₁

8. Dintr-un punct al unei sfere sunt duse trei coarde perpendiculare două câte două. Lungimile coardelor sunt $a$, $b$ şi $c$. Să se afle raza sferei.

9. Într-un con circular drept cu raza bazei $R$ sunt situate două sfere de rază $r$ cu centrele pe axa conului. O sferă este tangentă suprafeței laterale a conului, iar cealaltă este tangentă bazei conului şi primei sfere. Se ştie că $R=3r$. Să se afle volumul conului.

$$\mathcal{V}(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$$

10. ***Lucrați în grup!*** Proiect *Casa mea de vis.*

# Test sumativ

**Timp efectiv de lucru: 45 de minute**

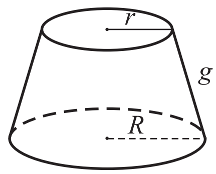
### *Profilurile umanist, arte, sport*

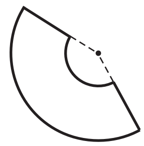
**1.** Generatoarea unui con circular drept are lungimea 10 cm şi formează cu planul bazei un unghi de măsură 30°.
a) Completaţi spaţiul astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată:
„Secţiunea axială a conului circular drept este un ______________________”.
b) Aflaţi aria totală a conului.

**2.** Două sfere de metal cu diametrele de 8 cm şi 10 cm au fost retopite într-o sferă. Aflaţi:
a) volumul sferei obţinute;
b) ce procent constituie aria sferei cu diametru mai mic din aria sferei obţinute.

**3.** Fie un cilindru circular drept cu raza bazei de 5 cm şi înălţimea de 12 cm.
a) Încercuiţi litera **A**, dacă propoziţia este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:
„$\mathcal{A}_{\text{t. cil.}} = \mathcal{A}_{\text{l. cil.}} + \mathcal{A}_{\text{b. cil.}}$.” **A** | **F**
b) Aflaţi aria laterală a cilindrului;
c) Aflaţi volumul cilindrului.

**4.** Un abajur are forma unui trunchi de con. Ştiind că $r = 12$ m, $R = 18$ cm, $g = 20$ cm, determinaţi aria suprafeţei abajurului.



### *Profilul real*

**1.** Aria unei secţiuni axiale a cilindrului circular drept este $16\sqrt{3}$ m², iar unghiul format de o diagonală a secţiunii şi generatoarea cilindrului are măsura 60°.
a) Completaţi spaţiul astfel încât propoziţia obţinută să fie adevărată:
„Secţiunea axială a cilindrului circular drept este un ______________________”.
b) Aflaţi volumul cilindrului.

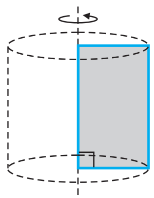
**2.** Baza unei piramide este un romb cu latura $4\sqrt{5}$ dm şi unghiul ascuţit 60°. Proiecţia vârfului piramidei pe planul bazei coincide cu punctul de intersecţie a diagonalelor rombului. Înălţimea piramidei este 4 dm. Aflaţi volumul corpului sferic a cărei rază este congruentă cu raza cercului înscris în secţiunea piramidei cu planul care conţine înălţimea piramidei şi este perpendicular pe muchiile paralele ale bazei.

**3.** Înălţimea unui con circular drept este egală cu 15 cm, iar suma lungimilor generatoarei şi razei bazei este egală cu 25 cm.
a) Încercuiţi litera **A**, dacă propoziţia este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:
„Secţiunea conului cu planul care conţine înălţimea lui este un triunghi.” **A** | **F**
b) Calculaţi aria suprafeţei totale a conului circular drept.

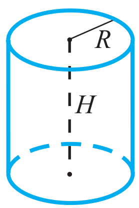
**4.** O bilă de oţel cu raza de 0,5 cm este acoperită cu un strat subţire de nichel. Să se determine cantitatea de nichel necesară pentru acoperirea a 10 000 de astfel de bile, consumul fiind de 0,22 g la 100 cm² $(\pi \approx 3{,}14)$.

# Corpuri de rotație

## Cilindru



### Cilindru circular drept

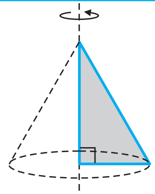



$\mathcal{A}_L = 2\pi RH$

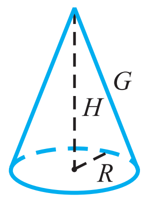
$\mathcal{A}_T = 2\pi R(H+R)$

$\mathcal{V} = \pi R^2 H$

## Con



### Con circular drept

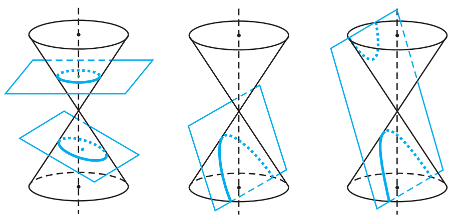



$\mathcal{A}_L = \pi RG$

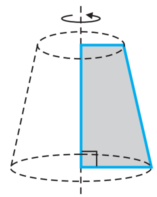
$\mathcal{A}_T = \pi R(R+G)$

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

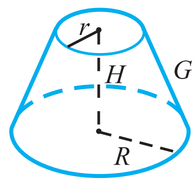
### Secțiuni ale suprafeței conice cu un plan: cerc, elipsă, parabolă, hiperbolă



## Trunchi de con



### Trunchi de con circular drept

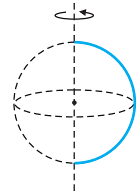



$\mathcal{A}_L = \pi G(R+r)$

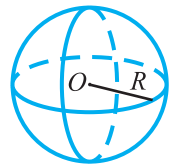
$\mathcal{A}_T = \pi[G(R+r)+R^2+r^2]$

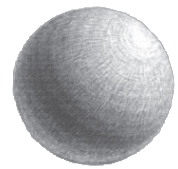
$\mathcal{V} = \frac{\pi}{3}H(R^2+r^2+Rr)$

## Sferă, corp sferic



### Sferă, corp sferic

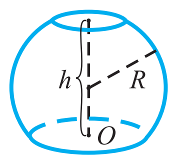


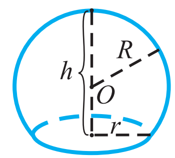
$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$\mathcal{A} = 4\pi R^2$

### Zonă sferică, calotă sferică, sector sferic

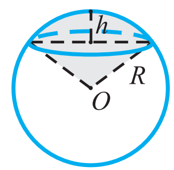



$\mathcal{A}_{zonei} = 2\pi Rh$




$\mathcal{A}_{calotei} = 2\pi Rh = \pi(r^2+h^2)$

$\mathcal{V}_{calotei} = \pi h^2(R-\frac{h}{3})$




$\mathcal{V}_{sect.} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$

Modulul

# 9

# Recapitulare finală

1. Numere complexe
2. Polinoame
3. Ecuații. Inecuații. Sisteme. Totalități
4. Șiruri de numere reale. Limite de șiruri
5. Limite de funcții. Funcții continue
6. Funcții derivabile
7. Proprietăți generale și aplicații ale funcțiilor derivabile
8. Geometrie în plan și în spațiu
9. Elemente de trigonometrie
10. Elemente de algebră superioară
11. Exerciții și probleme recapitulative

# § 1 NUMERE COMPLEXE

## 1.1. Numere complexe. Forma algebrică

Mulțimea numerelor complexe este $\mathbf{C}=\{a+bi \mid a, b\in \mathbb{R}\}$, unde $\mathrm{i}^2=-1$.
Adunarea şi înmulțirea numerelor complexe $z=a+bi$, $u=c+di$ se efectuează astfel:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}, \qquad (a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i}.$$

Numărul complex $\overline{z}=a-bi$ se numeşte ***număr conjugat*** pentru $z=a+bi$.

*Proprietăți ale operației de conjugare* $(z, z_1, z_2\in \mathbf{C})$:

**1°** $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$ **2°** $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ **3°** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\ z_2\neq 0$ **4°** $z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2\in\mathbb{R}$

**5°** $z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$ **6°** $z+\overline{z}\in\mathbb{R}$ **7°** $\overline{\overline{z}}=z$

Numărul $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=r\in\mathbb{R}_+$ se numeşte ***modulul*** numărului complex $z$.

*Proprietăți ale modulului* $(z, z_1, z_2\in \mathbf{C})$:

**1°** $|z|=|\overline{z}|$; **2°** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; **3°** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2\neq 0$;

**4°** $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$; **5°** $||z_1|-|z_2||\le|z_1+z_2|$.

Câtul numerelor complexe $z=a+bi$ şi $u=c+di\neq 0$ poate fi determinat astfel:

$$\frac{z}{u}=\frac{z\cdot\overline{u}}{u\cdot\overline{u}}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

Operațiile de adunare şi înmulțire în mulțimea numerelor complexe posedă aceleaşi proprietăți ca şi în mulțimea $\mathbb{R}$, de aceea în $\mathbf{C}$ se aplică formulele de calcul prescurtat, formula de rezolvare a ecuației de gradul II ş.a. Se va ține cont că mulțimea rădăcinilor de ordinul doi ale numărului $-a$, $a\in\mathbb{R}_+^*$, este $\{-\mathrm{i}\sqrt{a},\ \mathrm{i}\sqrt{a}\}$.

Rădăcinile de ordinul doi, $\alpha_1$, $\alpha_2$, ale numărului complex nenul $a+bi$ sunt numere opuse şi pot fi determinate fără a utiliza forma trigonometrică a acestuia:

1) pentru $b\neq 0$, $\alpha_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}\,b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$;

2) pentru $b=0$, $\alpha_{1,2}=\begin{cases}\pm\sqrt{a}, & \text{dacă } a\ge 0\\ \pm\mathrm{i}\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a<0,\end{cases}$ unde $\mathrm{sgn}\,b=\begin{cases}1, & \text{dacă } b>0\\ 0, & \text{dacă } b=0\\ -1, & \text{dacă } b<0.\end{cases}$

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în $\mathbf{C}$ ecuația $x^2+(1-2\mathrm{i})x+1+5\mathrm{i}=0$.

*Rezolvare*:

Pentru a aplica formula cunoscută de rezolvare a ecuației de gradul II, calculăm $\Delta=1-4\mathrm{i}-4-4-20\mathrm{i}=-7-24\mathrm{i}$.

În cazul nostru, pentru $\sqrt{-7-24\mathrm{i}}$ obținem $u\in\{-3, 3\}$, $v\in\{-4, 4\}$ şi produsul $u\cdot v$ are semnul „–". Prin urmare, $\sqrt{-7-24\mathrm{i}}=\pm(3-4\mathrm{i})$.

Deci, $x_1=\frac{-1+2\mathrm{i}-(3-4\mathrm{i})}{2}=-2+3\mathrm{i}$, $x_2=\frac{-1+2\mathrm{i}+(3-4\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}$.

*Răspuns*: $S=\{-2+3\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\}$.

***Argumentul principal*** al numărului $u = x + \mathrm{i}y,\ u \neq 0,$ se calculează astfel:

$$\arg u = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } y \geq 0, u \neq -1 \\ -\arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă } y < 0 \\ -\pi, & \text{dacă } u = -1. \end{cases}$$

Numerele $\arg u + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$ se numesc ***argumente*** ale numărului complex $u$.

**Observație**

În unele manuale se foloseşte notația $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},$ iar condiția $\arg z \in (-\pi,\ \pi]$ se înlocuieşte cu $\arg z \in [0,\ 2\pi)$.

Evident, pentru $z = a + b\mathrm{i},\ b \neq 0,$ avem $\arg \bar{z} = -\arg z$. Argumentul principal al numărului $z = a + b\mathrm{i},\ z \neq 0,$ poate fi determinat cu ajutorul funcției arccos:

$$\arg z = \begin{cases} \arccos\dfrac{a}{r}, & \text{dacă } b \geq 0 \\ -\arccos\dfrac{a}{r}, & \text{dacă } b < 0,\ r = \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Dacă planul este dotat cu un sistem de axe ortogonale $xOy$, atunci există o bijecție $f\colon \mathbf{C} = \{x + \mathrm{i}y \mid x,\ y \in \mathbb{R}\} \to P = \{M(x,\ y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ definită prin $f(x + \mathrm{i}y) = M(x,\ y)$. În acest caz, argumentul numărului $u$ are o interpretare geometrică: el este mărimea unghiului (orientat) format de semiaxa pozitivă $[Ox$ şi $\overrightarrow{OM}$.

## 1.2. Forma trigonometrică a numărului complex

Pentru ***partea reală*** $x = \operatorname{Re} z$, ***partea imaginară*** $y = \operatorname{Im} z$, modulul $r$ şi argumentul $\varphi$ ale numărului complex $z = x + \mathrm{i}y$ au loc relațiile $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ de unde se obține scrierea

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

numită ***forma trigonometrică*** a numărului complex $z$.

Dacă $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}^*,\ z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1),\ \ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2),$ $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, atunci:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2));$

$z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi),\ \ n \in \mathbb{Z}$ (formula lui Moivre).

Numărul $t$ se numeşte ***rădăcină de ordinul n***, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$ a numărului complex $z$ dacă $t^n = z$.

**Teoremă**

Dacă $z \neq 0,\ z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, atunci există exact $n$ rădăcini distincte de ordinul $n$, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$ ale numărului complex $z$:

$$\left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \middle|\, k = \overline{0,\ n-1}\right\}.$$

Mulțimea rădăcinilor de ordinul $n$ ale numărului complex $z,\ z \neq 0,$ se reprezintă în planul complex prin vârfurile unui poligon regulat cu $n$ laturi (dacă $n \geq 3$), înscris în cercul de rază $\sqrt[n]{|z|}$ cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale.

# § 2 POLINOAME

## 2.1. Operații cu monoame, polinoame

***Monomul*** este expresia (algebrică rațională) în care numerele şi literele sunt legate prin operațiile de înmulțire, de ridicare la putere cu exponent natural.

***Gradul unui monom nenul în raport cu o nedeterminată*** este egal cu exponentul nedeterminatei respective, cu condiția că ea apare o singură dată. ***Gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele*** este suma exponenților nedeterminatelor lui. Gradul monomului nenul care nu conține nedeterminate este 0.

**Exemplu**

Monomul $\sqrt{2}X^2Y$ are gradul 2 în raport cu nedeterminata *X*, gradul 1 în raport cu nedeterminata *Y* şi gradul 3 în raport cu ambele nedeterminate.

Monoamele cu aceeaşi parte literală (făcând abstracție de ordinea factorilor) se numesc ***monoame asemenea*** sau (la adunare) ***termeni asemenea***.

Adunarea, scăderea, înmulțirea, ridicarea la putere cu exponent natural a monoamelor se efectuează în conformitate cu proprietățile acestor operații (cunoscute pentru numere), respectând ordinea efectuării lor.

**Exemplu**

$$3\cdot(2X)^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=3\cdot4\cdot X^2+Y^2-3X^2+7Y^2Z=9X^2+Y^2+7Y^2Z.$$

***Polinomul*** este o sumă algebrică de monoame. Polinomul ai cărui coeficienți sunt egali cu 0 se numeşte ***polinom nul***. Termenul care nu conține nedeterminate se numeşte ***termen liber***.

Aplicații importante au polinoamele de o nedeterminată. Un polinom de o nedeterminată, examinate în continuare, este scris în ***formă canonică*** (***standard***), dacă termenii lui nenuli se succed în ordinea descrescătoare a gradelor lor. Forma canonică a unui polinom este unică. Polinoamele cu aceeaşi formă canonică ***sunt egale***.

**Exemplu**

Polinomul $P(X)=3-2X^2-X^3+7X^2-10X$ are forma canonică $-X^3+5X^2-10X+3$.

Gradul maxim al termenilor nenuli ai polinomului *Q*(*X*) se numeşte ***gradul*** lui *Q*(*X*) şi se notează $\operatorname{grad}Q(X)$. Gradul polinomului nul este nedeterminat. Un polinom de grad *n* se scrie în forma

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\quad(a_n\neq0).$$

Coeficientul $a_n$ se numeşte ***coeficient dominant***, coeficientul $a_0$ – ***termen liber***.

Adunarea şi scăderea polinoamelor se efectuează reducând termenii asemenea în suma respectivă. Înmulțirea a două polinoame se efectuează înmulțind fiecare termen al unui polinom cu fiecare termen al celuilalt polinom, apoi reducând termenii asemenea în suma obținută.

**Observație**

Gradul produsului a două polinoame este egal cu suma gradelor factorilor; gradul sumei a două polinoame nu întrece gradul maxim al acestora.

**Exemplu**

Fie polinoamele $P(X)=X^2+X+1,\ Q(X)=X^2+X+2,\ R(X)=X^2+3.$

Forma canonică a polinomului $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)$ se determină relativ simplu, dacă îl scriem în forma:

$$P(X)(Q(X)-R(X))=(X^2+X+1)(X^2+X+2-X^2-3)=(X^2+X+1)(X-1)=X^3-1.$$

Pentru rezolvarea unor probleme se utilizează reprezentarea polinoamelor ca produs de factori.

Pentru ***descompunerea în factori a polinoamelor*** se aplică:

• *metoda factorului comun*: $X^5-16X^4=X^4(X-16)$;

• *metoda grupării*: $X^3-6X^2+12X-72=X^2(X-6)+12(X-6)=(X-6)(X^2+12)$;

• *formulele de calcul prescurtat*:

$27X^3-1=(3X)^3-1^3=(3X-1)((3X)^2+3X\cdot 1+1)=(3X-1)(9X^2+3X+1)$;

• *descompunerea în factori a trinomului de gradul II*:

$$X^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})X-\sqrt{12}=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{6}),$$

fiindcă soluțiile ecuației $x^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})x-\sqrt{12}=0$ sunt $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{6}$;

• *combinarea diferitelor metode, procedee*:

$64X^3+4X^2+X+1=(64X^3+1)+4X^2+X=((4X)^3+1^3)+X(4X+1)=$

$=(4X+1)(16X^2-4X+1)+X(4X+1)=(4X+1)(16X^2-3X+1)$.

Polinoamele de gradul I cu coeficienți reali și polinoamele de gradul II (trinoamele) cu coeficienți reali care nu pot fi reprezentate ca produs de factori de gradul I cu coeficienți reali (de exemplu, $16X^2-3X+1$, $X^2+X+1$) se numesc ***ireductibile*** (peste $\mathbb{R}$).

**Exercițiu rezolvat**

Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul:

$$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1.$$

*Rezolvare*:

$Q(X)=X^4-2X^3+2X^2-2X+1=X^4+X^2+X^2+1-2X(X^2+1)=$

$=X^2(X^2+1)+X^2+1-2X(X^2+1)=(X^2+1)(X^2-2X+1)=(X-1)^2(X^2+1)$.

Dacă $P(X)=Q(X)\cdot H(X)$, atunci se spune că ***polinomul P(X) se împarte exact*** la $Q(X)$, (la $H(X)$), iar $H(X)$ (respectiv $Q(X)$) se numește ***câtul*** împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$ (respectiv la $H(X)$).

**Exemplu**

Polinomul $P(X)=X^5-16X^4$ se descompune în factori: $X^4\cdot(X-16)$. Deci, $P(X)$ se împarte exact la $X^4$ (respectiv la $X-16$); polinomul $X^4$ (respectiv $X-16$) este câtul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $X-16$ (respectiv la monomul $X^4$).

Pentru a determina dacă un polinom se împarte fără rest la alt polinom, se poate aplica (în afară de descompunerea în factori) algoritmul împărțirii a două polinoame.

**Exercițiu rezolvat**

Să se împartă polinomul $P(X)=8X^3-2X^2+X+3$ la binomul $X+2$.

*Rezolvare*:

Amintim că termenii câtului reprezintă câturile împărțirii termenului de grad superior al lui $P(X)$ și a termenilor de grad superior ai resturilor obținute la termenul de grad superior al lui $Q(X)$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8X^3 & -\ 2X^2 & +\ X & +3 & X+2 \\
\cline{5-5}
-\ 8X^3 & +16X^2 & & & 8X^2-18X+37 \\
\cline{1-4}
 & -18X^2 & +\ X & +3 & \\
 & -\ -18X^2 & -36X & & \\
\cline{2-4}
 & & 37X & +3 & \\
 & & -\ 37X & +74 & \\
\cline{3-4}
 & & & -71 &
\end{array}
$$

Am obținut câtul $8X^2-18X+37$ și restul –71, deci

$8X^3-2X^2+X+3=(X+2)(8X^2-18X+37)+(-71).$

Gradul restului este neapărat mai mic decât gradul împărțitorului sau restul este 0, de aceea, împărțind polinomul $P(X)$ la binomul $X-\alpha$, se va obține restul un număr.

Dacă $P(X)=a_nX^n+\ldots+a_1X+a_0$, atunci numărul $P(\alpha)=a_n\alpha^n+\ldots+a_1\alpha+a_0$ se numește ***valoarea numerică*** a lui $P(X)$ pentru $X=\alpha$.

**Teoremă**

**(teorema lui Bézout)**

Restul împărțirii unui polinom $P(X)$ la binomul $X-\alpha$ este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $X=\alpha$, adică $R=P(\alpha)$.

**Exercițiu rezolvat**

Să se determine restul împărțirii polinomului $P(X)=2X^3+aX^2+aX-3$ la binomul $X-2$, știind că la împărțirea polinomului $P(X)$ la $X+2$ se obține restul –9.

*Rezolvare*:

Aplicăm teorema lui Bézout.

Din condiția $P(-2)=-9$ obținem ecuația $2\cdot(-8)+4a-2a-3=-9$, cu soluția $a=5$. Astfel, $P(X)=2X^3+5X^2+5X-3$.

Aflăm restul împărțirii lui $P(X)$ la $X-2$: $R=P(2)=2\cdot8+5\cdot4+5\cdot2-3=43$.

*Răspuns*: $R=43$.

## 2.2. Rădăcinile polinomului

Din teorema lui Bézout rezultă că dacă la împărțirea polinomului $P(X)$ la binomul $X-\alpha$ se obține restul 0, adică $P(\alpha)=0$, atunci polinomul $P(X)$ se descompune în factori: $P(X)=(X-\alpha)\cdot Q(X)$.

**Definiție**

Numărul $\alpha$ se numește **rădăcină** a polinomului $P(X)$ dacă $P(\alpha)=0$.

Pentru a determina rădăcinile unui polinom $P(X)$, se poate utiliza ***ecuația asociată*** lui: $P(x)=0$.

**Exercițiu rezolvat**

Să se determine rădăcinile polinomului $P(X)=X^3-6X^2+81$.

*Rezolvare*:

Rezolvăm ecuația asociată $x^3-6x^2+81=0$, reprezentând expresia din membrul stâng sub formă de produs:

$$x^3+27-6(x^2-9)=(x+3)(x^2-3x+9)-6(x-3)(x+3)=(x+3)(x^2-9x+27).$$

Ecuația obținută $(x+3)(x^2-9x+27)=0$ are doar o soluție reală $x_1=-3$ și două soluții complexe $x_{2,3}=\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Astfel, rădăcinile polinomului sunt $-3$ și $\frac{9}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Foarte util pentru determinarea rădăcinilor unui polinom (şi nu numai) este următorul corolar al teoremei lui Bézout.

**Corolar**

Numărul $\alpha$ este rădăcină a polinomului $P(X)$ dacă şi numai dacă $P(X)$ se împarte exact la $X-\alpha$.

**Exercițiu rezolvat**

Să se descompună în produs de factori polinomul $P(X)=X^3-3X^2+4$.

*Rezolvare*:

Uşor se observă că $P(2)=0$, deci $\alpha=2$ este rădăcină a lui $P(X)$. Împărțind polinomul $P(X)$ la $X-2$, obținem $P(X)=(X-2)(X^2-X-2)$. Pentru polinomul $X^2-X-2$ numărul 2, la fel, este rădăcină, deci $X^2-X-2=(X-2)(X+1)$.

Astfel, $P(X)$ se reprezintă: $P(X)=(X-2)^2(X+1)$.

**Definiție**

Numărul $m$, $m\in\mathbb{N}^*$, se numeşte **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii $\alpha$ a polinomului $P(X)$ dacă $P(X)$ se împarte exact la $(X-\alpha)^m$ şi nu se împarte exact la $(X-\alpha)^{m+1}$.

Pentru polinomul din exercițiul precedent $\alpha=2$ este rădăcină cu ordinul de multiplicitate 2 (este ***rădăcină dublă***), iar $\beta=-1$ are ordinul de multiplicitate 1 (este ***rădăcină simplă***).

**Exercițiu rezolvat**

a) Să se descompună în produs de factori ireductibili cu coeficienți reali polinomul $P(X)=X^6-2X^5+3X^4-4X^3+3X^2-2X+1$.

b) Să se determine rădăcinile polinomului şi ordinele de multiplicitate ale acestora.

*Rezolvare*:

a) Se observă uşor că $P(1)=0$. Deci, împărțind $P(X)$ la $X-1$, obținem:

$$P(X)=(X-1)(X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1).$$

Împărțim polinomul $Q(X)=X^5-X^4+2X^3-2X^2+X-1$ iarăşi la $X-1$ şi obținem $Q(X)=(X-1)(X^4+2X^2+1)$.

Astfel, $P(X)=(X-1)^2(X^4+2X^2+1)=(X-1)^2(X^2+1)^2$. Polinoamele $X-1$, $X^2+1$ sunt ireductibile (peste $\mathbb{R}$).

b) Rădăcinile polinomului $P(X)$ sunt şi rădăcinile factorilor $X-1$, $X^2+1$. Deci, 1, $\pm\mathrm{i}$ sunt toate rădăcinile lui $P(X)$. Din descompunerea anterioară a polinomului $P(X)$ obținem $P(X)=(X-1)^2(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2$ – descompunerea în produs de factori ireductibili cu coeficienți complecşi. Toate cele 3 rădăcini au ordinele de multiplicitate 2.

# § 3 ECUAȚII. INECUAȚII. SISTEME. TOTALITĂȚI

## 3.1. Noțiuni generale

**Definiție**

Se numeşte **ecuație** (**inecuație**) cu o necunoscută egalitatea (inegalitatea) de forma $A(x)=B(x)$, $(A(x)>B(x),\ A(x)<B(x),\ A(x)\geq B(x)$ sau $A(x)\leq B(x))$, unde $A(x)$, $B(x)$ sunt expresii în care apare necunoscuta $x$ în cel puțin una dintre ele.

Similar se definesc ecuațiile (inecuațiile) cu mai multe necunoscute.

**Definiții**

• Se numeşte **soluție** a ecuației (inecuației) cu o necunoscută valoarea necunoscutei care prin înlocuire transformă această ecuație (inecuație) într-o propoziție adevărată.

• Se numeşte **soluție** a sistemului de două (trei) ecuații cu două (trei) necunoscute perechea ordonată $(a, b)$ de valori (tripletul ordonat $(a, b, c)$ de valori) ale necunoscutelor care este soluție a fiecărei ecuații din sistemul dat, altfel spus, care prin înlocuire transformă fiecare ecuație într-o propoziție adevărată.

***Mulțimea soluțiilor totalității de ecuații*** (***sisteme***) este reuniunea mulțimilor soluțiilor ecuațiilor (sistemelor) din această totalitate.

***Domeniul valorilor admisibile*** (**DVA**) al ecuației (inecuației, sistemului) este mulțimea valorilor necunoscutei (necunoscutelor) pentru care au sens toate expresiile din ecuație (inecuație, sistem).

Soluții ale ecuației (inecuației, sistemului) pot fi numai acele valori ale necunoscutei (necunoscutelor) care aparțin DVA al ecuației (inecuației, sistemului).

**Definiție**

Două ecuații (inecuații, sisteme, totalități) (de regulă cu aceleaşi necunoscute) se numesc **echivalente** dacă mulțimile lor de soluții sunt egale.

La rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor şi totalităților se aplică, de regulă, transformări care păstrează echivalența ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor, totalităților. Se admit şi transformări care conduc la obținerea unor soluții străine, dar nicidecum cele care conduc la pierderea soluțiilor. Soluțiile străine se exclud prin verificare. În cazul în care toate transformările efectuate în procesul rezolvării păstrează echivalența, verificarea este de prisos.

De exemplu, la ridicarea la putere cu exponent natural pot fi obținute soluții străine, iar la împărțirea la o expresie ce conține necunoscuta apare pericolul de a pierde soluții.

## 3.2. Transormări care păstrează în DVA echivalența sistemelor de ecuații

1. Schimbarea ordinii ecuațiilor în sistem.
2. Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu o ecuație echivalentă.
3. Exprimarea unei necunoscute din una dintre ecuațiile sistemului prin celelalte necunoscute şi substituirea acestei necunoscute cu expresia obținută în celelalte ecuații ale sistemului.
4. Înlocuirea unei ecuații a sistemului cu o altă ecuație, care se obține în urma adunării algebrice a ecuației date cu orice altă ecuație a sistemului.

## 3.3. Metode de rezolvare a ecuațiilor

1. Aplicarea formulelor de rezolvare a ecuațiilor (de exemplu, a ecuațiilor de gradul II, ecuațiilor trigonometrice etc.).
2. Metoda utilizării necunoscutei (necunoscutelor) auxiliare.
3. Metoda descompunerii în factori.
4. Metoda grafică.

Pentru unele clase de ecuații se aplică şi metode specifice. De exemplu, împărțirea ambilor membri ai ecuației omogene la una şi aceeaşi expresie nenulă, ridicarea la putere cu exponent natural a ambilor membri ai ecuațiilor iraționale, omogenizarea unor ecuații trigonometrice, metoda intervalelor pentru ecuațiile cu modul etc.

La rezolvarea inecuațiilor se aplică metode similare cu metodele de rezolvare a ecuațiilor.

## 3.4. Metode de rezolvare a ecuațiilor ce conțin expresii cu modul

Evidențiem cele mai frecvent utilizate metode de rezolvare a ecuațiilor ce conțin expresii cu modul.

**1.** *Aplicarea definiției modulului*

**Exemplu**

$|2x-3|=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-3=7\\2x-3=-7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5,\\x=-2.\end{array}\right.$ *Răspuns*: $S=\{-2,\ 5\}$.

**2.** *Utilizarea relației* $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$

**Exemplu**

$|x+2|=|3x-2| \Leftrightarrow (x+2)^2=(3x-2)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4=9x^2-12x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x^2-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\x=2.\end{array}\right.$ *Răspuns*: $S=\{0,\ 2\}$.

**3.** *Metoda utilizării necunoscutei auxiliare*

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $2\lg^2 x+|\lg x|-3=0$.

*Rezolvare*:

DVA: $x\in\mathbb{R}_+^*$. Fie $|\lg x|=t$. Din relația $\lg^2 x=|\lg x|^2$ obținem ecuația $2t^2+t-3=0$, cu soluțiile $t_1=1,\ t_2=-\frac{3}{2}$. Revenim la necunoscuta $x$ şi rezolvăm totalitatea de ecuații:

$$\left[\begin{array}{l}|\lg x|=1\\|\lg x|=-\frac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lg x=1\\\lg x=-1\\S_1=\varnothing\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10\\x=\frac{1}{10}.\end{array}\right.$$

*Răspuns*: $S=\left\{10,\ \frac{1}{10}\right\}$.

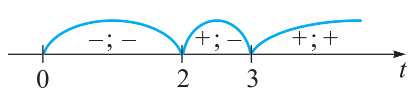
**4.** *Metoda intervalelor*

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=x-1$.

*Rezolvare*:

DVA: $x\in[1,\ +\infty)$. Notăm $\sqrt{x-1}=t,\ t\geq 0$, atunci $x-1=t^2$. Obținem şi rezolvăm ecuația $|t-2|+|t-3|=t^2$. Zerourile expresiilor cu modul sunt $t_1=2,\ t_2=3$.



a) Pentru $t\in[0,\ 2)$ rezolvăm ecuația (în intervale sunt notate semnele expresiilor de sub semnul modulului):

$$-(t-2)-(t-3)=t^2 \Leftrightarrow t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1-\sqrt{6}\notin[0,\ 2), \\ t=-1+\sqrt{6}\in[0,\ 2). \end{array}\right.$$

b) Pentru $t\in[2,\ 3)$ rezolvăm ecuația $t-2-t+3=t^2 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\notin[2,\ 3), \\ t=-1\notin[2,\ 3). \end{array}\right.$

c) Pentru $t\in[3,\ +\infty)$ rezolvăm ecuația $t-2+t-3=t^2 \Leftrightarrow t^2-2t+5=0$, deci $S_1=\varnothing$.

Aşadar, unica soluție a ecuației este $t=-1+\sqrt{6}$. Revenim la necunoscuta $x$ şi obținem ecuația $\sqrt{x-1}=-1+\sqrt{6}$, cu soluția $8-2\sqrt{6}\in \text{DVA}$.

*Răspuns*: $S=\{8-2\sqrt{6}\}$.

**5.** *Metoda grafică*

În unele cazuri, reprezentarea grafică a funcțiilor corespunzătoare ecuației date facilitează rezolvarea acesteia.

## 3.5. Metode de rezolvare a inecuațiilor cu modul

Evidențiem metodele utilizate cel mai frecvent.

**1.** *Utilizarea relației* $|f(x)|\le g(x) \Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge -g(x) \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$

**2.** *Aplicarea relației* $|f(x)|\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)\ge g(x) \\ f(x)\le -g(x) \end{array}\right.$

**3.** *Metoda utilizării necunoscutei auxiliare*

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $3^{2|x|}-5\cdot 3^{|x|}+6\le 0$.

*Rezolvare*:

DVA: $x\in\mathbb{R}$. Facem substituția $3^{|x|}=t,\ \ t>0$, şi obținem inecuația $t^2-5t+6\le 0$, cu soluțiile $t\in[2,\ 3]$, sau $2\le t\le 3$.

Revenim la necunoscuta $x$ şi rezolvăm inecuația:

$$2\le 3^{|x|}\le 3 \Leftrightarrow \log_3 2\le \log_3 3^{|x|}\le \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3 2\le |x|\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\le 1 \\ |x|\ge \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge \log_3 2 \\ x\le -\log_3 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x\ge \log_3 2 \end{cases} \\ \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ x\le -\log_3 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 2\le x\le 1 \\ -1\le x\le -\log_3 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-1;\ -\log_3 2]\cup[\log_3 2;\ 1].$$

*Răspuns*: $S=[-1;\ -\log_3 2]\cup[\log_3 2;\ 1]$.

**4.** *Metoda intervalelor*

Algoritmul de aplicare a metodei intervalelor la rezolvarea inecuațiilor cu modul este similar cu cel aplicat la rezolvarea ecuațiilor cu modul.

## 3.6. Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații

1. Metoda substituției.
2. Metoda reducerii.
3. Metoda utilizării necunoscutei (necunoscutelor) auxiliare.
4. Metoda grafică.

Sistemul de ecuații se numeşte ***compatibil*** dacă el are soluții.

Sistemul de ecuații este ***compatibil determinat*** dacă el are o mulțime finită de soluții, şi ***compatibil nedeterminat*** dacă el admite o mulțime infinită de soluții.

Sistemul de ecuații se numeşte ***incompatibil*** dacă el nu are soluții.

Prezentăm încă două transformări care păstrează în DVA echivalența:

**1.** $E_1(x)\cdot E_2(x)\cdot\ldots\cdot E_n(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} E_1(x)=0,\\ E_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ E_n(x)=0;\end{array}\right.$  **2.** $(E_1(x))^2=(E_2(x))^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} E_1(x)=E_2(x),\\ E_1(x)=-E_2(x).\end{array}\right.$

La rezolvarea sistemelor (totalităților) de inecuații se utilizează metode similare cu metodele de rezolvare a inecuațiilor.

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases}\log_x(x+2)>2,\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x.\end{cases}$

*Rezolvare*:

DVA: $x\in(0,1)\cup(1,\log_2 9)$.

$$\begin{cases}\log_x(x+2)>2\\ \log_2(9-2^x)\ge 3-x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x<1\\ x+2<x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\\ \begin{cases}x>1\\ x+2>x^2\\ 9-2^x>0\\ 9-2^x\ge 2^{3-x}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(0,1)\\ x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)\\ x\in(-\infty,\log_2 9)\\ x\in[0,3]\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(1,+\infty)\\ x\in(-1,2)\\ x\in(-\infty,\log_2 9)\\ x\in[0,3]\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}S=\varnothing,\\ x\in(1,2).\end{array}\right.$$

*Răspuns*: $S=(1,2)$.

La rezolvarea ecuațiilor, inecuațiilor, sistemelor şi totalităților de ecuații (inecuații) se va ține cont de mulțimea în care se rezolvă acestea.

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve în **C** ecuația $3x^3+2x^2+2x+3=0$.

*Rezolvare*:

Ecuația, fiind reciprocă de gradul trei, are soluția $x=-1$.

Descompunem în factori şi obținem: $3x^3+2x^2+2x+3=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0\\ 3x^2-x+3=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1,\\ x=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\\ x=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}.\end{array}\right.$$

*Răspuns*: $S=\left\{-1,\ \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{35}}{6},\ \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{35}}{6}\right\}.$

# § 4 ȘIRURI DE NUMERE REALE. LIMITE DE ȘIRURI

## 4.1. Noțiunea de şir. Şiruri monotone. *Şiruri mărginite

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \frac{n+3}{n+4}$

$(x_n)_{n\geq 1},\ x_n = \frac{1}{n+1}$

Se numeşte ***şir de numere reale*** sau ***şir numeric*** orice funcție $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Notând $f(n) = x_n$, şirul poate fi scris sub forma $x_1, x_2, x_n, \ldots$ sau $(x_n)_{n\geq 1}$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte ***crescător*** (respectiv ***descrescător***) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte ***strict crescător*** (respectiv ***strict descrescător***) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Şirurile crescătoare şi şirurile descrescătoare se numesc ***şiruri monotone***.

Şirurile strict crescătoare şi şirurile strict descrescătoare se numesc ***şiruri strict monotone***.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale este ***mărginit*** dacă satisface una din următoarele condiții:

a) există numerele $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b,$ astfel încât $a \leq x_n \leq b,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$;

b) există numărul $M \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $|x_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

## 4.2. Progresii aritmetice şi progresii geometrice

**Definiție**

Se numeşte **progresie aritmetică** un şir de numere în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin adăugarea aceluiaşi număr – rația progresiei.

Orice termen al unei progresii aritmetice $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$, începând cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui, adică pentru orice $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Termenul general al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ unde } d \text{ este rația progresiei.}$$

Suma primilor $n$ termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ se calculează conform formulei:

$$S_n = \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

**Definiție**

Se numeşte **progresie geometrică** un şir de numere al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din cel precedent prin înmulțirea cu acelaşi număr nenul – rația progresiei.

Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots$, începând cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui, adică pentru orice $n \geq 2$,

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Termenul general al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este dat de formula:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \text{ unde } q \text{ este rația progresiei.}$$

Suma primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ se determină cu formula:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1.$$

Suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare se calculează conform formulei:

$$S = \frac{b_1}{1-q},\ |q|<1.$$

**Problemă rezolvată**

Un ciclist a parcurs în prima oră o distanță de 5 km. În fiecare oră următoare el a parcurs o distanță cu 2 km mai mare decât în ora precedentă. În câte ore ciclistul a parcurs distanța de 32 km?

*Rezolvare*:

Distanțele parcurse de ciclist în fiecare oră formează o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 5$ și rația $d = 2$. Folosind formula sumei primilor $n$ termeni ai unei progresii aritmetice, obținem ecuația $\frac{2\cdot 5 + 2(n-1)}{2}\cdot n = 32 \Leftrightarrow n^2 + 4n - 32 = 0$, cu soluțiile $n_1 = 4$, $n_2 = -8$ (care nu corespunde condiției problemei).

*Răspuns*: În 4 ore.

## 4.3. Limita unui şir. Subşiruri

Se numeşte ***vecinătate*** a unui punct $a \in \mathbb{R}$ orice interval deschis de forma $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

**Definiții**

• **Definiția limitei unui şir în limbajul vecinătăților**

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi $a$ un număr real. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are **limita** $a$ dacă în orice vecinătate a punctului $a$ se conțin toți termenii şirului începând de la un anumit rang (indice).

*Se notează*: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n \to a$ când $n \to \infty$.

• **Definiția limitei unui şir în limbajul $\varepsilon$**

Numărul $a \in \mathbb{R}$ este **limita** şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n > n_\varepsilon$, are loc inegalitatea $|x_n - a| < \varepsilon$.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, iar $(n_k)_{k\geq 1}$ un şir strict crescător de numere, $n_k \in \mathbb{N}^*$. Şirul $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ se numeşte ***subşir*** al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

Se spune că şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ are ***limită infinită*** şi se scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice $n > n_\varepsilon$ avem $|x_n| > \varepsilon$.

Şirul care are limită finită se numeşte ***şir convergent***. Şirul care nu este convergent (adică şirul care nu are limită sau are limita infinită) se numeşte ***divergent***.

## 4.4. Numărul *e*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}7182818284590...$$

**Exercițiu rezolvat**

Să se calculeze limitele pentru şirurile definite prin:

a) $x_n = \sqrt[3]{n^3-3n+5}-\sqrt{n+8}$; b) $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$; c) $x_n = \left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}\right)^n$.

*Rezolvare*:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3-3n+5}-\sqrt{n+8}) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^3}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{8}{n^2}}\right) = \infty\cdot 1=\infty,$ deoarece $n\to\infty,$ iar expresia din paranteze tinde la 1.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} = \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3}$. (Conform formulei pentru suma unei progresii geometrice infinit descrescătoare $S=\dfrac{b_1}{1-q}$.)

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2+n+1}{n^2-3n+2}-1\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4n-1}{n^2-3n+2}\right)^{\frac{n^2-3n+2}{4n-1}}\right]^{\frac{n(4n-1)}{n^2-3n+2}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-n}{n^2-3n+1}} = e^4.$

# § 5 LIMITE DE FUNCȚII. FUNCȚII CONTINUE

## 5.1. Limite de funcții

**Definiții**

• Fie $E \subseteq \mathbb{R}$. Punctul $x_0$ se numeşte **punct de acumulare** a mulțimii $E$ dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $x_0$ are loc relația $V \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ sau dacă există şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n \in E \setminus \{x_0\}$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

• Fie $E \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ o funcție şi $x_0$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E$. Se spune că numărul $l$ (finit sau infinit) este **limita** funcției $f$ în punctul $x_0$ (se notează $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$) dacă pentru orice vecinătate $U$ a lui $l$ există o vecinătate $V$ a lui $x_0$, astfel încât pentru orice $x \in V \cap (E \setminus \{x_0\})$ rezultă $f(x) \in U$.

• Numărul $l_s$ (respectiv $l_d$) este **limita la stânga** (respectiv **limita la dreapta**) a funcției $f$ în punctul $x_0$ dacă pentru orice vecinătate $U$ a lui $l_s$ (respectiv $l_d$) există o vecinătate $V$ a lui $x_0$, astfel încât pentru orice $x < x_0$ (respectiv pentru orice $x > x_0$), $x \in V \cap (E \setminus \{x_0\})$, rezultă că $f(x) \in U$.

• Numerele $l_s = l_s(x_0)$, $l_d = l_d(x_0)$ se numesc **limite laterale** ale funcției $f$ în punctul $x_0$ şi se notează $l_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, $l_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

### 5.1.1. Criterii de existență a limitei unei funcții într-un punct

Fie $f\colon E \to \mathbb{R}$ o funcție şi $x_0$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E$.

*Criteriul în limbajul limitelor laterale*

Fie $x_0$ un punct de acumulare pentru mulțimile $E \cap (-\infty, x_0)$ şi $E \cap (x_0, +\infty)$. Funcția $f$ are limită în punctul $x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ dacă şi numai dacă funcția $f$ are în $x_0$ limite laterale $l_s(x_0), l_d(x_0)$ şi $l_s(x_0) = l_d(x_0) = l$.

### 5.1.2. Operații cu limite de funcții. Proprietăți ale limitelor de funcții

*Operații cu limite de funcții*

Fie funcțiile $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon E \to \mathbb{R}$, unde $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$ şi au sens operațiile:

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ \frac{a}{b},\ a^b.$$

Atunci:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [cf(x)] = ca$ $(c \in \mathbb{R})$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = a+b$, $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-g(x)] = a-b$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = a\cdot b$; 4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $g(x) \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = a^b$, unde $f(x) > 0$, $\forall x \in E$.

*Proprietăți ale limitelor de funcții*

**1°** Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, atunci această limită este unică.

**2°** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci există o vecinătate $V$ a lui $x_0$, astfel încât funcția $f$ este mărginită pe mulțimea $V \cap E$.

**3°** Dacă există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ şi $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in E$ sau pe o vecinătate a lui $x_0$ din $E$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

**4°** Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ şi dacă funcţia $g$ este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0$ din $E$, atunci funcţia $f\cdot g$ are limită în punctul $x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

**5°** Fie funcţiile $u: D\to E$, $f: E\to \mathbb{R}$, unde $D, E\subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0$ un punct de acumulare pentru mulţimea $D$. Dacă $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=y_0$, $u(x)\ne y_0$ pentru orice $x\in D$, $x\ne x_0$, şi există $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$, atunci funcţia compusă $f\circ u$ are limită în punctul $x_0$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=\lim\limits_{y\to y_0} f(y)$. Substituţia $y=u(x)$ din ultima egalitate se numeşte ***schimbare de variabilă***.

### 5.1.3. Limite remarcabile. Limite uzuale

***Limite remarcabile*** (utile la calculul limitelor de funcţii)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 2) a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

***Limite uzuale*** (utilizate des la calculul limitelor de funcţii)

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R};$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2};$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0;$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0,\ \alpha>0,\ a>1;$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,\ a>1.$

Toate limitele remarcabile şi cele uzuale, în baza proprietăţii 5° despre limita funcţiei compuse, rămân adevărate şi în cazul în care variabila $x$ este funcţie $x=u(t)$, care are limită zero sau limită infinită când $t$ tinde la un punct $t_0$.

### 5.1.4. Cazuri exceptate la operaţii cu limite de funcţii

Calculul limitelor de funcţii conduc la cazurile exceptate

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0.$$

Pentru eliminarea cazurilor exceptate se utilizează următoarele procedee:

- descompunerea expresiilor în factori (dacă este posibil) şi simplificarea factorilor comuni, raţionalizări cu expresii conjugate sau utilizarea unor limite remarcabile sau uzuale $\left(\text{cazul } \dfrac{0}{0}\right)$;
- extragerea forţată ca factor la numitorul şi numărătorul raportului a funcţiilor dominante (funcţii care tind la infinit cel mai rapid) şi utilizarea, dacă este necesar, a limitelor remarcabile sau uzuale $\left(\text{cazul } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$;

- aducerea la numitor comun, raționalizări cu expresii conjugate, transformări echivalente etc. (cazul $\infty-\infty$);
- utilizarea identităților $u\cdot v=\frac{u}{\frac{1}{v}}=\frac{v}{\frac{1}{u}}$ (cazul $0\cdot\infty$), $u^v=e^{v\ln u}$ (cazurile $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$) și plasarea în cazul exceptat $0\cdot\infty$;
- utilizarea limitelor remarcabile ce țin de numărul $e$ (cazul $1^\infty$).

Dacă $[u(x)]^{v(x)}$ reprezintă forma exceptată $1^\infty$, atunci este utilă aplicarea formulei

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[u(x)-1]v(x)}}.$$

### 5.1.5. Tabelul formelor neexceptate

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\infty+a=\infty$ | 10) $a\cdot(-\infty)=+\infty\ \ (a<0)$ | 18) $a^{+\infty}=+\infty$, dacă $a>1$ |
| 2) $(+\infty)+a=+\infty$ | 11) $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$ | 19) $a^{-\infty}=0$, dacă $a>1$ |
| 3) $(-\infty)+a=-\infty$ | 12) $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$ | 20) $a^{+\infty}=0$, dacă $0<a<1$ |
| 4) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ | 13) $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$ | 21) $a^{-\infty}=+\infty$, dacă $0<a<1$ |
| 5) $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ | 14) $\infty\cdot\infty=\infty$ | 22) $(+\infty)^a=+\infty$, dacă $a>0$ |
| 6) $a\cdot\infty=\infty\ \ (a\neq 0)$ | 15) $\frac{a}{\infty}=0$ | 23) $(+\infty)^a=0$, dacă $a<0$ |
| 7) $a\cdot(+\infty)=+\infty\ \ (a>0)$ | 16) $\frac{\infty}{a}=\infty$ | 24) $0^{+\infty}=0$ |
| 8) $a\cdot(-\infty)=-\infty\ \ (a>0)$ | 17) $\frac{a}{0}=\infty\ \ (a\neq 0)$ | 25) $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$ |
| 9) $a\cdot(+\infty)=-\infty\ \ (a<0)$ | | 26) $(+\infty)^{-\infty}=0$ |

**Exerciții rezolvate**

**1** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}$.

*Rezolvare*:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-4x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{3}{2}.$$

**2** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

*Rezolvare*:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}}=e^4,\ \text{deoarece}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x-3x}{2}\cdot\sin\frac{x+3x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\sin 2x}{x^2}=2\cdot\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=4\cdot 1\cdot 1=4.$$

**3** Să se determine valorile parametrului $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin m(x-1)}{x-1}+3x^2, & \text{dacă } x<1\\ \sqrt{x+3}+2m^2x, & \text{dacă } x\geq 1,\end{cases}$$ să aibă limită în punctul $x_0=1$.

Care este valoarea acestei limite?

*Rezolvare*:

Deoarece $l_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left[m\dfrac{\sin m(x-1)}{m(x-1)}+3x^2\right]=m+3,\ l_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(\sqrt{x+3}+2m^2x)=2+2m^2,$ rezultă că funcția $f$ are limită în punctul $x_0=1$, dacă $m+3=l_s(1)=l_d(1)=2+2m^2$.

Prin urmare, $2m^2-m-1=0$, adică $m=-\dfrac{1}{2}$ sau $m=1$.

Dacă $m=-\dfrac{1}{2}$, atunci $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=l_s(1)=l_d(1)=\dfrac{5}{2}$.

Dacă însă $m=1$, atunci $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=l_s(1)=l_d(1)=4$.

**4** Liniile automate de îmbuteliere a apei minerale ale unei întreprinderi se alimentează dintr-un bazin (rezervor) de acumulare, în care inițial se află 1000 *l* de materie primă. În conformitate cu tehnologia de producție, în fiecare secundă din bazinul de acumulare se transmit pentru îmbuteliere 10% din conținutul său și instantaneu din fântâna arteziană de alimentare a întreprinderii conținutul bazinului se restabilește cu 120 *l* de apă minerală. Câți litri de materie primă vor fi în bazinul de acumulare al întreprinderii peste o perioadă nelimitată de timp dacă automatele de îmbuteliere funcționează nonstop?

*Rezolvare*:

Fie $f(n)$ cantitatea de materie primă (în litri) din bazin în secunda a $n$-a, unde $f(0)=1000\ l$. Atunci, în secunda $n+1$ cantitatea de materie primă va fi:

$$f(n+1)=f(n)-0{,}1\cdot f(n)+120=0{,}9f(n)+120.$$

Dacă $a=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$, atunci aceeași limită va avea și $f(n+1)$, adică $a=\lim\limits_{n\to\infty}f(n+1)$.

Trecând la limită cu $n$ la infinit în relația $f(n+1)=0{,}9\cdot f(n)+120$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty}f(n+1)=0{,}9\cdot\lim\limits_{n\to\infty}f(n)+120$, adică $a=0{,}9a+120$.

Din această ecuație rezultă: $a=1200\ l$, ceea ce reprezintă cantitatea de materie primă din bazinul de acumulare al întreprinderii peste o perioadă nelimitată de timp.

## 5.2. Funcții continue

**Definiții**

• Fie $f\colon E\to\mathbb{R}$ și $x_0\in E$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E$. Funcția $f$ se numește **continuă în punctul** $x_0$ dacă există $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ și această limită este egală cu $f(x_0)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

• Punctul $x_0$ se numește **punct de continuitate** al funcției $f$ dacă funcția $f$ este continuă în punctul $x_0\in E$.

• Funcția $f$ continuă în orice punct al unei mulțimi $A\subseteq E$ se numește **continuă pe mulțimea** $A$.

• Funcția $f$ se numește **discontinuă** în punctul $x_0$ dacă ea nu este continuă în punctul $x_0\in E$. În acest caz, punctul $x_0$ se numește **punct de discontinuitate**.

• Diferența $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ se numește **saltul funcției** $f$ în punctul $x_0$ dacă există limitele laterale finite $f(x_0+0)$ și $f(x_0-0)$.

• Funcția $f$ se numește **continuă la stânga** (respectiv, **continuă la dreapta**) în punctul $x_0$ dacă în $x_0$ există limita la stânga $f(x_0-0)$ (respectiv, la dreapta $f(x_0+0)$) și, în plus, $f(x_0-0)=f(x_0)$ (respectiv, $f(x_0+0)=f(x_0)$).

**Teorema 1**

Funcția $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ este continuă în punctul $x_0 \in E$ ($x_0$ – punct interior mulțimii $E$) dacă și numai dacă ea este continuă și la stânga, și la dreapta în $x_0$, adică $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

***Concluzie.*** Funcțiile elementare (polinomiale, raționale, exponențiale etc.) sunt continue pe orice interval pe care sunt definite.

### Operații cu funcții continue

**Teorema 2**

Fie $f, g: E \to \mathbb{R}$ funcții continue într-un punct $x_0 \in E$ (respectiv pe mulțimea $E$). Atunci, funcțiile $\alpha f$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sunt continue în $x_0$ (respectiv, pe mulțimea $E$). Dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este o funcție continuă în $x_0$ (respectiv, pe mulțimea $E \setminus \{x \mid x \in E,\ g(x) = 0\}$).

**Teorema 3**

Fie funcțiile $g: E_1 \to E_2$, $f: E_2 \to \mathbb{R}$ $(E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R})$ și $h = f \circ g: E_1 \to \mathbb{R}$ compusa lor. Dacă funcția $g$ este continuă într-un punct $x_0 \in E_1$ și funcția $f$ este continuă în punctul $y_0 = g(x_0) \in E_2$, atunci funcția $h$ este continuă în punctul $x_0$.

### Proprietăți ale funcțiilor continue

**Teorema 4**

**Teorema I Weierstrass de mărginire**

Orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită pe acest interval.

**Teorema 5**

**Teorema II Weierstrass**

Orice funcție continuă pe un interval compact își atinge marginile pe acest interval.

**Teorema 6**

**Teorema I Bolzano–Cauchy despre anularea funcției**

Fie funcția $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a, b]$ și la extremitățile acestui interval funcția $f$ ia valori de semn opus: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci, există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

**Exercițiu rezolvat**

Să se studieze continuitatea funcției:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x < 0 \\ \sin x + \cos x, & \text{dacă } x \geq 0; \end{cases}$

b) $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + x, & \text{dacă } x > 1; \end{cases}$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x^2 - 1}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$

*Rezolvare*:

a) Funcția $f$, fiind elementară, este continuă pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Rămâne să studiem continuitatea ei în punctul $x_0 = 0$. Cum $f(0) = 1$, $f(-0) = 1$, $f(+0) = 1$ și $f(-0) = f(+0) = f(0)$, rezultă că funcția $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Funcția $g$ este continuă în orice $x \in [0, +\infty) \setminus \{1\}$, iar în punctul $x_0 = 1$ avem: $g(1) = 1$, $g(1-0) = 1$, $g(1+0) = 3$. Prin urmare, punctul $x_0 = 1$ este punct de discontinuitate de speța întâi. Mai observăm că funcția $g$ este continuă la stânga în punctul $x_0 = 1$.

c) Evident, funcția $h$ este continuă pe intervalele $(-\infty, 1)$ și $(1, +\infty)$, iar în punctul $x_0 = 1$ avem $\lim\limits_{x \to 1-0} h(x) = e = h(1)$, $\lim\limits_{x \to 1+0} h(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$, adică $x_0 = 1$ este punct de discontinuitate de speța a doua.

# § 6 FUNCȚII DERIVABILE

## 6.1. Derivata unei funcții

Fie funcția $f: I \to \mathbb{R}$, unde intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi $x$ un punct arbitrar dintr-o vecinătate oarecare a punctului fixat $x_0$. Fie $x - x_0 = \Delta x$ creşterea argumentului în punctul $x_0$, iar $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ sau $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ creşterea funcției $f$ în punctul $x_0$ corespunzătoare creşterii $\Delta x$ a argumentului.

**Definiție**

Fie intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi funcția $f: I \to \mathbb{R}$. Se spune că funcția $f$ **are derivată în punctul $x_0$** dacă există limita:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1) \qquad \text{sau} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2).$$

Această limită se numeşte **derivata funcției $f$ în punctul $x_0$** şi se notează $f'(x_0)$.

Dacă, în plus, $f'(x_0)$ este finită, funcția $f$ se numeşte **derivabilă în punctul $x_0$**.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad \text{sau} \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

**Observații**

**1.** În cazul în care limita (1) (sau (2)) există şi este infinită ori nu există, ***funcția $f$ nu este derivabilă în punctul $x_0$***.

**2.** La studiul derivabilității unei funcții într-un punct se iau în considerare doar valorile funcției respective într-o vecinătate a acestui punct. Din aceste motive se mai spune că ***derivabilitatea funcției este o proprietate locală a acesteia***.

**3.** Se spune că ***funcția $f$ este derivabilă pe mulțimea $M$*** $(M \subseteq I)$ dacă ea este derivabilă în orice punct din $M$.

**Teorema 1**

Dacă o funcție este derivabilă într-un punct, atunci ea este continuă în acest punct.

Reciproca acestei teoreme este falsă. (Exemplificați!)

**Definiții**

• Fie intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ şi funcția $f: I \to \mathbb{R}$.

Limita

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3) \text{ (respectiv } \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (4))$$

(dacă aceasta există), finită sau infinită, se numeşte **derivata la stânga** (respectiv **derivata la dreapta**) **a funcției $f$ în punctul $x_0$**.

Se notează: $f'_s(x_0)$, $f'_d(x_0)$.

• Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq \mathbb{R})$ se numeşte **derivabilă la stânga** (respectiv **la dreapta**) **în punctul $x_0$** dacă limita (3) (respectiv (4)) există şi este finită.

**Teorema 2**

Funcția $f: I \to \mathbb{R}$ (intervalul deschis $I \subseteq \mathbb{R}$) este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ dacă şi numai dacă ea este derivabilă la stânga şi la dreapta în $x_0$ şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

În acest caz, $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

## 6.2. Diferențiala unei funcții

**Definiție** Funcția liniară $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$, se numește **diferențiala funcției $f$ în punctul $x_0$** și se notează $\mathrm{d}f(x_0)$.

În cazul particular $f(x) = x$, avem $f'(x_0) = 1$ și, deci, $\mathrm{d}x(x_0) = \Delta x$, $\forall \Delta x \in \mathbb{R}$.

Dacă funcția $f$ este derivabilă în orice punct din $I \subseteq \mathbb{R}$, obținem formula de calcul al diferențialei:

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x, \ \forall x \in I}.$$

De exemplu, pentru funcția $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos 2x$, obținem:

$$\mathrm{d}(\cos 2x) = (\cos 2x)'\mathrm{d}x = -2\sin 2x\,\mathrm{d}x.$$

## 6.3. Interpretarea geometrică a derivatei și diferențialei funcției

*Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții f derivabile într-un punct* $x_0$

Existența derivatei finite a funcției $f$ în punctul $x_0$ este echivalentă cu existența tangentei (neverticale – neparalele cu axa $Oy$) la graficul $G_f$ în punctul $(x_0, f(x_0))$, astfel încât panta (coeficientul unghiular) $m$ a acestei tangente este $f'(x_0)$ (fig. 9.2).

Deci, $m = f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$.

Fie funcția $f$ continuă în punctul $x_0$. Ecuația tangentei (neverticale) la graficul funcției $f$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

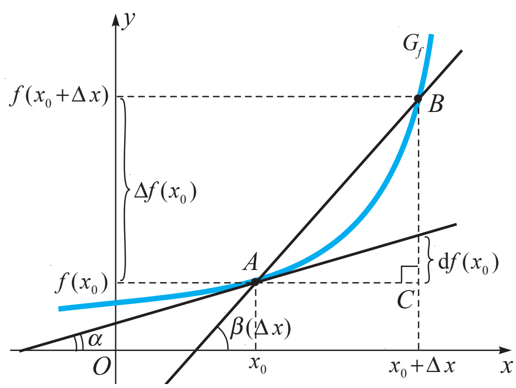



Fig. 9.2

Dacă $f'(x_0) = \infty$ ($f'(x_0) = +\infty$ sau $f'(x_0) = -\infty$), atunci tangenta în punctul $(x_0, f(x_0))$ este verticală (deci, paralelă cu axa $Oy$) și are ecuația $\boxed{x = x_0}$.

Punctul $A(x_0, f(x_0))$ în care funcția $f$ este continuă, dar nu este derivabilă, pentru graficul $G_f$ poate fi:

- ***punct unghiular***, dacă $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și cel puțin o derivată laterală este finită;
- ***punct de întoarcere***, dacă $f'_s(x_0) \neq f'_d(x_0)$ și ambele sunt infinite;
- ***punct de inflexiune***, dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = \pm\infty$ și au același semn.

*Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții f*

$\Delta f(x_0)$ reprezintă creșterea „ordonatei funcției $f$”, ce corespunde creșterii $\Delta x$ a argumentului ei, iar $\mathrm{d}f(x_0)$ reprezintă creșterea „ordonatei tangentei” la graficul $G_f$ în punctul $(x_0, f(x_0))$, ce corespunde aceleiași creșteri $\Delta x$ a argumentului funcției $f$ (fig. 9.1).

## 6.4. Regulile de calcul al derivatelor şi diferențialelor funcțiilor

*Principalele reguli de calcul al derivatelor şi diferențialelor*
(fără a preciza condițiile în care au loc)

**1°** $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

**2°** $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.

**3°** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

**4°** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.

**5°** Derivata funcției compuse:

$(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

**1°′** $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$.

**2°′** $\mathrm{d}(c \cdot f) = c \cdot \mathrm{d}f$, $c$ – constantă.

**3°′** $\mathrm{d}(f \cdot g) = g \cdot \mathrm{d}f + f \cdot \mathrm{d}g$.

**4°′** $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot \mathrm{d}f - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$.

**5°′** Diferențiala funcției compuse:

$\mathrm{d}f(g) = f'(g) \cdot \mathrm{d}g$.

**6°** Derivata funcției inverse: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

**7°** Derivata de ordin superior: $f'' = (f')'$; $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

**8°** Dacă $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, $I$ – interval deschis, şi $f(x) > 0$, $\forall x \in I$, atunci

$$(f^g)' = f^g\left(g' \cdot \ln f + g \cdot \frac{f'}{f}\right).$$

**Exemple**

**1** Pentru funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sin^2 x - 5x$, obținem

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}(2\sin^2 x - 5x) =$$
$$= \mathrm{d}(2\sin^2 x) - \mathrm{d}(5x) = 2\mathrm{d}(\sin^2 x) - 5\mathrm{d}x =$$
$$= 2 \cdot 2\sin x \cos \mathrm{d}x - 5\mathrm{d}x = (2\sin 2x - 5)\mathrm{d}x.$$

**2** Pentru funcția $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^{2\sqrt{x}}$, obținem:

$$(x^{2\sqrt{x}})' = x^{2\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{2\sqrt{x}-0,5}(\ln x + 2).$$

## 6.5. Tabelul derivatelor şi diferenţialelor unor funcţii elementare

| Nr. crt. | $f$ | $D_f$ | $f'$ | $D_{f'}$ | $\mathrm{d}f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $c$ (const.) | $\mathbb{R}$ | $0$ | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| 2 | $x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $n\cdot x^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ | $n\cdot x^{n-1}\mathrm{d}x$ |
| 3 | $x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}^*$ | $(0,\ +\infty)$ | $\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ | $(0,\ +\infty)$ | $\alpha\cdot x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$ |
| 4 | $\sqrt{x}$ | $[0,\ +\infty)$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(0,\ +\infty)$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ |
| 5 | $a^x,\ a>0,\ a\neq 1$ | $\mathbb{R}$ | $a^x\ln a$ | $\mathbb{R}$ | $a^x\ln a\,\mathrm{d}x$ |
| 6 | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^x\mathrm{d}x$ |
| 7 | $\log_a x,\ \ a>0,\ a\neq 1$ | $(0,\ +\infty)$ | $\frac{1}{x\ln a}$ | $(0,\ +\infty)$ | $\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$ |
| 8 | $\ln x$ | $(0,\ +\infty)$ | $\frac{1}{x}$ | $(0,\ +\infty)$ | $\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ |
| 9 | $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos x\,\mathrm{d}x$ |
| 10 | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin x\,\mathrm{d}x$ |
| 11 | $\mathrm{tg}\,x$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ | $\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ |
| 12 | $\mathrm{ctg}\,x$ | $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}$ | $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ | $-\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ |
| 13 | $\arcsin x$ | $[-1,\ 1]$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1,\ 1)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ |
| 14 | $\arccos x$ | $[-1,\ 1]$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1,\ 1)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ |
| 15 | $\mathrm{arctg}\,x$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ |
| 16 | $\mathrm{arcctg}\,x$ | $\mathbb{R}$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ |

# § 7 PROPRIETĂȚI GENERALE ȘI APLICAȚII ALE FUNCȚIILOR DERIVABILE

## 7.1. Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile

**Definiție**

• Punctul $x_0 \in I$ se numeşte **punct de maxim local** al funcției $f$ dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numeşte **maxim local** al funcției $f$ în punctul $x_0$.

• Punctul $x_0 \in I$ se numeşte **punct de minim local** al funcției $f$ dacă există o vecinătate $V(x_0)$ a lui $x_0$, astfel încât $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$. În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numeşte **minim local** al funcției $f$ în punctul $x_0$.

• Punctele de maxim local şi de minim local ale funcției $f$ se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.

• Valorile funcției $f$ în punctele ei de extrem local se numesc **extremele locale** ale acestei funcții.

**Definiție**

Punctele de maxim (minim) local ale unei funcții se numesc **puncte de extrem local** ale acestei funcții.

**Teorema 1**

**Teorema lui Fermat**

Fie $f\colon I \to \mathbb{R}$ $(I \subseteq R)$ o funcție derivabilă pe intervalul deschis $I$. Dacă $x_0 \in I$ este un punct de extrem local al funcției $f$, atunci $f'(x_0) = 0$ (fig. 9.3).

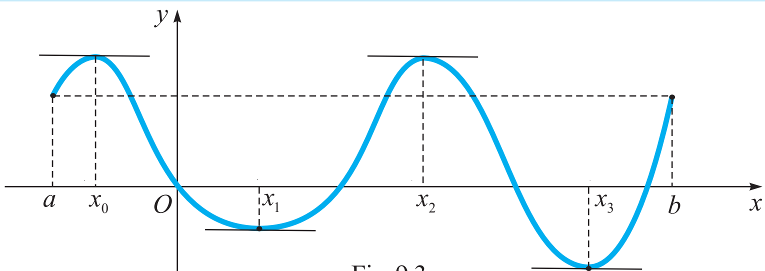



Fig. 9.3

Deoarece $x_1, x_2$ şi $x_3$ sunt puncte de extrem local al funcției $f$, avem $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$ şi $f'(x_3) = 0$ (fig. 9.3).

**Observații**

**1.** Reciproca teoremei lui Fermat este falsă, deoarece pot exista zerouri ale lui $f'$ care să nu fie puncte de extrem local ale funcției $f$. De exemplu, pentru funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, avem $f'(0) = 0$, însă $x_0 = 0$ nu este nici punct de maxim, nici punct de minim pentru funcția $f$.

**2.** Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sunt printre punctele critice ale funcției $f$, adică în care $f'(x) = 0$.

**Teorema 2**

**Teorema lui Rolle**

Dacă funcția $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$

1) este continuă pe $[a, b]$,

2) este derivabilă pe $(a, b)$,

3) $f(a) = f(b)$,

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f'(c) = 0$.

**Observație**

Punctul $c$ din teorema lui Rolle nu este întotdeauna unic pentru funcția respectivă.

**Corolare ale teoremei lui Rolle**

1. Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval deschis se află cel puțin un zerou al derivatei acestei funcții (fig. 9.3).
2. Între două zerouri consecutive ale derivatei unei funcții derivabile pe un interval deschis se află cel mult un zerou al acestei funcții (fig. 9.3).

**Teorema 3**

**Teorema lui Lagrange**

Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă funcția $f$ este

1) continuă pe $[a, b]$,

2) derivabilă pe $(a, b)$,

atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$, astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Formula $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$, sau $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, se numeşte ***formula lui Lagrange*** sau ***formula creşterilor finite***.

**Observații**

1. Punctul $c$ din teorema lui Lagrange nu este întotdeauna unic pentru funcția respectivă.
2. Teorema lui Lagrange este o generalizare a teoremei lui Rolle.

**Exercițiu rezolvat**

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)(2x+1)(3x+4)$. Să se arate că funcția $f'$ are numai zerouri reale.

*Rezolvare*:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 3\right\}$. Deoarece $f\left(-\frac{4}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, rezultă că pe $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right]$ derivata lui $f$ are cel puțin un zerou real. Deci, există punctul $c_1 \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, astfel încât $f'(c_1) = 0$.

De asemenea, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(3) = 0$. Deci, există punctul $c_2 \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$, astfel încât $f'(c_2) = 0$. În total, există cel puțin două zerouri reale $c_1$, $c_2$ pe intervalele respective. Cum $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție polinomială asociată unui polinom de gradul II, care are cel mult două rădăcini reale, rezultă că funcția $f'$ are exact două zerouri reale.

## 7.2. Aplicații ale derivatelor la calculul limitelor de funcții

Unele limite de funcții pot fi calculate cu ajutorul derivatelor utilizând regulile lui l'Hospital.

**Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat** $\dfrac{0}{0}$

**Teorema 4**

Fie $I$ un interval deschis $(I \subseteq R)$, $x_0 \in I$ şi funcțiile $f, g: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Dacă

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$,

2) funcțiile $f$ şi $g$ sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$,

3) $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in V(x_0) \cap I$,

4) există limita (finită sau infinită) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

atunci există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**Regula lui l'Hospital pentru cazul exceptat** $\frac{\infty}{\infty}$ este similară cu teorema 4.

**Observații**

1. Regulile lui l'Hospital sunt adevărate şi în cazul în care $x_0 \to \infty$, şi pentru limitele laterale în punctul indicat.
2. În caz de necesitate, dacă este posibil, aceste reguli pot fi utilizate succesiv de două, trei sau de mai multe ori pentru calculul aceleiaşi limite.
3. Cazurile exceptate $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^{\infty}$, $0^0$, $\infty^0$ pot fi reduse prin diferite metode la cazul exceptat $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, după care se aplică regula lui l'Hospital.

**Exercițiu rezolvat**

Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x^3-8}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{5^x}$.

*Rezolvare*:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x^3-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\ln\frac{x}{2}\right)'}{(x^3-8)'}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{3x^3}=\frac{1}{24}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{5^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x^2)'}{(5^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{5^x\ln 5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{(5^x\ln 5)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{5^x\ln^2 5}=0.$

Aşadar, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{3x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}3x\cdot\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)}=e^{-15}.$

## 7.3. Aplicații ale derivatelor în studiul funcțiilor

**Teorema 5**

Fie $f\colon I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul deschis $I$ $(I\subseteq\mathbb{R})$. Funcția $f$ este crescătoare (descrescătoare) pe $I$ dacă şi numai dacă $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$, $\forall x\in I$.

**Observație**

Dacă $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$, $\forall x\in I$, atunci funcția $f$ este strict crescătoare (strict descrescătoare) pe $I$.

Intervalele de monotonie şi punctele de extrem ale unei funcții $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$, derivabile pe intervalul deschis $I$, pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

I. Se calculează $f'$.

II. Se rezolvă ecuația $f'(x)=0$, $x\in I$ (soluțiile acestei ecuații (zerourile funcției $f'$) sunt eventualele puncte de extrem ale funcției $f$).

III. Se determină semnul funcției $f'$ pe intervalele pe care ea nu se anulează.

IV. Se stabilesc intervalele pe care funcția $f'$ are semn constant, acestea fiind intervalele de monotonie ale funcției $f$.

V. Se determină punctele de extrem:

1. Dacă $f'(x)>0$, $\forall x\in I$, $x<x_0$, şi $f'(x)<0$, $\forall x\in I$, $x>x_0$, atunci $x_0$ este punct de maxim local al funcției $f$.
2. Dacă $f'(x)<0$, $\forall x\in I$, $x<x_0$, şi $f'(x)>0$, $\forall x\in I, x>x_0$, atunci $x_0$ este punct de minim local al funcției $f$.

Punctele de extrem pot fi determinate şi utilizând $f''$.

**Definiție**

Funcția $f\colon I\to\mathbb{R}$ $(I\subseteq\mathbb{R})$ derivabilă de două ori pe intervalul deschis $I$ se numeşte **convexă** (**concavă**) pe $I$ dacă tangenta la graficul funcției $f$, în orice punct, se află sub grafic (deasupra graficului).

**Definiție**

Fie $f:(a, b)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe $(a, b)$. Un punct $x_0\in(a, b)$ se numeşte **punct de inflexiune** al funcției $f$ dacă există o vecinătate $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, astfel încât funcția $f$ să fie convexă pe $(x_0-\delta, x_0)$ şi concavă pe $(x_0, x_0+\delta)$ sau invers.

Intervalele de convexitate, de concavitate şi punctele de inflexiune ale unei funcții $f$ de două ori derivabilă pot fi determinate aplicând următorul *algoritm*:

I. Se calculează $f''$ şi se rezolvă ecuația $f''(x)=0$, ale cărei soluții pot fi puncte de inflexiune ale funcției $f$.

II. Se stabilesc intervalele pe care $f''$ are semn constant, acestea fiind intervalele de convexitate (dacă $f''(x)>0$) şi de concavitate (dacă $f''(x)<0$) ale funcției $f$.

III. Se determină punctele de inflexiune (dacă există) ale funcției $f$.

**Definiție**

Fie funcția $f: E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ şi $+\infty$ punct de acumulare pentru mulțimea $E$. Dreapta de ecuație $y=l$ se numeşte **asimptotă orizontală la** $+\infty$ a graficului funcției $f$ (a funcției $f$) dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

O definiție similară poate fi formulată şi pentru asimptota orizontală la $-\infty$.

**Definiție**

Fie funcția $f: E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$ şi $+\infty$ punct de acumulare pentru mulțimea $E$. Dreapta de ecuație $y=mx+n,\ m\neq 0$, se numeşte **asimptotă oblică la** $+\infty$ a graficului funcției $f$ (a funcției $f$) dacă $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx-n)=0$.

O definiție similară poate fi formulată şi pentru asimptota oblică la $-\infty$.

**Teorema 6**

Dreapta de ecuație $y=mx+n,\ m\neq 0$, este asimptotă oblică la $+\infty$ a graficului funcției $f: E\to\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $(m\neq 0)$ şi $n=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)$.

O teoremă similară are loc şi pentru $x\to-\infty$.

**Definiție**

Fie funcția $f: E\to\mathbb{R}$ $(E\subseteq\mathbb{R})$, $a\in\mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru mulțimea $E$. Dacă limita la stânga $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ (limita la dreapta $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$) este $+\infty$ sau $-\infty$, se spune că dreapta de ecuație $x=a$ este **asimptotă verticală la stânga (la dreapta)** pentru graficul funcției $f$.

Pentru a trasa graficul unei funcții se recomandă parcurgerea următoarelor *etape*:

I. Se determină domeniul de definiție al funcției.

II. Se studiază paritatea şi periodicitatea funcției.

III*. Se calculează limitele funcției la extremitățile intervalelor, se studiază continuitatea funcției şi se determină asimptotele ei.

IV. Se calculează derivata întâi şi se determină intervalele de monotonie şi extremele funcției.

V*. Se calculează derivata a doua şi se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate ale funcției şi punctele ei de inflexiune.

VI. Rezultatele obținute în etapete I–V se includ în tabloul de variație al funcției.

VII. Se trasează graficul funcției.

## 7.4. Probleme de maxim şi minim

Rezolvarea unor probleme cu conţinut geometric, fizic, economic etc. necesită deseori determinarea maximului sau minimului pe care îl poate lua o mărime variabilă ce satisface anumite condiţii. Astfel de probleme pot fi rezolvate conform următorului *algoritm*:

I. Problema se transpune în limbajul matematic cu ajutorul unei funcţii (pentru aceasta se alege un parametru convenabil $x$, iar mărimea studiată se exprimă ca funcţie de $x$).
II. Aplicând metodele studiate, se determină cea mai mică sau cea mai mare valoare a acestei funcţii pe un interval obţinut în procesul rezolvării problemei.
III. Se elucidează sensul practic (în contextul problemei iniţiale) al rezultatului obţinut.
IV. Se scrie răspunsul.

**Probleme rezolvate**

**1** Să se determine punctul graficului funcţiei $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = 2\sqrt{x},$ situat la distanţa minimă de punctul $A(2, 0)$ (fig. 9.4).

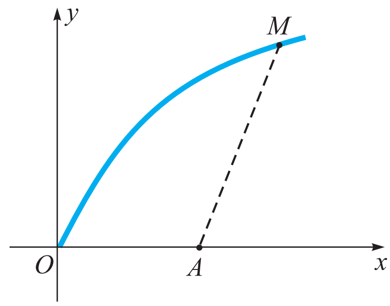


Fig. 9.4

*Rezolvare*:

Orice punct $M$ al graficului funcţiei $f$ are coordonatele $(x, 2\sqrt{x}),\ x \geq 0.$

Notăm cu d$(x)$ distanţa dintre punctele $A$ şi $M$. Atunci, $\mathrm{d}(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (2\sqrt{x} - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$

Minimul funcţiei $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ d(x) = \sqrt{x^2 + 4},$ este atins în punctul de abscisă $x_0 = 0.$

*Răspuns*: Punctul căutat $M$ coincide cu punctul $O(0, 0)$ şi distanţa minimă dintre punctele $M(0, 0)$ şi $A(2, 0)$ este egală cu 2.

**2** Cheltuielile de producţie (în lei) ale unui produs se descriu de funcţia definită prin formula $C(x) = 5 + 11x$, iar cererea – de funcţia definită prin formula $p(x) = -x^2 + 15x + 11,$ $4 < x < 12.$ Să se determine numărul de unităţi de produs $x$ pentru care venitul este maxim, precum şi valoarea venitului maxim.

*Rezolvare*:

Venitul brut $V(x) = p(x) \cdot x - C(x) = (-x^2 + 15x + 11)x - (5 + 11x) = -x^3 + 15x^2 - 5.$

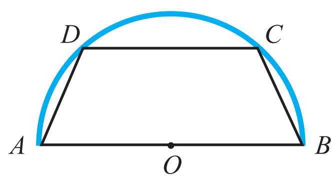
Derivata $V'(x) = -3x^2 + 30x.$ Din $V'(x) = 0$ obţinem ecuaţia $-3x^2 + 30x = 0,$ cu soluţiile $x_1 = 0,\ x_2 = 10$ ($x_1 = 0$ nu corespunde condiţiei problemei). Deoarece $V''(10) < 0,$ avem în punctul $x = 10$ maxim.

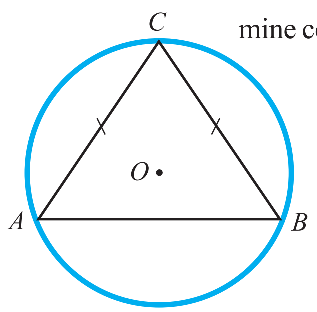
Astfel, obţinem venitul brut maxim $V(10) = -10^3 + 15 \cdot 10^2 - 5 = 495$ (lei).

*Răspuns*: 10 unităţi; 495 lei.

**Probleme propuse**

**1.** Fie un semicerc de diametrul $AB = 2r$. Dintre toate coardele $[CD]$ paralele cu diametrul $[AB]$ să se determine cea pentru care aria trapezului $ABCD$ este maximă.




**2.** Să se demonstreze că dintre toate triunghiurile isoscele, înscrise în acelaşi cerc, cea mai mare arie are triunghiul echilateral.

**3.** În piramida patrulateră regulată suma lungimii înălţimii ei şi a laturii bazei este egală cu 3. Să se afle volumul maxim posibil al piramidei.

# § 8 GEOMETRIE ÎN PLAN ȘI ÎN SPAȚIU

## 8.1. Elemente de calcul vectorial

**Definiții**

• Orice pereche ordonată de puncte $A$ şi $B$ din plan determină un **segment orientat**, notat $\overrightarrow{AB}$ (fig. 9.5).

• Punctul $A$ se numeşte **originea**, iar $B$ – **vârful** segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.


Fig. 9.5

În afară de origine şi vârf, segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$ este caracterizat prin:

1. **modul** – lungimea segmentului $AB$ (se notează $|\overrightarrow{AB}|$);
2. **direcție** – este determinată de dreapta $AB$ sau de orice altă dreaptă paralelă cu $AB$;
3. **sens** – este pus în evidență de săgeată (în cazul nostru, se spune „de la $A$ la $B$”).

**Definiție**

Se numeşte **vector** mulțimea tuturor segmentelor orientate care au acelaşi modul, aceeaşi direcție şi acelaşi sens ca şi un segment orientat dat.

Egalitatea $\overline{a}=\overrightarrow{AB}$ exprimă faptul că vectorul $\overline{a}$ este reprezentat de segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$.

Dacă extremitățile segmentului orientat coincid, atunci acest segment defineşte ***vectorul nul*** $\overline{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{OO}=\ldots$

### ✓ Suma vectorilor

Dacă vectorul $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$, vectorul $\overline{b}=\overrightarrow{AB}$, atunci $\overline{a}+\overline{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\overline{c}$ (*regula triunghiului*) (fig. 9.6).

Dacă vectorul $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$, vectorul $\overline{b}=\overrightarrow{OB}$, şi $OACB$ este un paralelogram, atunci $\overline{a}+\overline{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}=\overline{c}$ (*regula paralelogramului*) (fig. 9.7).

Doi vectori se numesc ***vectori opuşi*** dacă suma lor este vectorul nul. Opusul vectorului $\overline{a}=\overrightarrow{AB}$ este vectorul $-\overline{a}=\overrightarrow{BA}$, definit de segmentul orientat $\overrightarrow{BA}$:

$$-\overline{a}+\overline{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\overline{0}.$$

Dacă $\overline{a}=\overrightarrow{OA}$, $\overline{b}=\overrightarrow{OB}$, atunci $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$ (fig. 9.8).

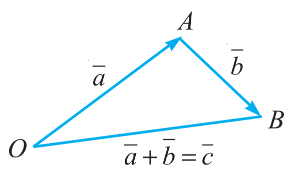



Fig. 9.6

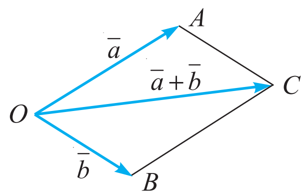



Fig. 9.7

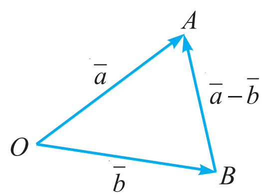



Fig. 9.8

### ✓ Produsul unui vector cu un scalar

Produsul vectorului $\overline{b}$ cu scalarul $\lambda\in\mathbb{R}$ este vectorul $\overline{a}$, care se notează $\overline{a}=\lambda\overline{b}$ şi posedă proprietățile: $|\overline{a}|=|\lambda||\overline{b}|$ şi $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$, dacă $\lambda\geq 0$; $\overline{a}\downarrow\uparrow\overline{b}$, dacă $\lambda<0$.

### ✓ Proprietăți ale operațiilor cu vectori

1° $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$; 2° $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$; 3° $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;

4° $(\lambda\mu)\overline{a}=\lambda(\mu\overline{a})$; 5° $\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}=(\lambda+\mu)\overline{a}$; 6° $\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}=\lambda(\overline{a}+\overline{b})$;

7° $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$, pentru orice $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$.

### ✓ Produsul scalar a doi vectori

$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$ $(\varphi=(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$ – unghi format de vectorii $\overline{a},\ \overline{b}$ de aceeaşi origine).

### ✓ Proprietăți ale produsului scalar a doi vectori

1° $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$;

2° $(\lambda\overline{a})\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})$;

3° $\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{c}$;

4° $\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\overline{a}\perp\overline{b}$;

5° $\overline{a}\cdot\overline{a}=\overline{a}^2=|\overline{a}|^2$.

### ✓ Operații cu vectori în coordonate

În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ din plan cu reperul $\{O,\overline{i},\overline{j}\}$, orice vector $\overline{a}$ din plan poate fi reprezentat astfel: $\overline{a}=x\overline{i}+y\overline{j}$.

Numerele $x, y$ se numesc ***coordonatele vectorului*** $\overline{a}$ şi se notează $\overline{a}=(x, y)$.

Dacă $\overline{a}=(x_1, y_1)$ şi $\overline{b}=(x_2, y_2)$, atunci:

1) $\overline{a}=\overline{b}\Leftrightarrow x_1=x_2$ şi $y_1=y_2$;

2) $\overline{a}\pm\overline{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2)$;

3) $\lambda\overline{a}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$;

4) $\overline{a}\,||\,\overline{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$;

5) $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2$;

6) $|\overline{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$;

7) $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}})=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Dacă $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$, atunci $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ şi $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Dacă $M(x, y)$ este mijlocul segmentului $AB$, atunci $x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

## 8.2. Formule de bază pentru triunghiuri

### ✓ Triunghiul arbitrar

Fie triunghiul $ABC$ (fig. 9.9). Notăm:

$a, b, c$ – lungimile laturilor $BC, AC$ şi, respectiv, $AB$;

$\alpha, \beta, \gamma$ – măsurile unghiurilor opuse laturilor $BC$, $AC$ şi, respectiv, $AB$;

$p$ – semiperimetrul triunghiului $ABC$;

$R$ – raza cercului circumscris;

$r$ – raza cercului înscris;

$\mathcal{A}$ – aria triunghiului;

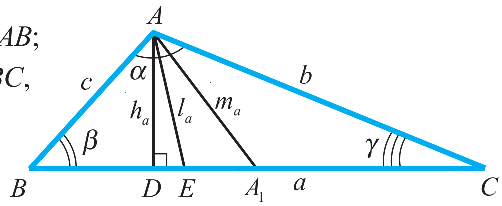



Fig. 9.9

$h_a=AD,\ \ m_a=AA_1$ – înălțimea, respectiv lungimea medianei corespunzătoare laturii $BC$;

$l_a=AE$ – lungimea bisectoarei unghiului $A$.

În aceste notații:

$\alpha+\beta+\gamma=180°$;

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ (*teorema cosinusului*);

$\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ (*teorema sinusurilor*);

$\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}a\cdot h_a$; $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$; $\mathcal{A}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (*formula lui Heron*);

$r=\dfrac{\mathcal{A}}{p}$; $R=\dfrac{abc}{4\mathcal{A}}$;

$m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$;

$\dfrac{b}{c}=\dfrac{EC}{BE}$ (*proprietatea bisectoarei*);

$l_a=\sqrt{b\cdot c-BE\cdot EC}$; $l_a=\dfrac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

✓ **Triunghiul dreptunghic**

Fie triunghiul dreptunghic *ABC* (fig. 9.10). Notăm: lungimile catetelor cu *a*, *b*, lungimea ipotenuzei cu *c*, lungimea proiecțiilor catetelor pe ipotenuză cu $a_c$, $b_c$. Atunci:

$c^2=a^2+b^2$ (*teorema lui Pitagora*);

$\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}a\cdot b=\dfrac{1}{2}c\cdot h_c$;

$r=\dfrac{a+b-c}{2}$; $R=\dfrac{c}{2}$;

$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\,\mathrm{tg}\alpha=b\,\mathrm{ctg}\,\beta$;

$h_c^2=a_c\cdot b_c$; $b^2=c\cdot b_c$; $a^2=c\cdot a_c$.

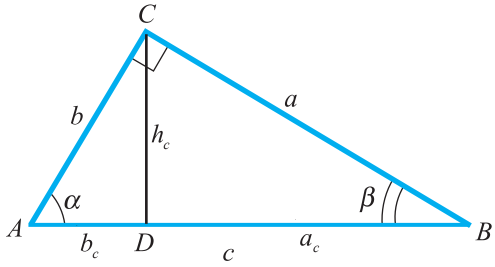



Fig. 9.10

✓ **Triunghiul echilateral**

$\mathcal{A}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $r=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, unde *a* este lungimea laturii triunghiului.

*Triunghiul ABC este asemenea* cu triunghiul $A_1B_1C_1$ $(\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1)$ dacă şi numai dacă are loc una dintre următoarele condiții echivalente:

1) $AB:BC:CA=A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$;

2) $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$ şi $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$;

3) $\mathrm{m}(\angle B)=\mathrm{m}(\angle B_1)$ şi $\mathrm{m}(\angle A)=\mathrm{m}(\angle A_1)$.

*Linia mijlocie* a triunghiului este paralelă cu o latură a triunghiului şi are lungimea egală cu jumătate din lungimea acestei laturi.

*Bisectoarele* triunghiului sunt concurente în *centrul cercului înscris în triunghi*.

*Mediatoarele* laturilor triunghiului sunt concurente în *centrul cercului circumscris* triunghiului.

*Medianele* triunghiului sunt concurente într-un punct, numit *centrul de greutate* al triunghiului, şi se împart în punctul de concurență în raportul 2 : 1, considerând de la vârf.

*Înălțimile* triunghiului sunt concurente într-un punct numit *ortocentrul* triunghiului.

## 8.3. Formule de bază pentru patrulatere şi poligoane

✓ *Patrulaterul convex* *ABCD* cu unghiul $\varphi$ format de diagonalele *AC* şi *BD*, $\mathcal{A}$ – aria:

$$\mathrm{m}(\angle A)+\mathrm{m}(\angle B)+\mathrm{m}(\angle C)+\mathrm{m}(\angle D)=360°;\quad \mathcal{A}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi.$$

✓ *Paralelogramul* cu laturile *a* şi *b*, unghiul $\varphi$ format de ele, $h_a$ – înălțimea corespunzătoare laturii *a*, diagonalele $d_1$ şi $d_2$, $\mathcal{A}$ – aria:

$$\mathcal{A}=ah_a=ab\sin\varphi;\qquad d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2).$$

✓ *Rombul*: $\mathcal{A}=ah_a=a^2\sin\varphi=\dfrac{1}{2}d_1d_2$.

✓ *Dreptunghiul*: $\mathcal{A}=ab$.

✓ *Pătratul* cu diagonala $d$: $\mathcal{A}=a^2=\dfrac{d^2}{2}$.

✓ *Trapezul* cu bazele $a$ şi $b$, înălţimea $h$ şi linia mijlocie $l$:

$$l=\frac{a+b}{2};\ \mathcal{A}=\frac{a+b}{2}h=lh.$$

✓ *Patrulaterul convex* $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$\mathrm{m}(\angle ABC)+\mathrm{m}(\angle ADC)=180°.$$

✓ *Patrulaterul convex* $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$\mathrm{m}(\angle ABD)=\mathrm{m}(\angle ACD).$$

✓ *Teoremele lui Ptolemeu* pentru patrulaterul inscriptibil:

1. Patrulaterul convex $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă
$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$$
2. Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ are loc egalitatea:
$$\frac{AC}{BD}=\frac{AB\cdot AD+BC\cdot CD}{AD\cdot CD+AB\cdot BC}.$$

În patrulaterul convex $ABCD$ poate fi înscris un cerc dacă şi numai dacă

$AB+CD=AD+BC$ (sumele lungimilor laturilor opuse sunt egale).

✓ *Poligonul regulat* cu $n$ laturi ($a_n$ – lungimea laturii poligonului, $r$ – raza cercului înscris, $R$ – raza cercului circumscris, $\mathcal{A}$ – aria poligonului, $p$ – semiperimetrul):

$$a_3=R\sqrt{3};\quad a_4=R\sqrt{2};\quad a_6=R;\quad a_n=2R\sin\frac{180°}{n};\quad \mathcal{A}=\frac{na_n r}{2}=pr.$$

✓ *Cercul şi discul* de rază $R$ ($L$ – lungimea cercului, $l$ – lungimea arcului de cerc, $\mathcal{A}$ – aria discului, $\mathcal{A}_s$ – aria sectorului, $\alpha$ – măsura arcului (unghiului la centru) în grade, $\varphi$ – măsura arcului în radiani):

$$L=2\pi R;\quad l=\frac{\pi R\alpha}{180°};\quad l=R\varphi;$$

$$\mathcal{A}=\pi R^2;\quad \mathcal{A}_s=\frac{\pi R^2\alpha}{360°};\quad \mathcal{A}_s=\frac{1}{2}R^2\varphi.$$

## 8.4. Paralelismul dreptelor şi planelor

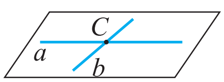
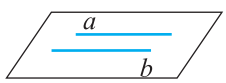
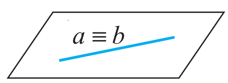
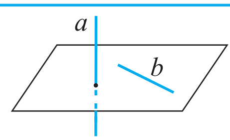
Două drepte în spaţiu se numesc ***paralele*** dacă sunt situate în acelaşi plan şi nu au puncte comune sau dacă coincid.

O dreaptă se numeşte ***paralelă*** cu un plan dacă ea nu are puncte comune cu acest plan sau dacă este inclusă în acest plan.

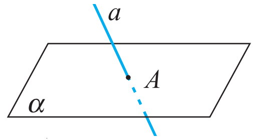
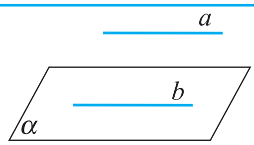
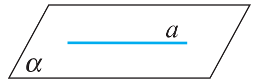
Două plane se numesc ***paralele*** dacă ele nu au puncte comune sau dacă coincid.

### Poziţiile relative ale dreptelor şi planelor

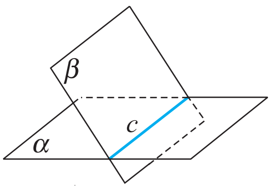
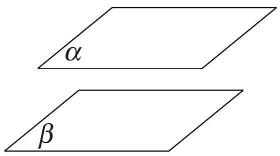
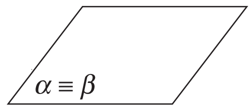
**1. Poziţiile relative a două drepte**

| $a$ şi $b$ coplanare | | | $a$ şi $b$ necoplanare |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $a\cap b=\{C\}$ | $a\cap b=\varnothing$ | $a\equiv b$ | $a\cap b=\varnothing$ |

**2. Pozițiile relative ale unei drepte și unui plan**

| $a$ secantă cu $\alpha$ | $a$ paralelă cu $\alpha$ | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $a \cap \alpha = \{A\}$ | $(b \subset \alpha,\ a \parallel b) \Rightarrow a \parallel \alpha$ | $a \subset \alpha$ |

**3. Pozițiile relative a două plane**

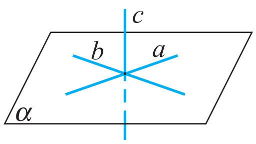
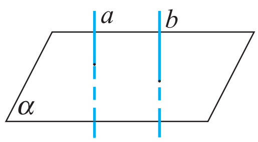
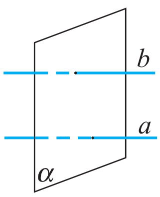
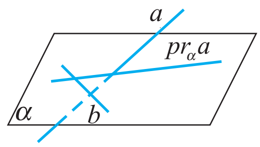
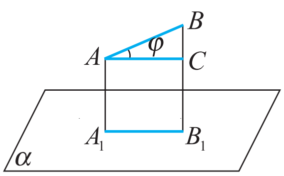
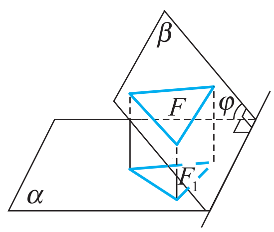
| $\alpha$ și $\beta$ secante | $\alpha$ și $\beta$ paralele | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\alpha \cap \beta = c$ | $\alpha \cap \beta = \varnothing$ | |

## 8.5. Perpendicularitatea în spațiu

Două drepte în spațiu se numesc ***perpendiculare*** dacă măsura unghiului format de ele este de 90°.

O dreaptă se numește ***perpendiculară pe un plan*** dacă ea este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan.

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente situate într-un plan, atunci dreapta este perpendiculară pe acest plan.

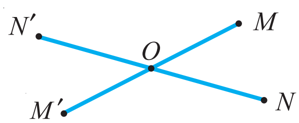
| | |
|---|---|
| <br>$(a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \nparallel b,\ c \perp a,\ c \perp b) \Rightarrow c \perp \alpha$ | <br>$(a \parallel b,\ a \perp \alpha) \Rightarrow b \perp \alpha$ |
| <br>$(a \perp \alpha,\ b \perp \alpha) \Rightarrow a \parallel b$ | <br>$b \subset \alpha$ 1) $a \perp b \Rightarrow pr_\alpha a \perp b$<br>2) $b \perp pr_\alpha a \Rightarrow a \perp b$ |
| <br>$([A_1B_1] \equiv pr_\alpha [AB],\ AC \parallel A_1B_1) \Rightarrow$<br>$\Rightarrow$ lungimea proiecției $[AB]$ este $AB\cos\varphi$ | <br>$(F \subset \beta,\ F_1 = pr_\alpha F,\ m(\angle(\alpha\beta)) = \varphi) \Rightarrow \mathcal{A}_{F_1} = \mathcal{A}_F \cos\varphi$ |

# 8.6. Transformări geometrice

**Transformări geometrice ale spațiului**

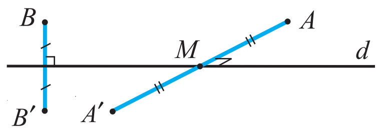
- Izometrii
  - Simetria centrală
  - Translația
  - Simetria axială
  - Rotația în jurul unei drepte
  - Simetria față de un plan
- Alte transformări geometrice
  - Omotetia
  - Asemănarea

### Simetria centrală: $S_O$



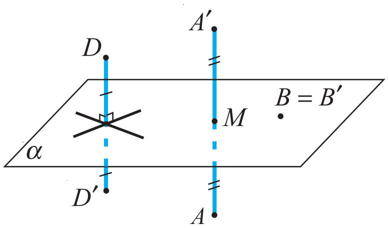

1. $S_O(O) = O$;
2. $\forall M \neq O,\ S_O(M) = M'$, unde $O$ este mijlocul segmentului $MM'$.

### Simetria axială: $S_d$



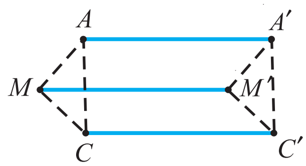

1. $\forall M \in d,\ S_d(M) = M$;
2. $\forall A \notin d,\ S_d(A) = A'$, astfel încât $AA' \perp d$ și dacă $AA' \cap d = \{M\}$, atunci punctul $M$ este mijlocul segmentului $AA'$.

### Simetria față de un plan: $S_\alpha$




1. $\forall B \in \alpha,\ S_\alpha(B) = B$;
2. $\forall A \notin \alpha,\ S_\alpha(A) = A'$, astfel încât $AA' \perp \alpha$ și, dacă $AA' \cap \alpha = \{M\}$, atunci punctul $M$ este mijlocul segmentului $AA'$.

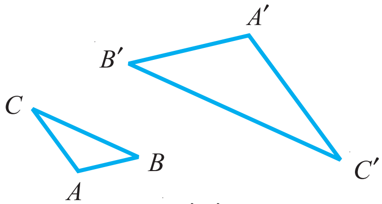
### Translația determinată de perechea ordonată $(A, A')$ de puncte distincte: $t_{AA'}$




$\forall M \notin (AA'),\ t_{AA'}(M) = M'$, astfel încât $AA'M'M$ este paralelogram.
$t_{AA'}(C) = C'$.

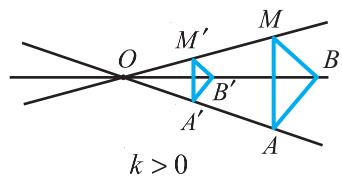
### Asemănarea de coeficient $k$, $k > 0$

Pentru orice puncte $A, B$ ale spațiului și imaginile lor $A', B'$ are loc egalitatea $A'B' = k \cdot AB$.

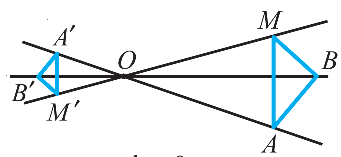



$A'B' = 2AB$,
$A'C' = 2AC$,
$B'C' = 2BC$.

### Omotetia de centru *O* și coeficient *k*




$k > 0$




$k < 0$

# § 9 ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

## 9.1. Funcții trigonometrice

**Definiție**

**Cerc trigonometric** se numeşte cercul de rază 1 cu centrul în originea sistemului de axe ortogonale (într-un plan).

În trigonometrie se utilizează două unități de măsură a unghiurilor: gradul şi radianul. Trecerea de la o măsură la alta se realizează folosind formula $\frac{a}{\alpha}=\frac{180°}{\pi}$, unde $a$ este măsura în grade, iar $\alpha$ – măsura în radiani a unghiului. De aici, $a=\frac{\alpha}{\pi}180°$, iar $\alpha=\frac{a}{180°}\cdot\pi$ pentru orice unghi.

**Exemplu**

Unghiul de $\pi$ rad are în grade măsura de $180°$. Deci, unghiul de 1 rad are în grade măsura $\frac{180°}{\pi}\approx\frac{180°}{3{,}14}\approx 57°17'44''$. Invers, unghiul de $1°$ are în radiani măsura $\frac{\pi}{180}$ rad.

Fie $M\,(x,\,y)$ un punct pe cercul trigonometric, $t$ – măsura unghiului format de $(OM$ cu $(Ox$ (fig. 9.11).

Atunci:

$\sin t = y;$

$\cos t = x;$

$\operatorname{tg} t=\frac{\sin t}{\cos t}=\frac{y}{x},\quad t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z};$

$\operatorname{ctg} t=\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{x}{y},\quad t\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

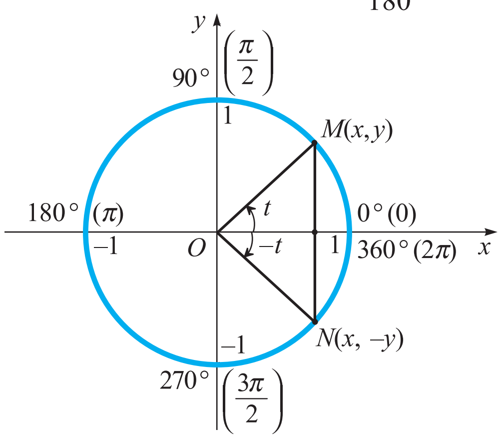


Fig. 9.11

**Definiții**

Funcția

a) $f\colon \mathbb{R}\to[-1,1],\ f(t)=\sin t,$ se numeşte funcție **sinus**;

b) $f\colon \mathbb{R}\to[-1,1],\ f(t)=\cos t,$ se numeşte funcție **cosinus**;

c) $f\colon \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R},\ f(t)=\operatorname{tg} t,$ se numeşte funcție **tangentă**;

d) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R},\ f(t)=\operatorname{ctg} t,$ se numeşte funcție **cotangentă**.

Funcțiile trigonometrice se utilizează în diverse domenii: geometrie, fizică, în viața cotidiană etc.

**Problemă rezolvată**

Efectuând măsurările necesare, să se determine distanța dintre punctele $A$ şi $B$ (inaccesibil), între care este un obstacol (un râu) (fig. 9.12).

*Rezolvare*:

Determinăm un punct $C$ (accesibil), astfel încât dreptele trasate $CA$ şi $CB$ (imaginar)

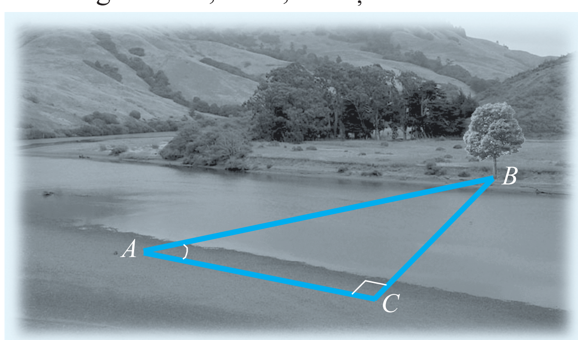


Fig. 9.12

formează un unghi de 90°. Determinăm măsura unghiului $A$ şi măsurăm distanţa $AC$. Utilizând definiţia cosinusului, obţinem $AB=\dfrac{AC}{\cos(\angle A)}$ (valoarea cosinusului se determină din tabele, cu ajutorul calculatorului ş.a.).

Substituind datele, obţinem distanţa $AB$.

**Exerciţiu** Formulaţi, folosind graficele (fig. 9.13–9.16), proprietăţile celor patru funcţii trigonometrice.

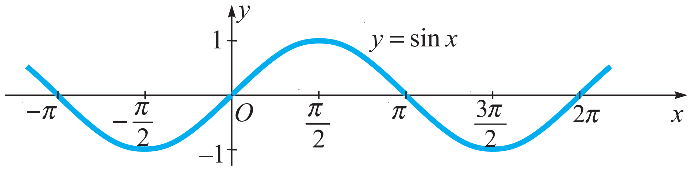



Fig. 9.13

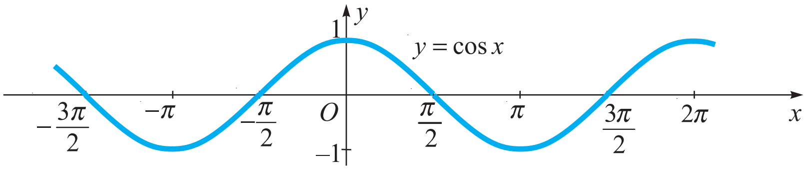



Fig. 9.14

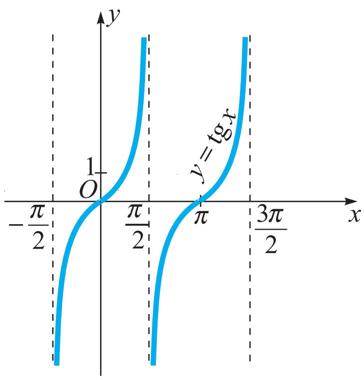



Fig. 9.15

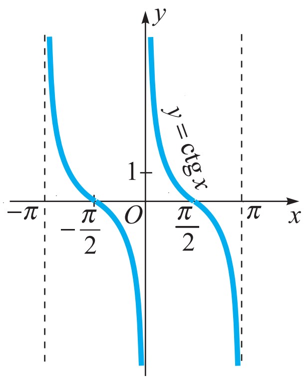



Fig. 9.16

**Amintim**

$\arcsin x=y \Leftrightarrow \sin y=x,\quad x\in[-1,1],\quad y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right];$

$\arccos x=y \Leftrightarrow \cos y=x,\quad x\in[-1,1],\quad y\in[0,\pi];$

$\operatorname{arctg} x=y \Leftrightarrow \operatorname{tg} y=x,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right);$

$\operatorname{arcctg} x=y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} y=x,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in(0,\pi).$

**Observaţie** Unele valori pentru arcsin, arccos, arctg, arcctg pot fi determinate folosind tabelul valorilor funcţiilor sin, cos, tg, ctg (tabelul 1).

**Exemplu**

$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$, deoarece $\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ şi $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$, deoarece $\dfrac{3\pi}{4}\in[0,\pi]$ şi $\cos\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{6}$, deoarece $\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unele unghiuri**

**Tabelul 1**

| | $\alpha$ (radiani) | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$ (grade) | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ | $-30°$ | $-45°$ | $-60°$ | $-90°$ |
| Valoarea funcției | $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| | $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | nu există | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | nu există |
| | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | nu există | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | nu există | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

## 9.2. Formule (identități) trigonometrice

***Identitățile trigonometrice fundamentale***

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \alpha\in\mathbb{R};$

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z};$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

***Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri***[1]

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R};$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R};$$

$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$ pentru $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, astfel încât există $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta$ și $1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\neq0$.

***Formule pentru funcții trigonometrice ale multiplilor unui unghi***

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$

**Observație**

Aceste formule pot fi obținute utilizând formula lui Moivre și formula binomului lui Newton:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

pentru $n=2$ și $n=3$.

Similar se obțin formule pentru funcții trigonometrice ale multiplilor unui unghi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. De exemplu, egalând părțile reale și, respectiv, cele imaginare ale expresiilor din ambii membri ai egalității ce reprezintă formula lui Moivre, pentru $n=4$ obținem formulele:

$$\cos4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha;$$

$$\sin4\alpha=4\cos^3\alpha\sin\alpha-4\cos\alpha\sin^3\alpha.$$

[1] În continuare vom considera că $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, dacă nu se va preciza altceva.

*Formule de micşorare a puterii funcţiilor trigonometrice*

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\qquad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

*Formule pentru* $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z};\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

*Formulele substituţiilor universale*

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z};\quad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq(2n+1)\pi,\ \alpha\neq\frac{(2n+1)\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

*Formule de transformare a sumelor funcţiilor trigonometrice în produse şi invers*

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];\qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

La rezolvarea ecuaţiilor şi a inecuaţiilor trigonometrice se va ţine cont de faptul că:

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x,\ x\in[-1,1];\qquad \mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}\,x,\ x\in\mathbb{R};$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x,\ x\in[-1,1];\qquad \mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}\,x,\ x\in\mathbb{R}.$$

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x=\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1);$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\mathrm{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1);$$

$$\mathrm{arctg}\,x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arcctg}\,x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R};$$

$$\mathrm{arcctg}\,x=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,x=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x\in\mathbb{R}.$$

**Exemple**

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4};\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4};$$

$$\mathrm{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## 9.3. Ecuații trigonometrice

### *Ecuații trigonometrice fundamentale*

$\sin x = a \Leftrightarrow S = \{(-1)^k \arcsin a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in [-1, 1];$

$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow S = \{\operatorname{arctg} a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in \mathbb{R};$

$\cos x = a \Leftrightarrow S = \{(\pm \arccos a + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in [-1, 1];$

$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow S = \{\operatorname{arcctg} a + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\},\ a \in \mathbb{R}.$

### *Metode principale de rezolvare a ecuațiilor trigonometrice*

1. Metoda utilizării necunoscutei auxiliare.
2. Metoda descompunerii în factori.
3. Metoda împărțirii ambilor membri ai ecuației omogene la $\sin^n x$ (sau la $\cos^n x$), $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Metoda omogenizării.
5. Metoda unghiului auxiliar.
6. Metoda aplicării formulelor substituțiilor universale.
7. Metoda reducerii la un sistem de ecuații algebrice.

**Exercițiu rezolvat**

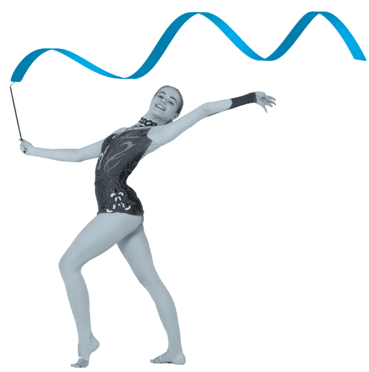
Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin x + \cos 2x - 1 = 0$.

*Rezolvare*:

$$\sin x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ 2\sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\\ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

*Răspuns*: $S = \{(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.



## 9.4. Inecuații trigonometrice

### *Inecuații trigonometrice fundamentale*

$$\sin t > a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\arcsin a + 2\pi k,\ \pi - \arcsin a + 2\pi k),\ a \in [-1, 1);$$

$$\sin t < a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\pi - \arcsin a + 2\pi k,\ \arcsin a + 2\pi k),\ a \in (-1, 1];$$

$$\cos t > a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k=\mathbb{Z}} (-\arccos a + 2\pi k,\ \arccos a + 2\pi k),\ a \in [-1, 1);$$

$$\cos t < a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\arccos a + 2\pi k,\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k),\ a \in (-1, 1];$$

$$\operatorname{tg} t > a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\operatorname{arctg} a + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k),\ a \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{tg} t < a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg} a + \pi k\right),\ a \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{ctg} t > a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\pi k,\ \operatorname{arcctg} a + \pi k),\ a \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{ctg} t < a \Leftrightarrow S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\operatorname{arcctg} a + \pi k,\ \pi + \pi k),\ a \in \mathbb{R}.$$

**Observație**

În cazul inecuațiilor nestricte, în răspuns se vor include: ambele extremități ale intervalelor pentru inecuațiile $\sin t \geq a$, $\sin t \leq a$, $\cos t \leq a$, $\cos t \geq a$; extremitățile din stânga ale intervalelor respective pentru inecuațiile $\operatorname{tg} t \geq a$, $\operatorname{ctg} t \leq a$; extremitățile din dreapta ale intervalelor respective pentru inecuațiile $\operatorname{tg} t \leq a$, $\operatorname{ctg} t \geq a$.

# § 10 ELEMENTE DE ALGEBRĂ SUPERIOARĂ

## 10.1. Operații cu matrice

Mulțimea matricelor de tip $(m, n)$ sau $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ cu elemente din $\mathbb{Z}$ (respectiv $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbf{C}$) se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ (respectiv cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$. Pentru $m = n$ matricea se numește ***pătratică de ordinul n***, iar mulțimile respective se notează cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. În matricea pătratică $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, elementele $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ formează ***diagonala principală***, iar elementele $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n-1\,2}, a_{n1}$ – ***diagonala secundară*** a acesteia. Matricea pătratică se numește ***superior*** (respectiv ***inferior***) ***triunghiulară*** dacă toate elementele ei situate dedesubtul (respectiv deasupra) diagonalei principale sunt egale cu 0. ***Matrice unitate*** de ordinul $n$ este o matrice pătratică de forma $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$. ***Matrice nulă*** $(O)$ este o matrice de orice tip ale cărei elemente sunt nule.

***Suma matricelor*** $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$ de tip $(m, n)$ este matricea de același tip $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

***Produsul*** matricei $A = (a_{ij})$ cu un număr $\lambda$ este matricea $C = \lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$.

***Transpusa*** matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{C})$ este matricea ${}^tA = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{C})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

***Produsul*** matricelor $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, și $B = (b_{jk})$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, s}$ (se definește numai dacă numărul coloanelor primei matrice este egal cu numărul liniilor matricei a doua) este matricea $D = (d_{ik})$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, s}$, unde $d_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + ... + a_{in} \cdot b_{nk}$.

**Exercițiu rezolvat**

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se determine dacă există și, în caz afirmativ, să se calculeze:

a) $A + B$; b) $A + C$; c) $3C$; d) $A \cdot B$; e) $B \cdot C$; f) ${}^tA$.

*Rezolvare*:

a) $A + B$ nu există, fiindcă $A$ și $B$ nu sunt matrice de același tip;

b) $A + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; c) $3C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$;

d) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 0 & 2 \cdot 3 + 0 & 2 \cdot 1 + 0 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & -1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -5 & -3 & 23 \end{pmatrix}$;

e) $B \cdot C$ nu există, deoarece numărul coloanelor matricei $B$ este diferit de numărul liniilor matricei $C$;

f) ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Operațiile de adunare și înmulțire a matricelor posedă aceleași proprietăți ca și operațiile respective asupra numerelor, cu excepția proprietății comutative a înmulțirii matricelor. Pentru operația de transpunere a matricelor, menționăm următoarele *proprietăți*:

**1°** ${}^t(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot {}^tA$; **2°** ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$; **3°** ${}^t({}^tA) = A$; **4°** ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.

***Inversa*** matricei pătratice $A$ de ordinul $n$ se numește matricea pătratică $A^{-1}$ de ordinul $n$ care satisface condițiile $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Menționăm *proprietățile operației de inversare*:

**1°** $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

**2°** dacă există inversa matricei $A$ (adică $A$ este ***inversabilă***), atunci $A^{-1}$ este unică.

**Exercițiu rezolvat**

Să se rezolve ecuația $3X-2A=({}^tB)^2\cdot C$, dacă:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1-\mathrm{i}\\ 0 & 3+\mathrm{i}\\ 1 & -2+2\mathrm{i}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

*Rezolvare*:

În baza proprietăților operațiilor cu matrice obținem:

$$3X=2A+({}^tB)^2\cdot C,\quad X=\frac{1}{3}(2A+({}^tB)^2\cdot C).$$

Întrucât $({}^tB)^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 6\\ -1 & 3 & -3\\ -5 & 0 & 10\end{pmatrix}$, obținem $({}^tB)^2\cdot C=\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}$.

Deci, $X=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}4 & 2-2\mathrm{i}\\ 0 & 6+2\mathrm{i}\\ 2 & -4+4\mathrm{i}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 8\\ 5 & -9\\ -5 & 20\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & 10-2\mathrm{i}\\ 5 & -3+2\mathrm{i}\\ -3 & 16+4\mathrm{i}\end{pmatrix}$.

Pentru a determina inversa unei matrice se aplică ***transformările elementare*** ale liniilor unei matrice, şi anume:

a) permutarea a două linii;

b) înmulțirea elementelor unei linii cu un număr nenul;

c) adunarea la elementele unei linii a elementelor respective ale altei linii, înmulțite cu acelaşi număr.

Se spune că matricea nenulă $A$ este o ***matrice eşalon*** (***în trepte***) dacă primul (de la stânga) element nenul (el se numeşte ***lider***) din fiecare linie, începând cu a doua, e situat mai la dreapta decât primul element nenul din linia precedentă.

Pentru determinarea inversei matricei pătratice $A$ de ordinul $n$, se formează matricea $(A\,\vert\,I_n)$. Asupra liniilor acesteia se aplică transformări elementare astfel încât să se obțină o matrice eşalon de forma $(I_n\,\vert\,B)$ (dacă este posibil). Matricea $B$ este $A^{-1}$. În cazul în care această transformare este imposibilă, inversa matricei $A$ nu există.

**Exercițiu rezolvat**

Să se determine inversa matricei $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -9\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

*Rezolvare*:

$$(A\,\vert\,I_3)=\left(\begin{array}{rrr|rrr}3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -9 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}-1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}-1 & 0 & 0 & 4 & -2 & 13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -13\\ 0 & 1 & 0 & 9 & -4 & 27\\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 6\end{array}\right).\ \text{Astfel, } A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -13\\ 9 & -4 & 27\\ 2 & -1 & 6\end{pmatrix}.\ \text{(Verificați.)}$$

## 10.2. Determinanți

Se numește ***determinantul matricei*** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, respectiv $C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, sau ***determinant de ordinul*** 2, respectiv 3, numărul notat $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, respectiv $|C| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$, care se mai notează $\det A$, respectiv $\det C$, sau $\Delta$.

***Determinantul matricei pătratice*** $A$ de ordin arbitrar $n$, $n \geq 2$, este numărul $|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}\overline{M}_1^i + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}\overline{M}_n^i$ sau $|A| = a_{1i}(-1)^{1+i}\overline{M}_i^1 + \ldots + a_{ni}(-1)^{n+i}\overline{M}_i^n$. Aici $\overline{M}_s^i$ – ***minorul complementar*** al elementului $a_{is}$ – este determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ obținute din $A$ prin suprimarea liniei $i$ şi a coloanei $s$. Aceste expresii se numesc ***dezvoltarea determinantului după linia i*** (respectiv ***coloana i***).

**Exercițiu rezolvat**

Să se calculeze $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & \mathrm{i} \end{vmatrix}$.

*Rezolvare*:

$\Delta = 1\cdot 1\cdot \mathrm{i} + 2\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot 0\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot \mathrm{i} = 10+\mathrm{i}$.

Acelaşi rezultat se obține dacă dezvoltăm determinantul după o linie (coloană), de exemplu, după linia a treia:

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \mathrm{i}\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(4+1) + 0 + \mathrm{i}\cdot 1 = 10+\mathrm{i}.$$

*Proprietăți ale determinanților* (a căror utilizare facilitează calculul lor)

**1°** Determinantul matricei este egal cu zero dacă este satisfăcută una dintre condițiile:

a) elementele unei linii (coloane) sunt egale cu 0;

b) elementele unei linii (coloane) se obțin din elementele respective ale altei linii (coloane) prin înmulțirea lor cu acelaşi număr (se spune că astfel de linii (coloane) sunt proporționale);

c) în particular, două linii (două coloane) sunt egale.

**2°** Determinantul matricei $A$ este egal cu determinantul matricei ${}^tA$.

**3°** Dacă matricea $B$ se obține din $A$ permutând două linii (coloane), atunci $\det B = -\det A$.

**4°** Factorul comun al elementelor unei linii (coloane) poate fi scos în fața determinantului.

**5°** Dacă matricea $B$ se obține din $A$ adunând la elementele unei linii (coloane) elementele respective ale altei linii (coloane) înmulțite cu acelaşi număr, atunci $|B| = |A|$.

Expunem două metode eficiente de calcul al determinanților:

1) transformarea determinantului astfel încât toate elementele unei linii (coloane), în afară de unul, să fie nule, apoi dezvoltarea lui după linia (coloana) respectivă;

2) transformarea determinantului astfel încât toate elementele situate deasupra sau dedesubtul diagonalei principale (sau secundare) să fie nule.

În cazul 2) se obțin determinanți de forma:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\ldots a_{n1}.$$

## 10.3. Sisteme de ecuații liniare

Un sistem arbitrar de $m$ ecuații liniare cu $n$ necunoscute are următoarea formă:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad a_{ij}, b_i \in \mathbf{C},\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ m, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Matricele $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ se numesc, respectiv, ***matricea*** şi ***matricea extinsă*** ale sistemului (1).

În cazul în care sistemul (1) are formă arbitrară, pentru rezolvarea lui se aplică ***metoda lui Gauss***, care constă în următoarele:

1. Se scrie matricea extinsă $\overline{A} = (A \mid B)$ a sistemului (1) şi se reduce, cu ajutorul transformărilor elementare ale liniilor, la forma eşalon $\overline{A_1} = (A_1 \mid B_1)$.

2. Dacă numărul liniilor nenule în $A_1$ este mai mic decât în $\overline{A_1}$, atunci sistemul este incompatibil.

3. Dacă numărul liniilor nenule în $A_1$ şi $\overline{A_1}$ este acelaşi, se formează sistemul de ecuații (echivalent cu cel inițial) corespunzător matricei $\overline{A_1}$. Sunt posibile următoarele două cazuri:

3.1. Sistemul respectiv conține un număr de ecuații egal cu numărul necunoscutelor (este un ***sistem triunghiular***).
În acest caz, sistemul are o unică soluție, care se determină astfel: din ultima ecuație se află valoarea necunoscutei $x_n$ şi se înlocuieşte în celelalte ecuații, apoi din penultima ecuație se calculează valoarea lui $x_{n-1}$, care se înlocuieşte în ecuațiile precedente, ş.a.m.d. până se obține valoarea necunoscutei $x_1$.

3.2. Sistemul respectiv conține mai puține ecuații decât necunoscute (este un ***sistem trapezic***).
În acest caz, se specifică necunoscutele principale (de exemplu, necunoscutele ale căror coeficienți sunt liderii matricei $\overline{A_1}$). Celelalte necunoscute sunt secundare şi se notează $x_q = \alpha, \ldots, x_v = \gamma$, unde $\alpha, \ldots, \gamma \in \mathbf{C}$. După ce se trec termenii ce conțin necunoscutele secundare (parametrii) în membrii din dreapta ai ecuațiilor, se obține un sistem triunghiular în raport cu necunoscutele principale. Ca şi în cazul 3.1, se exprimă necunoscutele principale prin parametrii $\alpha, \ldots, \gamma$ şi se obține soluția generală $x_1 = f_1(\alpha, \ldots, \gamma), \ldots, x_n = f_n(\alpha, \ldots, \gamma)$. Evident, sistemul posedă o infinitate de soluții.

Pentru rezolvarea sistemelor care conțin un număr de ecuații egal cu numărul necunoscutelor şi ale căror matrice au determinantul nenul pot fi aplicate două metode: regula lui Cramer şi utilizarea matricei inverse.

**Teorema 1** **(Regula lui Cramer)**
Dacă în (1) $m = n$ şi determinantul $\Delta = |A|$ este nenul, atunci sistemul are o unică soluție (este compatibil determinat) şi soluția sa este $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, ..., $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, unde $\Delta_i$, $i = \overline{1, n}$, se obține din $\Delta$ înlocuind coloana $i$ cu coloana termenilor liberi.

**Observație**
În condițiile teoremei 1, soluția sistemului (1) poate fi determinată şi cu ajutorul matricei inverse:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

# § 11 EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

***Profilurile umanist, arte, sport***

## A

**1.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$4:[5(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1{,}8(3))\cdot 12{,}8]=$$
$$=0{,}125x:[(7-6{,}35):6{,}5+9{,}8(9)].$$

**2.** Fie $a=\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(-49+20\sqrt{6})}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}$. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

a) $a\in\mathbb{N}$; b) $a\in\mathbb{Z}$; c) $a\in\mathbb{Q}$;
d) $a\in\mathbb{R}$; e) $a\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; f) $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

**3.** Să se completeze cu unul dintre semnele >, =, <, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $2\sqrt{3}\ \square\ \sqrt{13}$; b) $\sqrt{19}\ \square\ \sqrt{26}-1$;
c) $3\sqrt{5}\ \square\ 5\sqrt{3}$; d) $0{,}2\sqrt{25}\ \square\ 0{,}1\sqrt{100}$.

**4.** Să se determine mulțimile $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, dacă:

a) $A=[\sqrt{3};\ 3)$, $B=[1{,}9;\ \sqrt{10}]$;
b) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-x-2\geq 0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 3-x-x^2>0\}$.

**5.** Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

a) $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a}{a^3+8}-\dfrac{a+2}{2a^2+a}\right):\dfrac{4}{a^2+2a}-\dfrac{a+4}{3-6a}$;

b) $\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

**6.** Să se afle:

a) $\dfrac{7!-5!}{6!}$; b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$; c) $P_{n+1}$; d) $A_{k+3}^{k-1}$.

**7.** Să se efectueze:

a) $\dfrac{(n-8)!}{(n-10)!(n-9)}$; b) $\dfrac{(n+2)\,!}{(n-3)!\,(n+1)n}$.

**8.** Să se efectueze:

a) $\dfrac{A_n^3\cdot P_{n+1}}{n!}$; b) $\dfrac{C_n^5-C_n^6}{C_n^3}$; c) $\dfrac{A_n^5C_n^4-P_n}{P_{n+1}}$.

**9.** Câte numere naturale de cinci cifre pot fi formate având toate cifrele distincte şi impare?

**10.** În câte moduri din 20 de elevi pot fi aleşi 2 elevi de serviciu, ambii având aceleaşi obligațiuni?

**11.** În câte moduri din 20 de elevi pot fi aleşi 2 elevi de serviciu, fiecare cu obligațiuni diferite?

**12.** În câte moduri poate fi alcătuită o listă din 10 elevi?

**13.** Fie numerele: 1) $a=272$, $b=150$; 2) $a=41$, $b=246$.

a) Să se descompună în produse de factori primi numerele $a$ şi $b$.
b) Să se afle c.m.m.d.c. al numerelor $a$, $b$, adică $(a, b)$.
c) Să se afle c.m.m.m.c. al numerelor $a$, $b$, adică $[a, b]$.

**14.** Se selectează la întâmplare o literă din proverbul „Prietenul adevărat la nevoie se cunoaşte”.

a) Care este probabilitatea că a fost selectată litera *e*?
b) Care este probabilitatea că a fost selectată litera *p*?

## B

**15.** Să se completeze cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2-\square x+1=0$ să conțină:

a) un element real;
b) două elemente reale;
c) două elemente complexe.

**16.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\geq 0$; b) $\dfrac{3|x-3|}{x^2(x-1)}\leq 0$; c) $\dfrac{x^3(1-x)}{x^2-1}\leq 0$.

**17.** Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $3z^2-z+1=0$; b) $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

**18.** La o loterie au fost vândute 100 de bilete, dintre care 6 câştigătoare. Să se afle probabilitatea realizării evenimentului „Cumpărând aleatoriu 10 bilete, niciunul nu va fi câştigător”.

**19.** Care este probabilitatea că într-un număr (luat la întâmplare) mai mic decât 40, dar mai mare decât 9, ambele cifre vor fi distincte?

**20.** Ion şi Vasile aruncă câte un zar. Dacă suma punctelor de pe cele două zaruri este egală cu 7 sau dacă produsul punctelor este egal cu 6, atunci câştigător este Ion. Dacă suma este egală cu 6 sau dacă produsul este egal cu 4, atunci câştigător este Vasile. Pentru cine pariezi tu?

**21.** Să se rezolve în **C** × **C** × **C**, aplicând regula lui Cramer, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=1,\\ -x_1+2x_2=2,\\ x_1+3x_2+2x_3=-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x_1+\mathrm{i}x_2+3x_3=1,\\ -x_1+4x_3=2,\\ 3\mathrm{i}x_1+x_2-x_3=0.\end{cases}$

**22.** Trei frați, a căror vârstă formează o progresie geometrică, împart o sumă de lei proporțional cu vârsta fiecăruia. Dacă ei ar fi împărțit banii peste trei ani, când fratele mai mic ar fi de 2 ori mai tânăr decât fratele mai mare, atunci fratele mai mic ar primi cu 105 lei, iar cel mijlociu cu 15 lei mai mult. Câți ani are fiecare frate?

**23.** Să se determine suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă:
a) $a_{10} = 131$, $r = 12$; b) $a_5 = 27$, $a_{27} = 60$.

**24.** Să se afle suma primilor zece termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, dacă:
a) $b_8 = 384$, $q = 2$; b) $b_3 = 20$, $b_4 = 1280$.

**25.** Dinu are 120 lei. În fiecare zi el cheltuieşte mai mult decât în ziua precedentă cu una şi aceeaşi sumă. În prima zi el a cheltuit 10 lei. Câţi lei a cheltuit Dinu în ultima zi dacă se ştie că toţi banii au fost cheltuiţi în 6 zile?

**26.** Combinatul poligrafic produce caiete cu 24 de foi şi 48 de foi. Un set din 4 caiete subţiri şi 5 caiete groase se comercializează cu 51 lei, iar un set din 8 caiete subţiri şi 3 caiete groase – cu 53 lei (inclisiv TVA – 20%). Combinatul oferă rabat de 10%, dacă se procură 50 de caiete subţiri sau 30 de caiete groase.
a) La ce preţ se vor vinde la magazin aceste caiete (cu bucata) dacă adaosul comercial pentru caietul subţire constituie 1 leu, iar pentru caietul gros – 2 lei?
b) Câte caiete subţiri se pot procura la magazin cu suma achitată la combinat pentru un pachet de 50 de caiete subţiri?

**27.** În 2014, un oraş avea 30 000 de locuitori. În 2015, ca rezultat al construcţiei unor blocuri noi, populaţia oraşului s-a majorat cu 9%, iar în 2016 – cu 10% în comparaţie cu anul 2015. Câţi locuitori avea oraşul în 2016?

**28.** Antreprenorul Petrescu a avut în anul 2000, după lansarea afacerii, un venit de 10 000 lei. În fiecare dintre următorii ani, venitul se majora cu 200% în comparaţie cu anul precedent.
a) Câţi lei a câştigat antreprenorul în perioada 2000–2005?
b) Cu câte procente a fost mai mare venitul în 2005 decât în 2000?

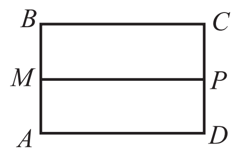
**29.** Un operator de telefonie mobilă din Republica Moldova desfăşoară o promoţie: fiecare minut, începând cu al doilea, costă cu 10 bani mai puţin decât precedentul. Ce economie va face consumatorul la un apel cu durata de 15 minute în cadrul acestei promoţii?

**30.** Un fermier creşte iepuri şi struţi. În total, sunt 200 de capete şi 700 de picioare. Câţi iepuri şi câţi struţi creşte fermierul?
Să se rezolve problema prin metoda algebrică şi prin metoda falsei ipoteze.

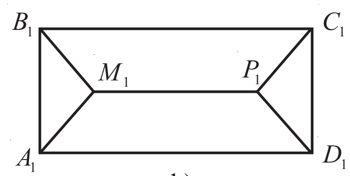
**31.** Firma comercială „VinProm” transportă în UE vin în cisterne cilindrice, fiecare având lungimea de 10 m şi înălţimea de 2 m. În UE, vinul se îmbuteliază în sticle de 0,7 *l*. O sticlă de vin se vinde la preţul de 2,5 euro. Câţi lei s-au luat pe marfă dacă s-au vândut 6 cisterne de vin de acelaşi fel? (1euro = 21,14 lei)

**32.** Un coş de fabrică de forma unui trunchi de con, înalt de 30 m, are diametrul exterior la bază de 3,6 m, iar la vârf – de 2,4 m. Interiorul coşului are forma unui cilindru drept cu diametrul de 1,6 m. Să se afle masa coşului de fabrică, dacă masa unui metru cub de zidărie este de 1 800 kg.

**33.** Conform proiectului, o casă cu temelia de forma unui dreptunghi cu laturile de 8 m şi 12 m (fig. a)) trebuia să aibă un acoperiş în două pante şi cu unghiul de înclinare de 45° faţă de planul orizontal. Pentru a micşora volumul podului casei, s-a luat decizia, fără a schimba aria suprafeţei podului, de a modifica acoperişul astfel încât el să aibă patru pante, două câte două opuse congruente (fig. b)).
Cu câte procente s-a micşorat volumul podului, dacă se ştie că vârful acoperişului nou are lungimea de 8 m (adică $M_1P_1 = 8$ m)?



a)



b)

**34.** Măsura unghiului ascuţit al unui romb este $\alpha$, iar înălţimea sa este $h$.
a) Să se afle lungimile diagonalelor rombului.
b) Să se determine aria rombului utilizând lungimile diagonalelor calculate.
c) Să se afle lungimea laturii rombului utilizând aria calculată.
d) Să se determine volumul prismei drepte a cărei bază este rombul dat, dacă înălţimea ei este congruentă cu latura rombului.

**35.** Într-un trapez isoscel cu bazele de 1 cm şi 9 cm este înscris un cerc. Să se afle:
a) lungimea laturii neparalele a trapezului;
b) raza cercului înscris în trapez;
c) înălţimea trapezului;
d) lungimea diagonalei trapezului;
e) raza cercului circumscris trapezului;
f) aria trapezului;
g) ariile triunghiurilor în care diagonala împarte trapezul.

**36.** Fie cercul de rază 12 cm. Să se afle:
a) lungimea laturii triunghiului echilateral circumscris cercului;
b) perimetrul patrulaterului regulat înscris în acest cerc;
c) aria hexagonului regulat circumscris acestui cerc.

**37.** În rombul $ABCD$, $AB = 6$ cm, $m(\angle A) = 60°$, $K \in [CD]$ şi $CK = 2$ cm. Din punctul $K$ este construită perpendiculara $KM$ pe planul rombului astfel încât $KM = 6$ cm. Să se afle:

a) măsura unghiului format de dreapta $AD$ şi planul $MCD$;
b) măsura unghiului diedru cu muchia $AB$;
c) distanţa dintre dreptele $MK$ şi $BD$;
d) măsura unghiului format de dreptele $MC$ şi $BD$.

**38.** Să se afle aria suprafeţei totale a unei prisme hexagonale regulate, dacă se ştie că volumul ei este de $4\ \text{dm}^3$, iar suma lungimilor tuturor muchiilor este minimă.

**39.** În paralelogramul $ABCD$, $m(\angle A)=45°$, $AP\perp(ABC)$, $AD=3\sqrt{2}$ cm, $AP=4$ cm, $AB=3$ cm.
a) Să se afle distanţa de la punctul $P$ la dreapta $DC$.
b) Să se afle distanţele de la punctul $P$ la toate vârfurile paralelogramului.
c) Să se determine aria paralelogramului $ABCD$.
d) Să se determine aria triunghiului $PAC$.

**40.** Să se completeze caseta, utilizând factorialul, astfel încât să se obţină o propoziţie adevărată:

$$C_{m+3}^{m-2}=\boxed{\phantom{xxxxxx}}.$$

**41.** Se dă preţul de vânzare al unui produs în diferite magazine:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 60 | 40 | 52,5 | 50 | 60 | 47,5 | 62,5 |
| 45 | 50 | 45 | 60 | 55 | 60 | 45 | 42,5 |
| 60 | 50 | 50 | 62,5 | 40 | 55 | 55 | 60 |

a) Să se grupeze aceste date pe intervalele: $[40,45)$, $[45,50)$, $[50,55)$, $[55,60)$, $[60,65]$.
Să se completeze tabelul obţinut cu frecvenţele relative cumulate.
b) Să se propună două metode pentru a calcula preţul mediu de vânzare al produsului.

**42.** O piesă metalică de forma unui cilindru circular drept, completat la vârf cu un con circular drept de aceeaşi rază, are înălţimea de 40 cm. Generatoarea conului formează un unghi de 15° cu planul bazei. Raportul dintre aria suprafeţei laterale a cilindrului şi aria suprafeţei bazei conului este de 1,5:1. Ce cantitate de vopsea e necesară pentru a vopsi această piesă, consumul fiind 2 g la $0{,}01\ \text{dm}^2$?

**43.** Din cei 15 angajaţi ai unei firme (9 bărbaţi şi 6 femei) se formează o echipă de 7 persoane, în care să intre cel puţin 3 femei. În câte moduri se poate forma această echipă?

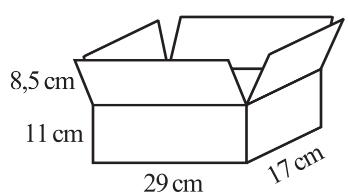
**44.** Un meloman are 9 CD-uri cu muzică, iar altul – 7.
a) În câte moduri pot face ei schimb de CD-uri: un CD în schimbul altuia?
b) În câte moduri pot face ei schimb de CD-uri: câte două CD-uri în schimbul altor două?

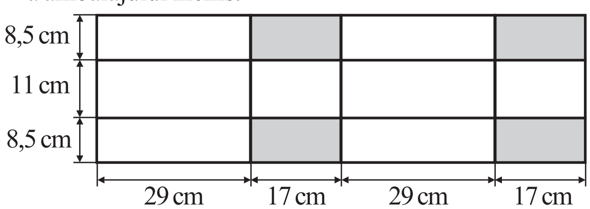
## C

**45.** Câte elemente trebuie să conţină o mulţime astfel încât numărul permutărilor elementelor acesteia să fie cuprins între 500 şi 600?

**46.** O bancă acordă credite în următoarele condiţii: banca plăteşte clientului câte 100 000 lei zilnic pe parcursul unei luni (30 de zile); clientul restituie băncii în prima zi 1 ban, în ziua a doua – 2 bani, în ziua a treia – 4 bani, în ziua a patra – 8 bani ş.a.m.d. (timp de 30 de zile). Sunteţi de acord să deveniţi clienţi ai acestei bănci? Să se argumenteze răspunsul.

**47.** Un ambalaj din carton are forma unui paralelipiped dreptunghic ale cărui dimensiuni sunt indicate în desen. Observaţi ambalajul desfăcut şi dimensiunile lui. La închiderea ambalajului, unele dreptunghiuri (colorate) se suprapun. Să se calculeze aria totală a ambalajului închis.




**48.** Numerele $x, y, z$ sunt în progresie geometrică, iar numerele $x, 2y, 3z$ sunt în progresie aritmetică. Să se afle raţia progresiei geometrice diferită de unu.

**49.** Într-un oraş sunt 3 milioane de locuitori. O persoană străină a sosit în oraş cu o noutate şi peste 10 minute a comunicat-o la doi orăşeni. Fiecare dintre aceşti orăşeni a comunicat noutatea peste 10 minute încă la doi orăşeni (care nu cunoşteau această noutate) ş.a.m.d. Peste câte minute toţi orăşenii vor cunoaşte noutatea?

**50.** Să se determine toate progresiile geometrice al căror fiecare termen, începând cu al treilea, este egal cu suma celor doi termeni precedenţi.

**51.** Suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice este egală cu 62. Să se afle primul termen al progresiei geometrice, dacă se ştie că al cincilea, al optulea şi al unsprezecelea sunt respectiv primul, al doilea şi al zecelea termen ai unei progresii aritmetice.

**52.** Suma primilor treisprezece termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu 130. Să se afle primul termen al progresiei aritmetice, dacă se ştie că al patrulea, al zecelea şi al şaptelea termen ai acestei progresii sunt, în această ordine, trei termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

***Profilul real***

## A$_1$

**1.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2^{x^2-x}=1$; b) $0{,}5^{2(x-5)}=0{,}25$;

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^3+5x^2}=-\frac{1}{2}$; d) $5\cdot 4^x=4\cdot 5^x$; e) $19^x=38^x$.

**2.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\log_2(x^2-3x)=2$; b) $\lg(x^2-9x)=1$;

c) $\log_3(x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=-2$;

d) $\log_5(x^2-16)+\log_5\sqrt{125}=\log_5(x+4)$.

**3.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $5^{2x}+5^x-600=0$; b) $10^x+4^x-2\cdot 25^x=0$.

**4.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x^2+y^2=400,\\2x-y=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}9^{x+y}=729,\\5^{x-y+1}=1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x-y=16,\\\lg x+\lg y=2.\end{cases}$

**5.** Să se afle valoarea expresiei $-3\sin(\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ pentru $\sin\alpha=-\frac{1}{8}$.

**6.** Să se afle valoarea expresiei $\frac{-3\cos 33^\circ}{\sin(-57^\circ)}$.

**7.** Se știe că: a) $\cos\alpha=-0{,}4$; b) $\sin\alpha=-0{,}6$.
Să se afle $\cos 2\alpha$.

**8.** Se știe că $\sin\alpha+\cos\beta=2$. Să se afle $\cos(\alpha+\beta)$.

**9.** Să se scrie sub formă trigonometrică numărul:

a) i; b) –i; c) 10; d) $\mathrm{i}-\sqrt{3}$; e) $2-3\mathrm{i}$.

**10.** Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

a) $(\exists x\in\mathbb{R})(|x+2|<3)$;

b) $(\forall x\in\mathbb{R})(x^2+4x+4+|x^2-x+1|>0)$.

**11.** Să se rezolve în **C** ecuația:

a) $\mathrm{i}x^2-3x+\mathrm{i}=0$; b) $z^4-z^2-12=0$;

c) $3x^3-x^2-x+3=0$; d) $(1+\mathrm{i})z^2-(5+2\mathrm{i})z+5=0$.

**12.** Să se completeze cu o expresie astfel încât să se obțină o propoziție adevărată:

$$3A_n^2+A_n^3=\boxed{\phantom{xxxxxx}}-C_n^{n-1}.$$

**13.** Fie condițiile: $A$: „Triunghiul $MNP$ este isoscel”, $B$: „Unghiurile $M$ și $N$ au câte 30°”. Să se formuleze teorema „Dacă $A$, atunci $B$”, reciproca ei, contrara reciprocei, reciproca contrarei și să se determine valorile lor de adevăr.

**14.** Fie condițiile: $A$: „Numărul întreg $a$ este divizibil cu 4”, $B$: „Numărul întreg $a$ este divizibil cu 8”. Să se determine dacă aceste condiții sunt echivalente.

## B$_1$

**15.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:

a) $C_x^3+C_x^4=A_x^2$; b) $\frac{A_x^2}{C_{x+1}^3}=48(x-1)$;

c) $2A_n^3+6A_n^2=P_{n+1}$.

**16.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-x^2-3x$.

a) Să se afle intervalul unde funcția $f$ este crescătoare.

b) Să se determine coordonatele punctului de maxim local al funcției $f$.

c) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația $f(x)\le 0$.

**17.** Să se determine intervalele de monotonie și punctele de extrem ale funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=2x^3-3x^2$; b) $f(x)=1-16x^4$.

**18.** Să se determine extremele globale ale funcției:

a) $f:[1, 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-x^3$;

b) $f:[0, 4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\sqrt{x}$.

**19.** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{-8\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-96}{x+8}$, în punctul de intersecție a graficului funcției cu:

a) axa ordonatelor;

b) axa absciselor.

**20.** Să se determine dacă în punctul $x_0=2$ sunt verificate condițiile teoremei lui Fermat pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=(x-2)^2$; b) $f(x)=(x-2)^3$.

**21.** Să se traseze graficul unei funcții pentru care în punctele $x_0=0$, $x_1=3$ se verifică condițiile teoremei lui Fermat.

**22.** Să se determine intervalele de monotonie, punctele de extrem și extremele locale ale funcției $f$ pe domeniul ei maxim de definiție, dacă $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-3x^2-4x+10$;

b) $f(x)=x^3-18x$;

c) $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

**23.** Să se traseze graficul funcției $f: D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=x^3-2x+1$; b) $f(x)=x^4-2x^2$.

**24.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x_1-2x_3=0,\\x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+x_2=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\2x_1-x_3=0,\\-x_1+2x_2-2x_3=0.\end{cases}$

**25.** Să se calculeze $P(X)+Q(X)$, $P(X)-Q(X)$ și $P(X)\cdot Q(X)$, dacă $P(X)=2-3X+2X^3$, $Q(X)=3+4X-2X^2$.

**26.** Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la polinomul $Q(X)$, unde:
a) $P(X)=2X^4+3X^3-2X^2+3X+1$, $Q(X)=X^2+3X+1$;
b) $P(X)=3X^5-2X^4-3X^2+5X+4$, $Q(X)=X^3+2X+3$.

**27.** Fie polinomul $F(X)=X^5+5X^4+8X^3+5X^2+7X+3$.
a) Să se selecteze rădăcinile acestui polinom din mulțimea $M=\{\pm\mathrm{i}, 1, 3, 0\}$.
b) Să se determine ordinul de multiplicitate al fiecărei rădăcini.
c) Să se descompună polinomul în produs de puteri de polinoame ireductibile peste $\mathbb{R}$ (cu coeficienți reali).
d) Să se aducă la o formă mai simplă expresia $H(X)=\dfrac{F(X)}{G(X)}$, unde $G(X)=X^3+X^2+X+1$.

**28.** Să se determine rădăcinile polinomului $P(X)$, știind că $P(\alpha)=0$, dacă:
a) $P(X)=X^3-2X^2-X+2$, $\alpha=1$;
b) $P(X)=X^3+5X^2+5X+4$, $\alpha=-4$.

**29.** Să se descompună în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ polinomul: a) $X^3-1$; b) $X^4-16$; c) $X^4-3X^2-4$.

**30.** Prețul unei unități de produs este de 150 lei. Cheltuielile de producție sunt descrise de funcția definită prin formula $c(x)=4x^2+30x+300$, unde $x$ este numărul de unități de produs. Să se determine valoarea maximă a venitului brut.

**31.** Un punct material se deplasează pe o axă conform legii $s(t)=27t-t^3+1$ ($s$ este distanța exprimată în metri, iar $t$ este timpul exprimat în secunde).
a) Care este viteza punctului material în momentul inițial?
b) Peste cât timp de la plecare punctul material se va opri? Care este distanța parcursă până în acel moment?

**32.** Să se afle cardinalul mulțimii $M=\mathbb{Z}\cap D$, $D\subseteq\mathbb{R}$, unde $D$ – domeniul maxim de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{x^2-9}{-x^2+25}$, iar $\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi.

**33.** Să se afle aria triunghiului ale cărui vârfuri au coordonatele (1; 1), (1; 4), (4; 3).

**34.** Să se determine aria paralelogramului ale cărui vârfuri au coordonatele (1; 2), (1; 4), (5; 3), (5;1).

**35.** Dreapta $y=2x-3$ este tangentă la graficul funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.
Să se afle abscisa punctului de tangență.

**36.** Înălțimea la care ajunge o minge aruncată vertical față de suprafața pământului se calculează conform formulei $h(t)=-4t^2+22t$; unde $h$ – înălțimea (în metri), $t$ – timpul (în secunde) ce s-a scurs după aruncarea mingii. Câte secunde se va afla mingea la o înălțime de cel puțin 10 m?

**37.** Să se afle cifra $a$, dacă:
a) numărul $\overline{235a}$ se divide cu 18;
b) numărul $\overline{120a}$ se divide cu 15;
c) numărul $\overline{345a}$ se divide cu 6.

**38.** Să se calculeze:
a) $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{2011}}{(1+\mathrm{i})^{2011}}$; b) $\mathrm{i}^{2012}\cdot(\mathrm{i}^{27})^{15}$;
c) $\begin{vmatrix}\mathrm{i} & 2 & -\mathrm{i}\\ 1-\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i}\\ 1+\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i}\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1\\ -1 & \mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\\ 0 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i}\end{vmatrix}$.

**39.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:
a) $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 5=\log_3 10,\\ \log_5 x^3+\log_5 y^2=\log_5 32;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^3y+xy^3=1010,\\ \lg x+2\log_{100} y=1;\end{cases}$
c) $\begin{cases}2^{\frac{x-y}{2}}-2^{\frac{x-y}{4}}=2,\\ 3^{\log_2(2y-x)}=1.\end{cases}$

**40.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x+\sqrt{5x+10}=8$; b) $4x-5=-2\sqrt{5-4x}$;
c) $(x^2-4)\sqrt{x-3}=0$; d) $2^{x+3}+4^{x+1}=320$;
e) $3^{x+1}+18\cdot 3^{-x}=29$;
f) $\log_{\frac{1}{5}}(3-2x)+\log_5(-x-6)=-1$.

**41.** Fie ecuația $5x^2-x-4=0$.
a) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația.
b) Să se scrie un polinom de gradul II ale cărui rădăcini sunt opusele soluțiilor ecuației date.
c) Să se determine primitiva funcției $g$, asociate polinomului de la b), al cărei grafic trece prin punctul $A(-1, 5)$.
d) Să se calculeze $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$, unde $G$ este primitiva obținută la c).
e) Să se afle volumul tetraedrului regulat a cărui muchie are lungimea egală cu valoarea integralei definite de la d).

**42.** Să se determine poziția reciprocă a cercurilor de ecuații $x^2+y^2-6x+8y=0$ și $x^2+y^2+4x-6y=3$.

**43.** Să se scrie ecuația cercului de rază 5 cm, tangent la cercul $x^2+y^2-10y=0$ în punctul $P(3, 1)$.

**44.** Să se afle coordonatele punctelor comune ale dreptei $y=4-0{,}4x$ și cercului $x^2+x+y^2=1$.

**45.** Fie funcția $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Tangenta dusă la $G_f$ intersectează axa $Ox$ în punctul $M$, iar axa $Oy$ – în punctul $N$. Să se afle coordonatele punctului de tangență, dacă aria triunghiului $NOM$ este de $6{,}75\text{ cm}^2$.

**46.** Aria dreptunghiului este de 32 $cm^2$. Să se afle valoarea minimă a perimetrului acestui dreptunghi.

**47.** Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice: $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$.

**48.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x=10$;

b) $2x^2-8x+3\sqrt{x^2-4x+1}=3$;

c) $(x^2-6x+5)\sqrt{2x+8-x^2}=0$;

d) $\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}+\sqrt{4^x-8\cdot 2^x+16}=3$;

e) $x^{\log_2 x+2}=256$;

f) $6^{\log_{\sqrt{3}} x}-7\cdot 6^{\log_3 x}=-6$;

g) $\log_{x+2} x+\log_x (x+2)=2{,}5$.

**49.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x^{\log_2 y}+y^{\log_2 x}=16, \\ \log_2 x-\log_2 y=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2, \\ x+y=26; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2\log_y x+2\log_x y=5, \\ xy=8; \end{cases}$ d) $\begin{cases} |x|^{\lg y}=4, \\ xy=40. \end{cases}$

**50.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\log_{0,1}(-x)\le\frac{1}{2}\log_{0,1}(8-7x)$;

b) $27\cdot 4^x-30\cdot 6^x+8\cdot 9^x\ge 0$;

c) $32^{1-x^2}<16^x$; d) $0{,}2^{x^2-6}\ge 0{,}008$;

e) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-3}{1-x}>-1$; f) $\log_x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}\right)\le 1$.

**51.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(x^2-4x+4)(\ln x-1)<0$;

b) $|x^2-5x+6|(4^x-64)\ge 0$.

**52.** Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{\frac{(x+5)(2-x)}{\log_2(x^2-1)}}$;

b) $f(x)=\ln|x^2-1|+\frac{\sqrt[4]{3x^4-x^2-2}}{x^3-x^2+x-1}$.

**53.** Să se calculeze $\sqrt[3]{z_1 z_2}$, unde $z_1$, $z_2$ sunt soluțiile complexe ale ecuației $z^2-(2\mathrm{i}+1)z+(\mathrm{i}-1)=0$.

**54.** Pentru care valori ale parametrului real $a$ sistemul de ecuații $\begin{cases} |x|+y=5 \\ (y-a)^2+x^2=9 \end{cases}$ are o unică soluție?

**55.** Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-x)(1-2x^2)(1-3x^3)}{(3+2x^2)^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{6}{1-x^6}-\frac{4}{1-x^4}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\,\mathrm{tg}\,x}-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2(3x)}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

**56.** Să se stabilească forma graficului funcției $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, dacă se știe că pe intervalul $(a,b)$:

a) $f(x)>0,\ f'(x)>0,\ f''(x)<0$;

b) $f(x)<0,\ f'(x)>0,\ f''(x)>0$.

În exercițiile **57–59** să se indice litera corespunzătoare variantei corecte.

**57.** Dezvoltarea binomului $(5x+3y)^{17}$ la putere conține

**A** 17 termeni. **B** 16 termeni.

**C** 18 termeni. **D** 15 termeni.

**58.** Termenul al șaselea în dezvoltarea binomului $(a^2-b^2)^{10}$ la putere este

**A** $C_{10}^6(a^2)^4\cdot(b^2)^6$. **B** $-C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$.

**C** $C_{10}^5(a^2)^5(b^2)^5$. **D** $-C_{10}^6(a^2)^4(b^2)^6$.

**59.** Suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar în dezvoltarea binomului $(x^3-y^3)^6$ la putere este egală cu

**A** 32. **B** 64. **C** 128. **D** 16.

**60.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $2C_n^3\ge A_n^2$; b) $4(C_{n-1}^4-C_{n-1}^3)\ge 5A_{n-2}^2$.

**61.** Să se determine (dacă există):

a) termenul care îl conține pe $x^3$ în dezvoltarea binomului $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{14}$ la putere;

b) termenul care îl conține pe $y^7$ în dezvoltarea binomului $(y-\sqrt{2})^9$ la putere;

c) termenul în care nu apare $a$ în dezvoltarea binomului $(2a^3-a^2)^{20}$ la putere.

**62.** Să se afle $C_n^4$ știind că în dezvoltarea binomului $(1+\sqrt{a})^n$ la putere coeficienții binomiali ai puterilor $a^3$ și $a^5$ sunt egali.

**63.** În dezvoltarea binomului $\left(a^2-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$ la putere suma coeficienților binomiali de rang impar este egală cu 64. Să se determine termenul care îl conține pe $a^{-3}$.

**64.** Utilizând dezvoltarea binomului la putere, să se calculeze $P(2-\mathrm{i})$, dacă $P(X)=X^5-3X^3+\mathrm{i}X-\mathrm{i}$.

**65.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $3\cos^2 x+7\sin x-5=0$;

b) $1-\sin 2x=(\cos x+\sin x)^2$;

c) $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}$;

d) $2\sin^2 x-3\sin 2x=2$;

e) $\mathrm{tg}\frac{x}{2}-5\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2}=-4$;

f) $2\sin^2 x-1{,}5\sin 2x-3\cos^2 x=0$.

**66.** Să se afle soluțiile ecuației $\cos 2x - 5\sin x = 3$, ce aparțin intervalului $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$.

**67.** Ştiind că $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \\ 3 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 6 \\ 2i & 4 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, să se rezolve ecuația matricială:

a) ${}^tAB - 2X = 3C_1$; b) $3X + AB^t + 2C_2 = 0$.

**68.** Să se rezolve în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda lui Gauss, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 5; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -2, \\ 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

**69.** Se consideră funcția $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ \alpha, & \text{dacă } x = 0, \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine valorile lui $\alpha$ pentru care funcția $f$ este continuă pe $[-1, 1]$.

**70.** Să se determine punctele de discontinuitate ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 0 \\ x + \cos x, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ e^x, & x \ge \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$.

**71.** Fie $a \in \mathbb{R}$ şi funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a^2, & x \in (-\infty, a] \\ 2x + 1, & x \in (a, +\infty). \end{cases}$$

Să se afle $a$ astfel încât funcția $f$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

**72.** Să se precizeze care dintre funcțiile $f$ sunt mărginite:

a) $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 1}$;

b) $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + 1}{x(1 + e^x)}$;

c) $f: [0, 3\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2 + \sin x}$;

d) $f: (-\infty, +\infty)$, $f(x) = \sin x + e^{-x}$.

**73.** Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se anulează cel puțin o dată pe mulțimea indicată:

a) $f(x) = 3^x - 2 - \sin x$ pe $[0, 1]$;

b) $f(x) = \ln x + x^2$ pe $(0, 1]$.

**74.** Să se aplice teorema lui Rolle funcției $f$ şi să se determine efectiv punctul $c$:

a) $f: [-2, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)(x - 5)$;

b) $f: [-1, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2|$.

**75.** Să se aplice teorema lui Lagrange funcției $f$ şi să se determine efectiv punctul $c$:

a) $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \ln x$;

b) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3e^x$;

c) $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x \in [0, 1], \\ x - 2, & \text{dacă } x \in (1, 4]. \end{cases}$

**76.** Folosind regulile lui l'Hospital, să se calculeze limita:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x} + 1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \left( \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \left( \dfrac{\sin 2x}{2x} \right)^{\frac{1}{x \sin x}}$.

**77.** Să se traseze graficul funcției $f: D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 \ln x$; b) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$; c) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|}{2x}$.

**78.** Să se determine dreptunghiul de arie maximă, dacă lungimea diagonalei lui este $l$.

**79.** Să se arate că graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$, are trei puncte de inflexiune care aparțin aceleiaşi drepte.

**80.** Să se afle numărul pozitiv $x$ pentru care suma $x + \dfrac{1}{x}$ este minimă.

**81.** Să se construiască prin punctul $A(1, 4)$ o dreaptă astfel încât suma lungimilor segmentelor tăiate de această dreaptă pe semiaxele pozitive $Ox$ şi $Oy$ să fie minimă.

**82.** Cererea se descrie de funcția definită prin formula $p(x) = 900 - \dfrac{1}{3}x$, iar oferta – de funcția definită prin formula $p_1(x) = 800 + 3x$ ($x$ este numărul de unități de produs). Să se determine mărimea impozitului pentru fiecare unitate de produs astfel încât venitul din impozitare să fie maxim.
*Indicație*. Venitul din impozitare $V(x) = I \cdot x$, unde $I$ este impozitul pentru o unitate de produs şi se determină din relația $p(x) = p_1(x) + I$.

**83.** Legea de mişcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = te^{-t} + 2$. Să se determine:
a) momentul în care accelerația mobilului este nulă;
b) valoarea minimă a vitezei şi distanța parcursă de mobil la acel moment.

**84.** Să se efectueze: $\dfrac{C_{2n}^3 C_{2n}^1}{(C_{2n}^2)^2} - \dfrac{P_{2n} P_{2n+1}(4n^2-2n)^2}{4(C_{2n}^2)^2((2n)!)^2}$.

**85.** Să se afle suma $C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + \ldots + 3^n C_n^n$.

**86.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuația:
a) $\dfrac{C_{2n+1}^{n-1}}{C_{2n}^{n+1}} = \dfrac{13}{7}$;  b) $C_{2n-1}^{2n-2} = n^3 + 13$.

**87.** Să se rezolve în $\mathbb{N}$ inecuația:
a) $C_{2n}^5 > C_{2n}^3$;  b) $C_{11}^n < C_{11}^{n+2}$;  c) $\dfrac{C_{n+1}^2}{C_n^3} \geq \dfrac{4}{5}$.

**88.** Să se afle în dezvoltarea binomului $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^n$ exponentul $n$ astfel încât $T_5 : T_7 = 5$.

**89.** Să se determine numărul de termeni raționali în dezvoltarea la putere a binomului:
a) $(\sqrt{3} + \sqrt[4]{5})^{124}$;  b) $(\sqrt{2} - \sqrt[4]{3})^{100}$.

**90.** Să se afle numărul $x$ ştiind că în dezvoltarea la putere a binomului $(x - x^{\lg x})^9$ termenul al patrulea este $-84 \cdot 10^8$.

**91.** Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $\dfrac{\sin 2t}{1 - \sin t} = 2\cos t$;
b) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\sin 3x$;
c) $3^{1-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - 8 \cdot 3^{\cos x - \sin x} - 9 = 0$;
d) $\cos 4x + \sin^2 3x = 1$.

**92.** Să se afle soluțiile reale ale ecuației
$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x,$$
care satisfac condiția $\cos x < -\dfrac{1}{2}$.

**93.** Să se determine, prin două metode, inversa matricei:
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;  b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;  c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**94.** Să se studieze compatibilitatea sistemului:
a) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$  b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

**95.** Presupunem că ați uitat una dintre cifrele unui număr de telefon şi o formați la întâmplare. Care este probabilitatea că veți face cel mult două încercări?

**96.** În două urne sunt 13 bile, albe şi negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Probabilitatea ca ambele bile extrase să fie albe este $\dfrac{7}{18}$. Care este probabilitatea ca ambele bile extrase să fie negre?

**97.** Să se determine valorile parametrului real $a$ pentru care restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$ este $R$, dacă:
a) $P(X) = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 3X + 4$,
$Q(X) = X + 3$, $R = -5$;
b) $P(X) = X^3 + (a^2+3)X^2 + 2aX + 4a + 5$,
$Q(X) = X - 2$, $R = 37$.

**98.** Să se determine rădăcinile polinomului $P(X)$ ştiind că $P(\alpha) = 0$, dacă $P(X) = X^3 - 21X^2 - 73X + 24$, $\alpha = 24$.

**99.** Să se determine celelalte rădăcini raționale ale polinomului, dacă $\alpha_1$ este o rădăcină a acestuia:
a) $X^3 + 9X^2 + 18X + 26$, $\alpha_1 = -2$;
b) $2X^3 + 12X^2 + 60X + 50$, $\alpha_1 = -1$.

**100.** Să se descompună polinomul în factori ireductibili peste $\mathbb{R}$ şi să se determine rădăcinile lui:
a) $X^4 + X^3 - X^2 - 1$;  b) $X^4 - 2X^2 + 1$;
c) $3X^4 - X^2 - 2$.

**101.** La o competiție de tragere la țintă pentru fiecare eşec dintr-o serie de 25 de trageri țintaşul este penalizat: pentru primul eşec cu 1 punct, iar pentru fiecare eşec următor cu $\dfrac{1}{2}$ puncte mai mult decât la eşecul precedent. De câte ori țintaşul a nimerit ținta dacă el a fost penalizat cu 7 puncte pentru eşecuri?

**102.** Pentru care valori ale lui $x \in (1, +\infty)$ numerele $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ sunt în progresie aritmetică?

**103.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 - x^2 - mx$. Se ştie că punctul $x_0 = -2$ este punct de maxim pentru funcția $f$.
a) Să se afle valoarea parametrului $m$.
b) Să se determine punctul de minim al funcției $f$ pentru $m$ calculat la a).
c) Să se calculeze distanța dintre punctul de minim şi punctul de maxim ale funcției $f$.

**104.** Dreapta $y = 4x + 6$ este tangentă la graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 5x + 7$.
a) Să se afle coordonatele punctului de tangență.
b) Câte puncte comune are dreapta $y = 4x + 6$ cu $G_f$?
c) Să se afle aria figurii mărginite de graficul $G_f$ şi de dreptele $y = 4x + 6$, $x = -1$ şi $x = 4$.

**105.** Să se afle cardinalul mulțimii
$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x = \frac{6n-7}{2n+1},\ n \in \mathbb{Z}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{3n^2+6n+1}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

**106.** Dintr-o bucată de stofă de formă triunghiulară o croitoreasă vrea să coase o față de masă dreptunghiulară. Cum trebuie croită fața de masă astfel încât pierderile de stofă să fie minime?

**107.** Fie funcțiile:

$f: D_1 \to \mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}},$

$g: D_2 \to \mathbb{R},\ g(x)=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}.$

a) Să se determine $D_1$ și $D_2$.

b) Să se simplifice raportul $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

c) Să se rezolve în $D_1 \cap D_2 \cap \mathbb{R}$ ecuația

$$f(x)+g(x)=2\sqrt{2}.$$

**108.** Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n \in \mathbb{R}$.

**109.** Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=1$. Să se arate că $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

**110.** Să se determine numărul complex $z$ astfel încât:

a) $|z|-2z=3-4\mathrm{i}$; b) $|z-\mathrm{i}|=|z-1|+|z+\mathrm{i}z|$.

**111.** Fie $z=a+b\mathrm{i}$. Să se determine toate numerele complexe $z_1=x+\mathrm{i}y$ astfel încât $z^2=a+b\mathrm{i}$.

**112.** Câte dicționare sunt necesare pentru a traduce direct, dintr-o limbă în alta, din următoarele 6 limbi: română, ucraineană, rusă, greacă, italiană, engleză?

**113.** Să se determine:

a) termenii raționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{2}-\sqrt[7]{3})^{24}$;

b) termenii iraționali ai dezvoltării $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2})^{24}$.

**114.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $f(x)=2x^2+1$, iar $f^{-1}$ – inversa funcției $f$. Să se determine:

a) $f(f^{-1}(x))$; b) $f^{-1}(f(x))$.

**115.** Să se arate că polinomul $X^{n+1}-X^{n+2}-3X+3$ se împarte fără rest la polinomul $(X-1)^2$.

**116.** Să se arate că polinomul $X^{1993}+X^2+1$ se împarte fără rest la $X^2+X+1$ și să se calculeze câtul.

**117.** Să se rezolve în $\mathbf{C}$ ecuația reciprocă:

a) $x^3-8x^2-8x+1=0$; b) $4x^4+5x^3+2x^2+5x+4=0$.

**118.** Să se rezolve în $\mathbf{C}$ ecuația bipătratică:

a) $x^4+20x^2+96=0$; b) $x^6-19x^3-216=0$;

c) $x^4-(m+1)x^2+m=0$, unde $m$ – parametru real.

**119.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $A^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**120.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Să se determine $a$ și $b$ astfel încât $AX=XA$.

**121.** Fie $A$ o matrice pătratică de ordinul 3 cu elementele $-1$ și 1.

a) Să se arate că $\det A$ este un număr par.

b) Să se determine valoarea maximă pe care o poate lua $\det A$.

c) Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua $\det A$.

**122.** Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2+A+I_2=O_2$.

a) Să se arate că matricea $A$ este inversabilă.

b) Să se afle inversa matricei $A$.

**123.** Fie punctul $A(-1, 2)$. Să se determine coordonatele imaginii punctului $A$:

a) la simetria centrală față de punctul $M(2, -5)$;

b) la simetria axială față de axa $x=2$;

c) la rotația cu 120° în jurul originii sistemului de coordonate $O$, în sens opus mişcării acelor de ceasornic;

d) la translația $t_{OM}$.

**124.** Latura $AB$ a paralelogramului $ABCD$ este situată în planul $ABM$, iar latura $BC$ formează un unghi $\alpha$ cu acest plan. Ce unghi formează diagonala $BD$ cu planul $ABM$ dacă:

a) $ABCD$ este pătrat;

b) $ABCD$ este romb și $m(\angle B)=120°$?

**125.** Este oare posibil ca toate muchiile unei piramide hexagonale regulate să fie congruente? Argumentați răspunsul.

**126.** O catetă a triunghiului dreptunghic are lungimea $m$, iar măsura unghiului ascuțit alăturat acesteia este $\beta$. Triunghiul se roteşte în jurul ipotenuzei.

a) Să se afle aria suprafeței totale a corpului obținut.

b) Să se determine volumul corpului obținut.

**127.** Să se calculeze integrala $\int_{-1}^{1} x^4 \operatorname{arctg} x\, dx$.

**128.** Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$,

$f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}-\dfrac{1}{|x+2|-3}$.

a) Să se studieze continuitatea şi derivabilitatea funcției $f$.

b) Să se reprezinte grafic funcția $f$.

c) Să se determine aria figurii mărginite de graficul $G_f$, asimptota oblică a acestui grafic şi dreptele de ecuații $x=3$ şi $x=4$.

C1

**129.** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to+\infty} a\cdot I(a)$, dacă $I(a)=\int\limits_1^2 \frac{dx}{|x+a|+1}$.

**130.** Să se calculeze $\lim\limits_{a\to+\infty} a(I(a)-1)$, dacă $I(a)=\int\limits_a^{a+1} \frac{|1-x|\,dx}{1+|x|}$.

**131.** Să se determine valorile parametrilor reali $a$ și $b$ pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}+\sqrt[3]{x^3+x^2}+\sqrt[4]{x^4+x^3}+ax+b)=\frac{1}{12}$.

**132.** Să se determine valorile parametrului real $a$ astfel încât:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+ax+1}{x^2+2x-1}\right)^x=e$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)^{x\sqrt{x}}=\sqrt{e},\ a\neq 0$.

**133.** Să se demonstreze că dacă $f, g: I\to\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$ sunt funcții continue într-un punct $x_0\in I$ și dacă $f(x_0)<g(x_0)$, atunci există $\delta>0$, astfel încât $f(x)<g(x)$ pentru orice $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I$. Rămâne concluzia adevărată dacă una dintre funcțiile $f, g$ este discontinuă în punctul $x_0$?

**134.** Fie $f: [-1, 1]\to[-a, a]$ o funcție continuă, unde $a$, $a>0$, este un parametru fixat. Să se demonstreze că ecuațiile $f(x)-ax=0$ și $f(x)+ax=0$ au cel puțin o soluție reală ce aparține intervalului $[-1, 1]$.

**135.** Fie $f: [a, b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă, neconstantă și $f(a)=f(b)$. Să se arate că dacă $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ și $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci funcția $f$ ia orice valoare din intervalul $(m, M)$ cel puțin de două ori.

**136.** Fie $g: [0, 1]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(\alpha)=\int\limits_0^1 g(x)\sin\alpha x\,dx$, este continuă pe $\mathbb{R}$.

**137.** Pentru care valori ale parametrilor $a, b\in\mathbb{R}$ punctul $M(1, 3)$ este punct de inflexiune pentru curba $f(x)=ax^3+bx^2$?

**138.** Să se demonstreze că dacă graficul unei funcții $f: (a, b)\to\mathbb{R}$ este strict convex sau strict concav, atunci această funcție are cel mult un punct de extrem.

**139.** Pentru care valori ale lui $x\in\mathbb{R}_+^*$ șirul de numere $\log_8 x, (\log_8 x)^2, ..., (\log_8 x)^n, ...$ formează o progresie geometrică infinit descrescătoare cu suma egală cu $\frac{1}{2}$?

**140.** Pentru care valori ale parametrului real $a$ ecuațiile $\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ și $\left(\sin x-\frac{a}{3}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ sunt echivalente?

**141.** Să se demonstreze că trei numere $\frac{1}{6}\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha$ sunt în progresie geometrică, dacă $\alpha=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

**142.** Să se demonstreze că dacă pentru funcția exponențială $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a^x\ (a>0, a\neq 1)$, șirul valorilor argumentului $x=x_n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ formează o progresie aritmetică, atunci șirul corespunzător al valorilor funcției $(f(x_n))_{n\geq 1}$ formează o progresie geometrică.

**143.** Pentru care valori ale parametrului real $a$ funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(2-x)^2-ax+3a$, este pară?

**144.** Fie mulțimea $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+2=0\}\cup$ $\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+8x+2m^2=0\}$.
Să se demonstreze că $\operatorname{card}B=2$ pentru orice $m\in\mathbb{N}$.

**145.** Să se demonstreze că

$$\log_2 3+\log_3 4+\log_4 5+\log_5 6>5.$$

**146.** Să se calculeze suma și apoi să se demonstreze, prin metoda inducției matematice, că formula găsită este adevărată $\forall n\in\mathbb{N}^*$:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)$;

b) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

**147.** Să se demonstreze că oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, numărul $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ este natural.

**148.** La început de an, M.I. a plasat pe un cont în bancă 10 000 lei în regim de dobândă compusă, cu capitalizare anuală, la o rată anuală a dobânzii de 10%. La sfârșitul fiecărui an, M.I. extrage de pe cont o sumă constantă de 800 lei. Ce sumă va avea M.I. în cont peste $n$ ani? Se va epuiza contul lui M.I. atunci când $n$ tinde la infinit?

**149.** Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ dat prin formula termenului general:

a) $a_n=\frac{1}{n}$; b) $a_n=\sqrt{n}$.

Să se demonstreze că oricare ar fi trei termeni consecutivi ai acestui șir, ei nu sunt în progresie aritmetică.

**150.** Să se calculeze suma $3+33+333+\ldots+\underbrace{333\ldots3}_{n\text{ ori}}$.

**151.** Să se demonstreze că nu toate numerele $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5}$ pot fi printre termenii unei progresii geometrice cu termeni pozitivi.

**152.** Să se determine parametrul real $m$ astfel încât restul împărțirii polinomului

$$P(X)=X^6-mX^4+(m^2+4)X^2-2$$

la binomul $X-1$ să fie 5.

**153.** Să se demonstreze că $\begin{vmatrix}1 & a & h_b\cdot h_c\\ 1 & b & h_c\cdot h_a\\ 1 & c & h_b\cdot h_a\end{vmatrix}=0$, unde $a, b, c$ sunt lungimile laturilor unui triunghi, iar $h_a,\ h_b,\ h_c$ – lungimile înălțimilor corespunzătoare.

# Evaluare finală

*Timp efectiv de lucru: 90 de minute*

## Test sumativ

***Profilurile umanist, arte, sport***

**1.** În cadrul realizării proiectului „Un arbore pentru dăinuirea noastră”, primăria a procurat 390 de arbori, achitând câte 25,5 lei pentru un arbore. Elevii claselor a XI-a şi a XII-a au plantat împreună aceşti arbori. Se ştie că elevii clasei a XII-a au plantat cu 30% mai mulți arbori decât cei din clasa a XI-a.

a) Completați propoziția astfel încât să fie adevărată:

„Primăria a cheltuit $\boxed{\phantom{0000}}$ lei pentru procurarea arborilor.”

b) Aflați câți arbori au plantat elevii clasei a XII-a.

c) Se ştie că un arbore matur produce circa 100 $m^3$ de oxigen pe an, iar o persoană consumă circa 19 $m^3$ de oxigen în 24 de ore. Aflați câte persoane vor putea consuma, în decurs de 24 de ore, volumul de oxigen care va fi produs într-un an de cei 390 de arbori plantați.

**2.** Fie funcțiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) = t^2 - 4t + 3$, şi $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = -2t^2 - t + 3$.

a) Încercuiți litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

„$f(0) > g(1)$.” | **A** | **F** |

b) Aflați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f$ şi $g$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $f(t) \le g(t)$.

d) Traiectoria de zbor a unei pietre reprezintă o porțiune a graficului funcției $g$.
Aflați înălțimea maximă la care poate ajunge piatra.

**3.** Un gospodar a adunat fânul într-un stog de forma unui con circular drept cu raza bazei de 4 m şi înălțimea de 3 m.

a) Completați cu unul dintre termenii „un poliedru”, „un disc”, „un corp geometric”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

„Conul circular drept este ______________________________.”

b) Determinați aria suprafeței laterale a stogului de fân.

c) Pentru a hrăni calul din gospodărie, în luna noiembrie gospodarul a luat fân din vârful stogului. Fânul rămas avea forma unui trunchi de con circular drept cu înălțimea de 1,2 m. Aflați volumul de fân folosit în luna noiembrie. (Rotunjiți răspunsul până la zecimi.)

### *Profilul real*

**1.** Pentru a transforma o anumită temperatură din grade Celsius în grade Fahrenheit, se înmulțește această temperatură cu $\frac{9}{5}$, apoi se adună cu 32.

a) Scrieți formula de transformare a gradelor Celsius în grade Fahrenheit.

$$t\ ^\circ\text{F} = \boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxx}}$$

b) Se știe că temperatura într-un frigider este cuprinsă între 2 °C și 7 °C. Determinați limitele de variație a acestei temperaturi în grade Fahrenheit.

c) Într-o zi de vară, temperatura aerului într-un stat din SUA variază între 70 °F și 90 °F. Determinați limitele de variație a acestei temperaturi în grade Celsius.

**2.** Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

a) Încercuiți litera **A**, dacă propoziția este adevărată, sau litera **F**, dacă ea este falsă:

„Funcția $f$ este continuă în punctul $x_0 = 0$.” | **A** | **F** |

b) Aflați primitiva $F_1$ a funcției $f$ care trece prin punctul $A(1, 2)$.

c) Aflați primitiva $F_2$ a funcției $f$ care trece prin punctul $B(8, 4)$.

d) Determinați care dintre graficele acestor primitive este situat mai sus în sistemul de coordonate.

e) Aflați aria figurii mărginite de graficele $F_1$, $F_2$ și de dreptele $x_1 = 8$ și $x_2 = 27$.

**3.** La un magazin se vinde lapte ambalat în pachete având forma unei piramide triunghiulare regulate cu muchia de 13,5 cm.

a) Completați spațiul rezervat astfel încât să obțineți definiția respectivă:
„Piramida triunghiulară cu toate muchiile congruente se numește ________________.”

b) Aflați volumul pachetului.

c) Determinați câte procente din volumul pachetului rămâne neumplut după ce în pachet se toarnă 0,5 *l* de lapte. (Calculați pentru $\pi \approx 3{,}14$.)

**4.** Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| + 2\mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}z\} \cup \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ \operatorname{tg}^2 x & \cos 2x \end{vmatrix} = 5 \text{ și } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right\}$.

a) Completați casetele astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$$„\boxed{\phantom{xxxx}} \cdot \cos^2 2x + \boxed{\phantom{xxxx}} \cdot \sin^2 2x = -\sqrt{10}\,.”$$

b) Aflați cardinalul mulțimii $A$.

c) Demonstrați că $(1+\mathrm{i})^{6n} = (-\mathrm{i})^n \cdot 2^{3n},\ n \in \mathbb{Z}$.

# Răspunsuri și indicații

## Modulul 1. Primitive și integrale nedefinite

**§1. *Profilul real.* A₁.** **1.** a) $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$; b) $\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{2}x^4+x+C$; c) $\frac{1}{3}x^3+3x-\ln|x|+C$; d) $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}-2x\cdot\sqrt{x}+8\sqrt{x}+C$; e) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+2x+C$. **2.** a) $\frac{3}{2}x^2-5\sin x+e^x+C$; b) $2\ln|x|+\mathrm{tg}x-\frac{2}{3}\sqrt{x}+C$; c) $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$; d) $x+\cos x+C$; e) $2e^x-\frac{3}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}+C$. **3.** a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}+C$; b) $-e^{-x}+C$; c) $\frac{2x^2-12x-6}{3\sqrt{x}}+C$; d) $3x-\frac{2(1{,}5)^x}{\ln 1{,}5}+C$; e) $\mathrm{tg}\,x-x+C$; f) $x-\sin x+C$; g) $\cos x+\frac{3}{2}\arcsin x+C$; h) $\frac{2^x}{\ln 2}+2\sqrt{x}+C$. **4.** a) $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$; b) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}3x+C$; c) $\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+C$; d) $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$; e) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{2}+C$; f) $\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,x+x)+C$; g) $\mathrm{tg}\,x+C$; h) $C-\frac{4}{21}(8-3x)^{\frac{7}{4}}$; i) $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^4+1)^2}+C$; j) $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$; k) $C-\mathrm{tg}\,x-\mathrm{ctg}\,x$. **B₁.** **5.** $f(x)=\frac{5}{3}e^{3x}+\frac{7}{3}$. **6.** $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}$. **7.** $F(x)=\mathrm{tg}x-1$.
**8.** a) $x+\mathrm{arctg}\,x-\frac{10^{-x}}{\ln 10}+C$; b) $x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$; c) $\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\,x+C$; d) $\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}x+C$.

**C₁.** **9.** $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C, \text{ dacă } x\geq 1\\ -\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{3}+C, \text{ dacă } x<1,\ C\in\mathbb{R}.\end{cases}$ **10.** $F(x)=\frac{(2e)^x}{1+\ln 2}$. **11.** $F_1(x)=3\sqrt[3]{x}-1$, $F_2(x)=3\sqrt[3]{x}-2$, $F_1(x)-F_2(x)=1$. **12.** $s(t)=\frac{3}{4}(1+t)^{\frac{4}{3}}+C$; $s(7)=11{,}25$ m. **15.** a) $\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}$; b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-17$; c) $-2\sqrt{3-x}+9$.

**§2. *Profilul real.* A₁.** **1.** a) $\frac{1}{8}(2x+3)^4+C$; b) $C-\frac{(5-4x)^{2024}}{8096}$; c) $\frac{(3x+1)^{\pi+1}}{3\pi+3}+C$; d) $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{e^x}{3}+C$; e) $C-\frac{1}{\sin x}$; f) $2\sqrt{x^3-x^2+7x-2}+C$; g) $\frac{1}{12}\ln|12x+5|+C$; h) $-\frac{1}{3}e^{4-3x}+C$; i) $C-\frac{1}{12}\cos(12x+7)$; j) $\frac{3}{8}\ln(4x^2+5)+C$; k) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{\sqrt{2}}+C$; l) $\frac{\sqrt{15}}{30\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{15}}}{x+\sqrt{\frac{7}{15}}}\right|+C$; m) $\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+C$; n) $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$; o) $C-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{ctg}(3x+\frac{\pi}{4})$. **2.** a) $\frac{1}{9(1-3x)^3}+C$; b) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x-1)^2}+C$; c) $\frac{1}{6}\sqrt{(4x+3)^3}+C$; d) $-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(2-3x)^5}+C$; e) $-2\sqrt{\cos x}+C$; f) $\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3}+C$; g) $\ln(1+e^x)+C$; h) $\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C$; i) $\ln|\sin x|+C$. **B₁.** **3.** a) $2\ln(x^2+x+3)+C$; b) $\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$; c) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$; d) $\ln|1+\ln x|+C$; e) $\frac{(2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}}{4}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{2x-3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)+C$; f) $\frac{x}{2}\sqrt{9-4x^2}+\frac{9}{4}\arcsin\frac{2x}{3}+C$; g) $2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C$; h) $\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}}+C$; i) $\mathrm{arctg}e^x+C$; j) $\ln|\sin x-\cos x|+C$; k) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}^2x+C$; l) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C$. **4.** a) $e^{x^2+x+3}+C$; b) $-e^{-\sin x}+C$; c) $2e^{\sqrt{x}}+C$; d) $\frac{1}{2}\sin(x^2+x)+C$; e) $\cos\frac{1}{x}+C$; f) $\frac{1}{8}\ln(1+2x^4)+C$; g) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2+C$; h) $\frac{1}{3}\arcsin x^3+C$; i) $2\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C$; j) $\frac{1}{4}e^{2x^2+1}+C$; k) $-\frac{1}{3}\cos x^3+C$; l) $\frac{5}{6}e^{1+3x^2}+C$. **7.** $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{7\pi}{6}$.
**8.** $F\colon (0,\,2\pi)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$. **C₁.** **9.** a) $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$; b) $2(\sqrt{x}-\mathrm{arctg}\sqrt{x})+C$; c) $\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C$; d) $\ln\left(\frac{\sin x-3}{\sin x-2}\right)+C$; e) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{x^2+1}{2}+C$; f) $\frac{1}{15}\sqrt{(2x+1)^3}(3x-1)+C$; g) $-\frac{2}{27}(2+3x)\sqrt{1-3x}+C$; h) $-\frac{2}{15}\sqrt{1-x}(3x^2+4x+8)+C$; i) $-\frac{3}{2}(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|)+C$, unde $t=\sqrt{1-2x}$; j) $2t\left(\frac{t^2}{3}+\frac{t}{2}+1\right)+2\ln|t-1|+C$, unde $t=\sqrt{x}$; k) $\frac{1}{15}\sqrt{(5x^2-1)^3}+C$; l) $2(t-\mathrm{arctg}t)+C$, unde $t=\sqrt{e^x-1}$. **10.** a) $\frac{2}{125}(1+5x)^2\cdot\sqrt{1+5x}-\frac{2}{75}(1+5x)\cdot\sqrt{1+5x}+C$; b) $\ln|\sin^2x-4|+C$; c) $\frac{1}{36}t^3\left(\frac{t^2}{5}-\frac{1}{3}\right)+C$, unde $t=\sqrt{1+3x^8}$; d) $\arcsin^2(\sqrt{x})+C$; e) $\frac{1}{\sin x+\cos x}+C$; f) $\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}+C$.

**§ 3.** ***Profilul real.*** **A₁. 1.** a) $x\cdot\ln x - x + C$; b) $\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$; c) $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$; d) $\sin x - x\cos x + C$;
e) $\frac{6x-5}{2}\cdot e^{3x} + C$; f) $\frac{2^x}{\ln^2 2}(x\ln 2 - 1) + C$; g) $\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - x + C$; h) $(x-1)^2 e^x + C$; i) $(x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C$;
j) $\frac{x^4}{4}(\ln x - \frac{1}{4}) + C$; k) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}(\ln x - \frac{3}{4}) + C$; l) $-\frac{1}{x}(1+\ln x) + C$; m) $\frac{x^2}{2}(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}) + C$; n) $-2e^{-\frac{x}{2}}(x^2+4x+8) + C$;
o) $\frac{1}{4}(x^2 - x\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x) + C$. **B₁. 2.** a) $2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$; b) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$;
c) $x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$; d) $\frac{e^{3x}}{13}(\sin 2x - 5\cos 2x) + C$; e) $e^x(x^2-4x+3) + C$; f) $(x^2+3x+1)\sin x + (2x+3)\cos x + C$.
**3.** $x(t) = x_0 e^{-kt}$, unde $x_0 = x(0)$, $k \in \mathbb{R}_+$. **3.** a) $2e^{-\frac{x}{2}}(2x^2+11x+21) + C$; b) $\frac{9}{2}(x-2)\sin\frac{2x}{3} - \frac{3}{2}(x^2-4x+\frac{1}{2})\cos\frac{2x}{3} + C$;
c) $\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$; d) $\ln x - \frac{\arcsin x}{x} - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + C$; e) $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$;
f) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$. **C₁. 6.** a) $x\ln(2x+5) - x + \frac{5}{2}\ln(2x+5) + C$; b) $3(1-2x)\sin\frac{x}{3} - 18\cos\frac{x}{3} + C$;
c) $(x^2+x)\ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$; d) $\frac{x^3}{3}(\ln^3 x - \ln^2 x + \frac{2}{3}\ln x - \frac{2}{9}) + C$; e) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$;
f) $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1+x^2)} + C$. **7.** a) $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 6(x-2)\sin\sqrt{x} + C$; b) $x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$; c) $\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + C$;
d) $x\cdot\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2x + C$; e) $2e^t(t^3-3t^2+6t-6) + C$, unde $t=\sqrt{x}$; f) $\frac{1}{3}e^t(t^2-2t+2) + C$, unde $t = x^3$; g) $\frac{1}{8}(t^4-1)\operatorname{atctg} t - \frac{1}{8}(\frac{t^3}{3} - t) + C$, unde $t = x^2$; h) $(t^2+1)\operatorname{arctg}^2 t - 2t\operatorname{arctg} t + \ln(1+t^2) + C$, unde $t=\sqrt{x}$;
i) $\frac{4}{5}te^t(\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t) - \frac{2}{25}e^t(4\sin 2t - 3\cos 2t) + C$, unde $t = \sqrt{x}$.

## *Exerciții și probleme recapitulative*

***Profilul real.*** **A₁. 2.** a) $F(x) = -\frac{1}{6}(3+2x)^{-3} + C$; b) $F(x) = -\frac{10}{3}\sqrt{7-3x} + C$; c) $F(x) = -10\cos\frac{x}{5} + \frac{1}{2}\sin 6x + C$;
d) $F(x) = -\frac{4}{x+3} - \frac{7}{3}\operatorname{ctg} 3x + C$. **3.** a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$; b) $F(x) = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C$; c) $F(x) = -\ln|3-x| + C$;
d) $F(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$; e) $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{7}x^2\cdot\sqrt[3]{x} + 7x + C$; f) $F(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - 2\sin x + C$; g) $F(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\operatorname{arctg} x + C$;
h) $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{7}\operatorname{ctg} 7x + C$; i) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \ln|1-x| + C$; j) $F(x) = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x} - 12\sqrt[3]{x} + \frac{5}{9}x\cdot\sqrt[5]{x^4} + C$;
k) $F(x) = -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x}} - e^x + 3\ln|x| + C$. **4.** $-\frac{1}{2x^2} + 5$. **5.** $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 1$. **B₁. 6.** a) $F(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C$;
b) $F(x) = 3\ln|\ln x| + C$. **7.** a) $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$; b) $F(x) = -x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$;
c) $F(x) = -x^2\cdot\cos x + 2x\cdot\sin x + 2\cos x + C$; d) $F(x) = \frac{x^2}{2}\arccos x - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4}\arcsin x + C$;
e) $F(x) = \frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + C$; f) $F(x) = -\frac{x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x + C$. **8.** $y = \frac{x^2}{2} + C$, $y = \frac{x^2}{2}$. **9.** $y(t) = y_0\cdot e^{kt}$, $k > 0$.
**C₁. 11.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{4} + x - 1$. **12.** $y^2 = Cx$. **13.** Utilizați proprietatea lui Darboux.

## *Test sumativ*

***Profilul real.*** **2.** $\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$. **3.** a) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C$; b) $\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(x+1) + C$.
**4.** $-\frac{1}{17}$, $\frac{4}{17}$. **5.** $\left(8R + \frac{16}{3}a\right)$ m; $\left(R + \frac{a}{4}\right)$ m/s$^2$; $a, R \in \mathbb{R}_+$.

## Modulul 2. Integrale definite

**§1.** ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) 1; b) $\frac{5}{4}$; c) $\frac{2}{5}$; d) $-\frac{7}{6}$; e) $\frac{14}{3}$; f) 1; g) $\frac{4}{7}$; h) $-\frac{9}{2}$; i) $\frac{4}{3}$; j) 3. **2.** a) 4; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{12}$; d) –9; e) –2; f) –12. **3.** a) 2; b) ln3; c) $2+3\ln 2$; d) $1-2\ln 2$; e) $\frac{1}{4}(6-\ln 3)$; f) $-\frac{9}{2}+8\ln 2$; g) $\frac{5}{6}-\ln 2$; h) ln2; i) $\ln\frac{3}{8}$; j) $1-\ln 3$. **4.** a) 1; b) $e-e^{-1}$; c) $\frac{7}{8}$; d) $\frac{1}{2\ln 2}$; e) $\frac{15}{2\ln 3}$; f) 1; g) $-\frac{2}{3}$; h) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; i) 1; j) 3; k) $\frac{9}{2}$; l) $\frac{2}{3}$; m) $\pi$; n) 0; o) $\frac{1}{8}$; p) $\pi-2$. **5.** a) $3\frac{3}{4}$; b) $5\frac{1}{3}$; c) $\frac{7}{2\ln 2}$. **6.** a) 72 m²; b) 10,8 kg; c) 270 lei. **B₁.** **7.** a) $-3\frac{3}{4}$; b) $12\frac{2}{3}$; c) 2; d) $\frac{28}{15}$; e) $\frac{5}{4}$; f) $-\frac{5}{64}$; g) 4; h) $\frac{1}{5}$; i) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{1}{5}$; k) ln7; l) 2; m) $\frac{\pi^2}{18}$; n) $\frac{\pi^2}{72}$; o) $\frac{1}{2}$; p) $\frac{\pi}{2}$; q) $\frac{\pi}{48}$; r) $\frac{\pi}{3}$; s) $\frac{\pi}{6}$; t) ln2; u) $\frac{1}{2}\ln 3$; v) $\frac{\pi}{6}$; w) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln 3$; x) $\frac{2}{3}\ln 2$; y) $\frac{\pi}{4}$; z) $\frac{1}{2}\ln 3$. **8.** a) $\ln\frac{3}{2}$; b) $\frac{8}{3}-\ln 3$; c) 0; d) $\frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$; e) $2(1-\ln 3)$; f) $\frac{3\pi}{2}+2+2\ln 2$; g) $1-\ln 2$; h) $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{3}\ln 2$. **9.** a) $2\sqrt{2}$; b) $11\frac{1}{4}$; c) $2\frac{3}{4}$. **10.** a) $\frac{3175}{33}\approx 96{,}2$ m²; b) 10 583 m³; c) 52 916 lei. **C₁.** **11.** a) $\ln b-\ln a$; b) $\cos a-\cos b$; c) $e^b-e^a$.

**§2.** ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) $11\frac{2}{3}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $-\frac{1}{4}$; d) 24; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{4}{9}$; g) $\frac{13}{8}$; h) $35\frac{1}{2}$. **2.** a) $\frac{3}{2}-\ln 2$; b) 20,1; c) $9\frac{5}{6}+\ln 2$; d) 2; e) $\frac{4}{3}$; f) $\frac{1}{5}$; g) $\frac{68}{3}$; h) $58\frac{2}{3}$; i) 12; j) $\frac{68}{81}$; k) $e^3-2e^2+1$; l) $\frac{1}{2}(e^2-4-e^{-2})$; m) $\frac{2}{3}(e-e^{-1})$; n) $(e^2-e^{-2})^2$; o) $\frac{1}{2}(e^2-2e+3)$; p) $6\frac{1}{2}$; q) $\frac{5}{\ln 6}+\frac{1}{\ln 2}$; r) 1. **3.** a) $-1+\sqrt{3}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.** a) 2 m; b) 4 cm; c) 14 cm; d) $\frac{16}{75}$ m² $=2133\frac{1}{3}$ cm². **B₁.** **5.** a) $\frac{35}{6}$; b) 4; c) $\frac{19}{3}$; d) $-\frac{5}{12}$; e) 3; f) 30; g) 5; h) $2+\pi$; i) 4; j) $-1+\ln\frac{1+e^2}{2\sqrt{2}}$; k) 1; l) 3. **6.** a) 1; b) $\frac{5}{2}$; c) $\frac{5}{6}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 4; f) $8\frac{1}{6}$; g) $\frac{1}{2}$; h) 5; i) 8; j) $\frac{7}{2}$; k) $\frac{11}{4}$; l) $-1+6\ln\frac{3}{2}$; m) 2; n) $\frac{2}{e}(e-1)^2$; o) $\frac{4}{3\ln 3}$; p) $3-\frac{2}{\ln 2}$; q) $\frac{19}{6}$. **7.** a) +; b) –; c) +; d) –. **8.** a) $I_1>I_2$; b) $I_1<I_2$; c) $I_1<I_2$. **9.** a) $-\frac{2}{\pi}(1+\pi)$; b) $\frac{9}{8\ln 2}$. **10.** a) $f(t)=t^2-14t+124$; b) 111 lei şi 100 lei; c) iulie; d) 75 lei. **11.** a) $\sqrt[3]{10}$; b) $\pi$; c) $\pm\frac{\pi}{4}$; d) $\frac{1+\sqrt{28}}{3}$. **C₁.** **12.** 3.

**§3.** ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) –2; b) 1; c) $-2\pi$; d) $\frac{1}{9}(2e^3+1)$; e) $\frac{4}{3}\left(8\ln 2-\frac{7}{3}\right)$; f) $1-\frac{2}{e}$; g) $-\frac{1}{2}$; h) $-\frac{2}{e}$; i) $-\frac{5}{4}-e^3$; j) $2(3+4\pi)$; k) $-1+2\ln 2$; l) $2-\log_2 e$; m) –1; n) $(2-\log_2 e)\log_2 e$. **2.** a) $2\frac{2}{5}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{2}\ln 3$; d) $2\frac{8}{15}$; e) $\frac{1}{3\ln 2}$; f) $\frac{9}{14}$; g) 4; h) $3\sqrt{3}$. **B₁.** **3.** a) $-4+22\ln 2$; b) $1+2\ln 2$; c) $\frac{\pi}{2}-2+\ln 2$; d) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$; e) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$; f) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; g) $-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; h) $e^3$; i) $1-5e^{-2}$; j) $-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$; k) $\frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{e^2}\right)$; l) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{7\pi}{36}\right)$; m) $-2(3+e)$; n) $\frac{2}{e}(3e-8)$; o) $-1-\frac{5}{8}e$; p) $-\frac{8}{\pi}\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)$; q) $\frac{1}{8}(\pi^2-2\pi-4)$; r) $-\frac{1}{2}(1+e^{\pi})$; s) $e^2$; t) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}$. **4.** a) $x=t^2$, $2(2-\ln 2)$; b) $x=t^3$, $\frac{5}{2}-3\ln 2$; c) $x=t^6$, $4\left(5+12\ln\frac{3}{4}\right)$; d) $t=\sqrt{2-x}$, $\frac{142}{105}$; e) $t=\sqrt[3]{1-2x}$, $\frac{3}{14}$; f) $t=x^3$, $\frac{\pi}{12}$; g) $t=1+x^3$, $\frac{52}{9}$; h) $t=1+3x^5$, $\frac{116}{675}$; i) $t=\cos x$, $\frac{1}{4}$; j) $t=\sin x$, $\frac{7}{3}$; k) $t=\sin x$, $\frac{8}{15}$; l) $t=\cos x$, $\frac{2}{35}$; m) $t=\sin^2 x$, $\frac{1}{24}$; n) $t=\ln x$, $\frac{3}{8}$; o) $t=\ln(\ln x)$, $-\ln 2$; p) $t=\sin x+\cos x$, $\frac{1}{2}\ln 2$; q) $t=\sin x+\cos$, $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$; r) $t=\sin x$, $\frac{1}{3}(4-\sqrt{2})$. **5.** a) $2-\frac{\pi}{2}$; b) $2+\ln\frac{3}{2}$; c) $4\sqrt{2}+6$; d) $\ln\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{16}$; f) $\frac{\pi}{16}$; g) $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$; h) $\ln\frac{2e}{e+1}$. **6.** a) 800 m şi 42,6 m; b) 32 m; c) $\frac{192}{39}$ u.p., $\approx 49230$ m²; d) 147692 m³. **C₁.** **9.** $\left(-\frac{5}{6},-\frac{1}{12}\right)$ este punct de minim local.

### *Exerciţii şi probleme recapitulative*

***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) $-\frac{33}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 7; d) $-58\frac{1}{3}$; e) 8; f) $21\frac{1}{3}$; g) 2; h) $\frac{1}{3}(9-4\sqrt{3})$. **2.** a) $\frac{3}{2}$; b) $4\frac{2}{3}$; c) 2. **3.** $\frac{1+\sqrt{61}}{2}$, 3000 m², 34 m. **B₁.** **4.** a) $-6\frac{2}{3}$; b) –27; c) $2\left(\ln 2-\frac{26}{81}\right)$; d) 65; e) $2\sqrt{3}-\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{8}(7-2\sqrt{3})$; g) $-\frac{506}{375}$; h) $\frac{51}{10}$;

i) $\frac{182}{33}$; j) $\frac{1}{3}$; k) $-\frac{1}{9}(2e^3+1)$; l) $\frac{1}{16}(3e^4+1)$; m) $\frac{1}{2}e^2$; n) $-\frac{4}{\pi^2}$; o) $\frac{13}{3}$; p) 5; q) $\frac{4}{3}$. **5.** a) $6\frac{11}{12}$; b) $\frac{\pi}{8}+\ln(2+\sqrt{3})$. **6.** a) $10\frac{2}{3}$ m$^2$; b) 96 m$^3$. **7.** a) 2 m, 3 m, 5 m; b) $8\frac{2}{15}$ m$^2$; c) 109,8 m$^2$; d) 54 900 lei. **C₁.** **10.** $3-e$.

***Test sumativ***

***Profilul real.*** **1.** $\left(\frac{x^4}{4}-\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\Big|_0^1=\frac{3}{4}$. **2.** A. **3.** a) –3; b) $-\frac{13}{2}+2\ln 2$. **4.** a) $\frac{1}{4}$; b) $1-\frac{1}{2}e^2$. **5.** a) $\frac{48}{5}$; b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **6.** a) $107\frac{49}{93}$ m$^2$ $\approx 107{,}5$ m$^2$; b) 160 m$^3$ – 215 m$^3$.

## Modulul 3. Aplicații ale integralelor definite

**§ 1.** ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) $\frac{10}{3}$; b) $\frac{\pi^2}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) $3(e^\pi-1)$; f) 7; g) $\frac{4}{3}$. **2.** a) $\frac{256}{3}$; b) $\frac{32}{5}$; c) $\frac{64}{3}$; d) $\frac{125}{6}$; e) $\frac{1}{2}(e^2+2e^{-1}-3)$; f) 1. **3.** $a=\sqrt{17}-3$. **4.** 14. **B₁.** **6.** $e-2$. **8.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-\ln 2$; c) $\frac{8}{\ln 3}-2$. **9.** *Indicație*. Dacă $0<a\le 1$, atunci cele două mulțimi de puncte au ariile $2\left(a^2-\frac{a^3}{3}\right)$ și $2\left(a^2+\frac{a^3}{3}\right)$ și aceste arii nu pot fi egale. Dacă $a>1$, atunci mulțimea situată deasupra axei $Ox$ va avea aria numeric egală cu $2\int_0^{\sqrt{a}}(a-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a\sqrt{a}$, iar cealaltă mulțime va avea aria $4a^2-\frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Din nou, cele două arii nu pot fi egale. **10.** c) $\approx 713$ m$^2$ $=7{,}13$ ari; d) $\approx 213{,}9$ mii lei. **11.** $2\sqrt{2}$ dm². **12.** 2. **13.** $a=3$. **14.** $8-6e^{-\frac{1}{2}}-2e^{\frac{1}{2}}$. **15.** $m=2-\sqrt[3]{4}$. *Indicație*. Fie $\mathcal{A}_1$ aria subgraficului funcției $f$, iar $\mathcal{A}_2$ – aria mulțimii cuprinse între curbele de ecuație $f(x)=2x-x^2$ și $y=mx$ $(0<m<2)$, $x\in[0,\,2-m]$. Este necesar ca $\mathcal{A}_2=\frac{\mathcal{A}_1}{2}$. **17.** $\mathcal{A}_1=\frac{12\sqrt{6}-8}{3}$, $\mathcal{A}_2=\frac{35-12\sqrt{6}}{3}$. **C₁.** **17.** a) $\left(\frac{e^2+1}{2(e^2-1)},\ \frac{e^2+1}{4}\right)$; b) $\left(1,\ \frac{\pi}{8}\right)$; c) $\left(-\frac{5}{4},\ \frac{11}{10}\right)$. **19.** ln2.

**§ 2.** ***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) $\frac{\pi^2}{4}$; b) $\frac{\pi}{10}$; c) $\pi$; d) $\frac{3\pi}{4}$; e) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)$; f) $\frac{17\pi}{6}+4$; g) $\frac{\pi}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$; h) $\frac{92\pi}{5}$; i) $\frac{\pi}{4}(1-e^{-8})$; j) $\frac{\pi}{3}$. **2.** *Indicație*. Notați $n\cdot\arccos x=t\Rightarrow x=\cos\frac{t}{n}$. Atunci, $\mathcal{V}=\pi\left(1+\frac{1}{1-4n^2}\right)$. Cum $\mathcal{V}=\frac{2\pi}{3}$, rezultă că $n=1$. **3.** a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $\frac{28\pi}{15}$; c) $\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$. **B₁.** **4.** d) $\frac{148}{3}\pi$. **5.** $\mathcal{V}=\pi a^2\left(\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12}\right)$. **6.** $\mathcal{V}=\frac{\pi}{27}(5e^3-2)$. *Indicație*. Calculați integrala $\int x^2\ln^2 x\,\mathrm{d}x$ prin părți. **C₁.** **7.** b) $\frac{\pi}{2}(2+4e^{-1}-3e^{-2}-e^{-4})$; c) $1+e^e-e$. **8.** b) $2e-1$; c) $\frac{\pi}{2}(3e^2-2e-1)$.

***Exerciții și probleme recapitulative***

***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) 1; f) $\frac{1}{2}\ln 3$; g) $\frac{1}{2}$; h) 1. **3.** a) 2; b) $e^2-3$; c) $\log_2 e-\frac{1}{3}$. **5.** c) $\frac{8}{3}$. **B₁.** **7.** a) $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$; b) $a=\frac{9}{2}$. **8.** $m=\frac{7}{6}$. **9.** 10,25 ari; 307,5 mii lei. **10.** $a=1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. **11.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2}(2+\pi)$; c) $3\pi$; d) $\frac{38\pi}{15}$. **12.** $\left(e-2,\ \frac{e^2-1}{8}\right)$ **13.** $2\frac{1}{4}$. **14.** $a=4$. **15.** 0,75. **16.** 4,5. **17.** $59\frac{1}{3}$ u.l. **18.** $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5\pi}{3}\right\}$. **19.** $V=\pi(7{,}5-8\ln 2)$. **20.** $(4+\pi^2)$. **C₁.** **22.** $a=\frac{2}{3}$. **23.** $\mathcal{A}(\lambda)=1-(1+\lambda)e^{-\lambda}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)=1$. **24.** $\frac{1}{2}$. **25.** $\pi\left(\frac{a^2}{2}\pi+4ab+\pi b^2\right)$.

***Test sumativ***

***Profilul real.*** **2.** a) $4\sqrt{3}$; b) $\frac{32}{3}$. **3.** $n=1$. **4.** a) $\frac{\pi^2}{4}$; b) $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. **5.** $\approx 1{,}717\,\pi$.

## Modulul 4. Elemente de combinatorică. Binomul lui Newton

**§ 1.** ***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A.** **3.** a) Expresia $A_3^6$ nu are sens. **4.** a) 5; b) 25 200; c) $\frac{7}{144}$; d) 336; e) 576; f) 12; g) nu are sens. **B.** **7.** 16 submulțimi. **9.** 12 650 moduri. **10.** 4 368 de moduri. **11.** 306 partide. **12.** 20 de moduri. **13.** 40 320 de moduri. **14.** 210 moduri. **15.** a) 720 de „termeni”. **16.** 5 040 de moduri. **17.** 56 de moduri. **18.** 8 008 moduri. **C.** **19.** a) 210 de moduri; b) 301 de moduri.

***Profilul real.* A₁.** **2.** a) 5 544; b) 45 035; c) $40\frac{5}{6}$. **3.** a) $S=\{4\}$; b) $S=\{25\}$; c) $S=\{6\}$. **4.** a) $S=\{3, 4, 5, 6\}$; b) $S=\{2, 3, 4\}$; c) $S=\{4, 5, 6, 7\}$. **5.** a) 180; b) 10 160 640; c) 4 651 520; d) 6721; e) $\frac{27}{67320}$. **7.** a) $S=\{2\}$; b) $S=\{4\}$; c) $S=\{6, 11\}$; d) $S=\{2\}$. **B₁.** **9.** a) $S=\{5\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{2\}$. **10.** a) $n\in[6, +\infty)$, $n\in\mathbb{N}$; b) $n\in[1, 4]$, $n\in\mathbb{N}$; c) $n\in[0, 9]$, $n\in\mathbb{N}$. **11.** a) $x=6$, $y\in[0, 10]$, $y\in\mathbb{N}$; b) $x=12$, $y\in[0, 12]$, $y\in\mathbb{N}$; c) $S=\varnothing$. **12.** 12 moduri. **13.** $C_4^2=6$. **16.** $C_8^6\cdot A_9^6=1\,693\,440$ (moduri). **17.** $C_2^1\cdot C_{23}^{10}=2\,288\,132$ (moduri). **18.** $C_7^3\cdot C_9^3=2\,940$ (moduri). **19.** *Indicație*. Aplicați algoritmul folosit la rezolvarea pr. 7 din secvența 1.5.2. **20.** $C_{10}^3\cdot C_6^2$ moduri. **21.** $(C_3^1\cdot C_{10}^4+C_3^2\cdot C_{10}^3)$ moduri. **22.** a) $S=\{x\,|\,x\in(4, +\infty),\ x\in\mathbb{N}\}$; b) $S=\{3, 4, 5\}$; c) $x\in[4, 13]$, $n\in\mathbb{N}$; d) $x\in[6, 11]$, $n\in\mathbb{N}$. **23.** Numere cu cinci cifre distincte sunt $A_5^5-A_4^4=96$; numere cu patru cifre distincte sunt $A_5^4-A_4^3=96$; numere cu trei cifre distincte sunt $A_5^3-A_4^2=48$; numere cu două cifre distincte sunt $A_5^2-A_4^1=16$; numere cu o cifră sunt 5. În total sunt 261 numere. **24.** $(n-2)\cdot 2^{n-1}+1$.

**§ 2. *Profilul real.* A₁.** **1.** b) $6561a^8+17496a^7b+20412a^6b^2+13608a^5b^3+5670a^4b^4+1\,512a^3b^5+252a^2b^6+24ab^7+b^8$; c) $a^3+6a^2\sqrt{ab}+15a^2b+20ab\sqrt{ab}+15ab^2+6b^2\sqrt{ab}+b^3$. **2.** b) $a\cdot\sqrt[3]{a^2}-5ab\cdot\sqrt[3]{a}+10ab^2-10b^3\cdot\sqrt[3]{a^2}+5b^4\cdot\sqrt[3]{a}-b^5$; c) $\frac{1}{x^3\cdot\sqrt{x}}-\frac{7}{x^3\cdot\sqrt{y}}+\frac{21}{x^2y\cdot\sqrt{x}}-\frac{35}{x^2y\cdot\sqrt{y}}+\frac{35}{xy^2\cdot\sqrt{x}}-\frac{21}{xy^2\cdot\sqrt{y}}+\frac{7}{y^3\cdot\sqrt{y}}-\frac{1}{y^3\cdot\sqrt{y}}$. **3.** a) $T_5=39191040x^6$; b) $T_7=5376xy^3\cdot\sqrt{x}$; c) $T_{10}=-4330260a^2b^9$. **4.** a) $2^{25}$; b) $2^{108}$; c) $2^{215}$; d) $2^{71}$. **B₁.** **6.** a) $2^{14}$; b) $2^{24}$; c) $2^{27}$; d) $2^{31}$. **7.** *Indicație*. Aplicați metoda inducției matematice și binomul lui Newton. **8.** a) $T_5=29120x^{10}$; b) $T_9=329\,472\,x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot a^4$; c) $T_7=593\,775$. **9.** a) $T_9=3294720x^{16}y^{32}$; c) $T_8=-3\,432x^{21}y^{14}$. **10.** a) $T_{13}=5200300x^{13}y^{36}$, $T_{14}=-5200300x^{12}y^{39}$; b) $T_7=1716a^3b^3\cdot\sqrt{a}$, $T_8=1716a^3b^3\cdot\sqrt{b}$. **12.** $T_3=612a^{14}$. **14.** $n=11$. **15.** $10^{-4}$ și 10. **16.** $T_4=-\frac{5xy\sqrt{x}}{54}$. **17.** a) *Indicație*. În formula lui Newton înlocuiți $x^2$ și $y^2$ cu 1; b) *Indicație*. În formula lui Newton înlocuiți $x$ și $y^3$ cu 1. **18.** a) $T_{15}=3876\,000$. **19.** $T_6=56x^{-\frac{1}{4}}$. **20.** $n=8$. **21.** $T_7=924x^9$. **22.** 3360. **23.** $T_5=70a^3$.

### *Exerciții și probleme recapitulative*

***Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **1.** a) 15; b) $19\frac{1}{6}$; c) 1; d) 100. **2.** a) $\frac{1}{2}$; b) 15; c) 576; d) 800. **3.** 552 de fotografii. **4.** 91 de partide. **5.** 27 907 200 de moduri. **6.** 479 001 600 de moduri. **7.** a) 1 680 de moduri; b) $4\cdot A_7^3=840$ (moduri). **8.** 20 160 de moduri. **9.** 40 320 de moduri. **B.** **10.** a) $C_{12}^5\cdot C_3^1=2\,376$ (moduri); b) 2 376 de moduri; c) 792 de moduri; d) 5 544 de moduri. **C.** **12.** $P(A)=\frac{2}{15}$; $P(B)=\frac{1}{3}$; $P(C)=\frac{7}{15}$.

***Profilul real.* A₁.** **1.** 7 elemente. **2.** a) 5 040 de moduri; b) $(n-1)!$. **3.** $9\cdot 9!$ numere. **4.** *Indicație*. $C_{10}^4\cdot C_5^2+C_{10}^3\cdot C_5^3+C_{10}^2\cdot C_5^4+C_{10}^1\cdot C_5^5$. **5.** 261 de numere. **6.** a) $S=\{8\}$; b) $S=\{7\}$; c) $S=\{8\}$; d) $S=\{2\}$. **B₁.** **15.** a) $S=\{6, 7, 8, \ldots\}$; b) $S=\{0, 1, 2, 3, \ldots, 16\}$; c) $S=\{8, 9, 10\}$. **16.** a) $n=8$; b) $n=9$; c) $n=12$; d) $n=7$. **17.** $T_7=54\,264$. **18.** $x=27$. **19.** $T_4=2300a^{10}$. **20.** a) Un singur termen rațional; b) 17 termeni raționali. **22.** *Indicație*. Aplicați metoda inducției matematice. **C₁.** **37.** $S=\{(2; 1)\}$. **38.** *Indicație*. Aplicați metoda inducției matematice.

### *Test sumativ*

***Profilurile umanist, arte, sport.*** **2.** 12 650 de moduri. **4.** a) 5 005 de moduri; b) 9 009 de moduri.

***Profilul real.*** **1.** a) A; b) 32. **2.** $S=\{2\}$. **3.** 3 118 752 de moduri. **4.** $S=\{4, 5, 6, 7, \ldots, 49\}$. **5.** $n=20$.

## Modulul 5. Elemente de teoria probabilităților

**§ 1. *Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **1.** Da. **2.** 0,1. **B.** **3.** 5 albe, 20 negre. **4.** $\frac{1}{9}$. **5.** $\frac{1}{4}$. **C.** **6.** a) $P(A)=\frac{1}{56}$; b) $P(B)=\frac{11}{56}$; c) $P(C)=\frac{15}{56}$; d) $P(D)=\frac{45}{56}$. **7.** a) $P(A)=\frac{1}{24}$; b) $P(B)=\frac{1}{4}$; c) $P(C)=\frac{1}{12}$. **8.** 0,6.

***Profilul real.* A₁.** **1.** $B_1$ și $B_2$; $B_2$ și $B_3$; $A_1$ și $B_1$. **2.** a) $P(A)=\frac{1}{2}$; b) $P(B)=\frac{2}{5}$; c) $P(C)=\frac{4}{5}$. **B₁.** **3.** $\frac{3}{7}$. **4.** a) $P(A)=\frac{C_8^2\cdot C_{88}^{10}}{C_{96}^{12}}$; b) $P(B)=\frac{C_{96}^{12}-(C_8^0C_{88}^{12}+C_8^1C_{88}^{11}+C_8^2C_{88}^{10})}{C_{96}^{12}}$. **5.** $\approx 0{,}0167$. **C₁.** **6.** a) $P(A_1)=\frac{1}{9}$; b) $P(A_2)=\frac{5}{18}$; c) $P(A_3)=\frac{1}{3}$. **7.** 0,2.

**§ 2. *Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **2.** $\frac{1}{4}$. **3.** Suma de 7 puncte. **B.** **4.** $\frac{2}{5}$. **5.** 0,31. **6.** 0,13. **C.** **7.** $B=A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3$; $C=B\cup A_1\cap A_2\cap A_3$; $D=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3\cup B$. **8.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$.

***Profilul real.*** **A₁.** **1.** Evenimentele elementare sunt perechi ordonate: $E=\{11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44\}$; a) $A=\{33, 34, 43\}$; b) $B=\{13, 23, 31, 32, 33\}$. **2.** a) 0,5; b) 0,6; c) 0,7; d) 0,1; e) 0,9; f) 0,8. **B₁.** **3.** 0,33. **4.** $\frac{163}{165}$. *Indicație*. Aplicați formula $P(A)=1-P(\overline{A})$, unde $A=\{$sunt scoase bile de cel puțin două culori$\}$, $\overline{A}=\{$sunt scoase bile de o singură culoare$\}$. **6.** 12 fete. **7.** $\frac{1}{10}$. **C₁.** **8.** $\frac{7}{9}$. **9.** $\frac{3}{7}$. **10.** a) $\frac{91}{216}$.

***§ 3. Profilurile umanist, arte, sport.*** **A.** **2.** 0,95. **B.** **3.** $A$ și $B$. **C.** **4.** *Indicație*. Aplicați definiția independenței a două evenimente aleatoare; să se observe că $A\cap B=\{$cad 4 puncte$\}$. **5.** Sunt independente.

***Profilul real.*** **A₁.** **2.** a) $\frac{8}{81}$; b) $\frac{17}{81}$. **B₁.** **3.** a) 0,243; b) 0,972. **4.** Sunt dependente. **C₁.** **5.** 0,52. **6.** a) $\frac{21}{32}$; b) $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$.

***§ 4. Profilul real.*** **A₁.** **1.**

| $\xi$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***P*** | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

$M(\xi)=7$.

**2.**

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| ***P*** | $\frac{1}{56}$ | $\frac{15}{56}$ | $\frac{30}{56}$ | $\frac{10}{56}$ |

$M(\xi)=1{,}875$. **B₁.** **3.** $P(\xi=i)=\frac{1}{5}$, $i=\overline{1,5}$; $M(\xi)=3$.

**4.**

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***P*** | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,0625 | 0,0625 |

$M(\xi)=0{,}9375$.

*Indicație*. $P(\xi=0)=P\,$(primul semafor nu permite trecerea)$=\frac{1}{2}$; dacă $1\le i\le 4$, atunci $P(\xi=i)=P(A\cap B)$, unde $A$ și $B$ sunt evenimente aleatoare independente: $A$ = {primele $i$ semafoare permit trecerea}, $B$ = {semaforul $i$ + 1 nu permite trecerea}; $\{\xi=5\}=\{$toate semafoarele permit trecerea$\}$. **C₁.** **6.**

| $\xi$ | –3 | –1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| ***P*** | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

$M(\xi)=0$.

## *Exerciții și probleme recapitulative*

***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A.** **1.** a) Compatibile: $A_1$ și $A_3$; $A_1$ și $A_4$; $A_2$ și $A_4$; incompatibile: $A_2$ și $A_3$; $\overline{A}_3$ și $A_4$; b) $A_2\cap A_3=\varnothing$ – eveniment imposibil; $A_3\cap A_4=\{$se extrag o bilă neagră și 3 bile roșii$\}$. **2.** a) $P(A)=\frac{5}{12}$; b) $P(B)=\frac{1}{6}$. **B.** **3.** 0,2. **4.** Sunt dependente. **5.** $P=\frac{2}{5}$. **6.** $P=\frac{36}{125}$. **C.** **7.** Probabilitatea că printre $k$ pasageri luați la întâmplare se află cel puțin un infractor este mai mică decât 0,5, dacă $k\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$; pentru $k=6$ această probabilitate este mai mare decât 0,5. **8.** $\frac{91}{350}$. **9.** $P(A)=\frac{8}{15}$, $P(B)=\frac{1}{15}$.

***Profilul real.*** **A₁.** **1.** a) Compatibile, dependente; b) incompatibile, dependente; c) compatibile. **2.** 0,3.
**B₁.** **3.** $P(A)=\frac{9}{14}$, $P(B)=\frac{5}{14}$. **4.** $2\frac{1}{3}$. **5.** a) $P(A)\approx 0{,}273$; b) $P(B)\approx 0{,}085$; c) $P(C)\approx 0{,}064$. *Indicație*. Aplicați schema: din urna ce conține 3 bile numerotate cu 1, 2, 3 se extrage de 9 ori câte o bilă cu repunerea bilei extrase în urnă. **6.** $P=\frac{89}{495}$. **7.** $P=\frac{6}{11}$. **8.** $P=\frac{5}{648}$. **C₁.** **9.** 0,995. *Indicație*. Introduceți evenimentele: $A_1=\{$prima mașină nu se defectează$\}$; $A_2=\{$a doua mașină nu se defectează$\}$. Reuniunea $A_1\cup A_2$ reprezintă evenimentul că cel puțin una dintre mașini funcționează fără defecțiuni în decursul schimbului. Se cere să calculați probabilitatea $P(A_1\cup A_2)$. **10.** 0,38.

**11.** a)

| $\xi$ | 12 | 0 | –5 | –6 |
|---|---|---|---|---|
| ***P*** | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{6}$ |

$M(\xi)=-\frac{11}{6}$. *Indicație*. Valorile posibile ale lui $\xi$ sunt $12(=18-6)$, $0(=6-6)$, $-5(=1-6)$, $-6(=0-6)$.

b) $\frac{2}{6}$. *Indicație*. Două partide pot fi jucate în cazul în care cad 6 puncte sau 5 puncte.

## *Test sumativ*

***Profilurile umanist, arte, sport.*** **2.** 0,8. **4.** $P(A)\approx 0{,}44$; $P(B)\approx 0{,}78$.

***Profilul real.*** **1.** a) $P(A)=\frac{3}{5}$; $P(B)=\frac{1}{3}$. **2.** $P(A_1)\approx 0{,}05$; $P(A_2)\approx 0{,}46$; $P(A_3)\approx 0{,}04$. **3.** a) $P(A)=\frac{3}{10}$; b) $P(B)=\frac{6}{10}$; c) $P(A\cup B)=\frac{8}{10}$. **4.**

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***P*** | $\frac{1}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

$M(\xi)=2$.

# Modulul 6. Elemente de statistică matematică și de calcul financiar

## § 2. *Profilurile umanist, arte, sport.* A.

**1.**

| Intervale ($t$) | Frecvența absolută ($n_i$) | Frecvența relativă ($f_i$) |
|---|---|---|
| [36,5; 36,6) | 2 | 0,14 |
| [36,6; 36,7) | 4 | 0,28 |
| [36,7; 36,8) | 3 | 0,22 |
| [36,8; 36,9) | 3 | 0,22 |
| [36,9; 37,0] | 2 | 0,14 |
| Total | 14 | 1,00 |

**2.** a) Mulțimea apartamentelor blocului de locuit; consumul lunar de energie electrică al unui apartament;

b)

| Limitele intervalului | Frecvența ($n_i$) |
|---|---|
| [0, 10) | 4 |
| [10, 20) | 7 |
| [20, 30) | 6 |
| [30, 40) | 3 |
| [40, 50) | 4 |
| [50, 60) | 6 |
| [60, 70) | 4 |
| [70, 80) | 4 |
| [80, 90) | 6 |
| [90, 100] | 6 |
| Total | 50 |

**B. 3.** a) Jucătorii (care formează echipa); b) înălțimea jucătorului. **4.** 60.

**C. 5.**

| Litera | Frecvența absolută ($n_i$) | Frecvența relativă ($f_i$) | Frecvența relativă cumulată ($F_i$) |
|---|---|---|---|
| *a* | 21 | 0,28 | 0,28 |
| *e* | 16 | 0,21 | 0,49 |
| *i* | 17 | 0,23 | 0,72 |
| *o* | 3 | 0,04 | 0,76 |
| *u* | 10 | 0,13 | 0,89 |
| *ă* | 8 | 0,11 | 1,00 |
| Total | 75 | 1 | |

***Profilul real.* A₁.** **1.** 6. **2.** a) Ceasurile expuse; ora indicată de un ceas;

b)

| Limitele intervalului | Frecvența ($n_i$) |
|---|---|
| [0; 1) | 5 |
| [1; 2) | 3 |
| [2; 3) | 6 |
| [3; 4) | 4 |
| [4; 5) | 6 |
| [5; 6) | 3 |
| [6; 7) | 4 |
| [7; 8) | 3 |
| [8; 9) | 3 |
| [9; 10) | 4 |
| [10; 11) | 5 |
| [11; 12] | 4 |
| Total | 50 |

**B₁. 3.** a) Producția fabricii de conserve (în borcane); b) masa conținutului unui borcan; caracteristică cantitativă continuă; c) 16%.

**4.**

| Vârsta (ani) | Frecvența absolută ($n_i$) | Frecvența relativă ($f_i$) | Frecvența relativă cumulată ($F_i$) |
|---|---|---|---|
| [31; 39) | 11 | 0,28 | 0,28 |
| [39; 47) | 15 | 0,38 | 0,66 |
| [47; 55) | 5 | 0,13 | 0,79 |
| [55; 63) | 7 | 0,18 | 0,97 |
| [63; 71) | 0 | 0,00 | 0,97 |
| [71; 79] | 1 | 0,03 | 1,00 |
| Total | 39 | 1 | |

**C₁. 5.** a)

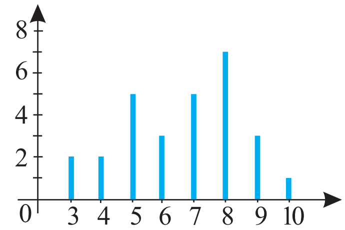
| Masa (kg) | [2,0; 2,4) | [2,4; 2,8) | [2,8; 3,2) | [3,2; 3,6) | [3,6; 4,0) | [4,0; 4,4) | [4,4; 4,8) | [4,8; 5,2] | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nou-născuți ($n_i$) | 3 | 8 | 10 | 12 | 13 | 6 | 2 | 2 | 56 |
| Frecvența absolută cumulată ($F_i$) | 3 | 11 | 21 | 33 | 46 | 52 | 54 | 56 | 56 |
| Frecvența relativă ($f_i$) | 0,05 | 0,14 | 0,18 | 0,21 | 0,23 | 0,11 | 0,04 | 0,04 | 1 |
| Frecvența relativă cumulată | 0,05 | 0,19 | 0,37 | 0,58 | 0,81 | 0,92 | 0,96 | 1,00 | 1 |

b)

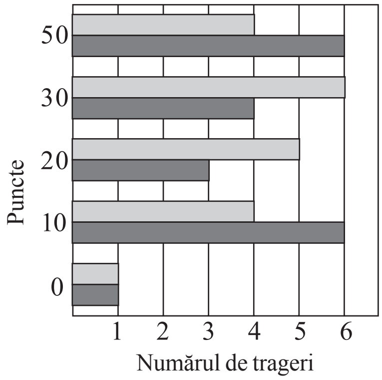
| Masa (kg) | [2,0; 2,6) | [2,6; 3,2) | [3,2; 3,8) | [3,8; 4,4) | [4,4; 5,0) | [5,0; 5,6) | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nou-născuți ($n_i$) | 7 | 14 | 17 | 14 | 3 | 1 | 56 |

## § 3. *Profilurile umanist, arte, sport.*

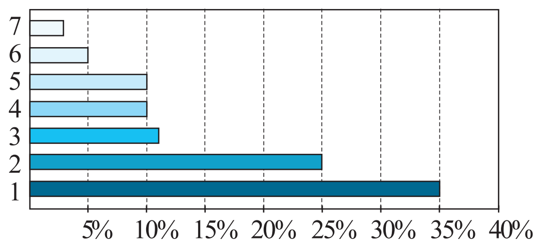
**A. 1.**




**2.**



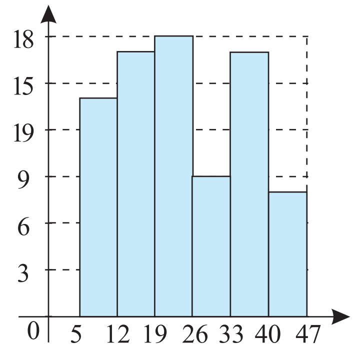

**B. 4.**




**5.** a)

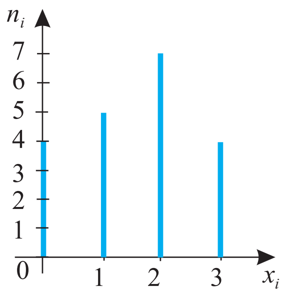
| Limitele intervalului | Frecvența absolută ($n_i$) |
|---|---|
| [5; 12) | 14 |
| [12; 19) | 17 |
| [19; 26) | 18 |
| [26; 33) | 9 |
| [33; 40) | 14 |
| [40; 47] | 8 |
| Total | 80 |

b)

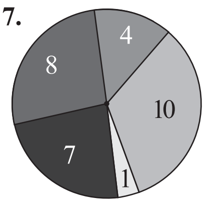



**C. 6.**

| $x_i$ | $n_i$ | Frecvența absolută cumulată | Frecvența relativă $f_i$ | Frecvența relativă cumulată |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 4 | 0,20 | 0,20 |
| 1 | 5 | 9 | 0,25 | 0,45 |
| 2 | 7 | 16 | 0,35 | 0,80 |
| 3 | 4 | 20 | 0,20 | 1,00 |




**7.**



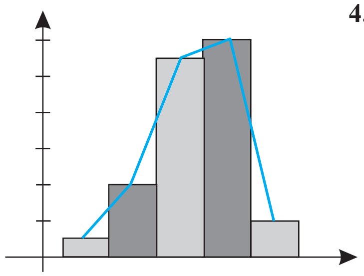

**8.**

| $x_i$ | $n_i$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 3 | 3 |
| 4 | 2 |
| 6 | 4 |
| 7 | 1 |
| **Total** | **12** |

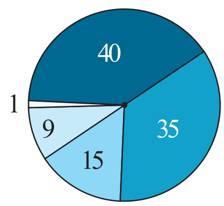
***Profilul real.* B₁. 3.** a)

| Coeficientul (Δ) | Numărul elevilor ($n_i$) |
|---|---|
| [75; 85) | 1 |
| [85; 95) | 4 |
| [95; 105) | 11 |
| [105; 115) | 12 |
| [115; 125) | 2 |
| Total | 30 |

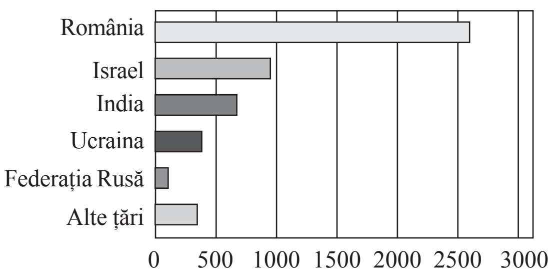
b)



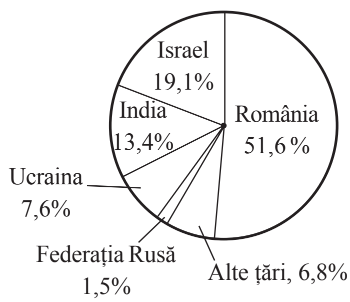
**4.**



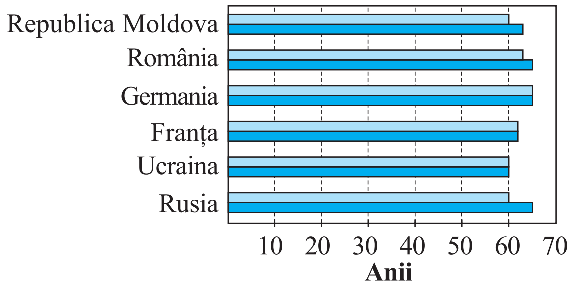

**5.**
a)




b)



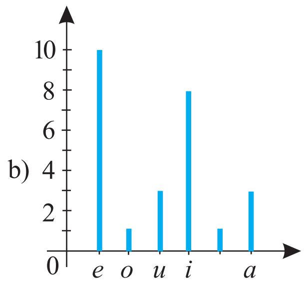
**C₁. 7.**



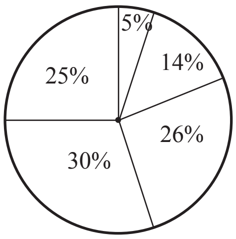

**8.** a)

| Litera | e | l | m | n | t | p | o | u | ț | i | s | c | ă | a | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(n_i)$ | 10 | 3 | 2 | 3 | 8 | 2 | 1 | 3 | 2 | 8 | 6 | 3 | 1 | 3 | 55 |
| $(f_i)$ | 18,2 | 5,5 | 3,6 | 5,5 | 14,6 | 3,6 | 1,8 | 5,5 | 3,6 | 14,6 | 10,9 | 5,5 | 1,8 | 5,5 | 100,2 |

b)




**9.** a)




b) $[0, 20) - 18\% \, (\frac{5 \cdot 360°}{100} = 18°)$;

$[20, 30) - 50{,}4\%$;

$[30, 40) - 93{,}6\%$;

$[40, 50) - 108\%$;

$\geq 50 \; - 90\%$.

**10.**

| Intervalele $\Delta$ | Frecvența absolută $(n_i)$ |
|---|---|
| [2; 5) | 8 |
| [5; 8) | 4 |
| [8; 11) | 6 |
| [11; 14] | 2 |
| Total | 20 |

Nu este unică.

**§ 4.** ***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A. 1.** $\bar{x} \approx 4{,}23$; $Me = 4$; $Mo = 1$, $Mo = 5$ (seria este bimodală). **2.** $\approx 160{,}06$ cm. **B. 3.** a) $\bar{x} = 284$; b) vineri. **4.** $\bar{x} \approx 20{,}19$; $Me \approx 21{,}18$; $Mo = 24$. **5.** La matematică, deoarece $\bar{x}(M) > \bar{x}(F)$, $M_e(M) > M_e(F)$, $M_0(M) = M_0(F)$. **C. 7.** a) $\bar{x} \approx 21{,}525$ cm; $Me = 21{,}5$ cm; $Mo = 21{,}5$ cm; b) 51,67%.

***Profilul real.*** **A₁. 1.** $\bar{x} = 57{,}6$; $Me \approx 61{,}15$; $Mo \approx 69{,}76$. **2.** b) $\bar{x} \approx 163{,}17$; $Me \approx 163{,}48$; $Mo \approx 164{,}10$. **3.** În situația dată mai trebuie comparate și celelalte mărimi medii ale seriilor statistice. **B₁. 4.** $\bar{x} \approx 18{,}68$; $Me \approx 18{,}82$; $Mo = 18{,}5$. **5.** a) $\bar{x} \approx 56{,}55$; $Me \approx 53{,}5$; $Mo = 35$; b) $\bar{x} \approx 57{,}67$; $Me \approx 54{,}54$; $Mo = 43$. **6.** B – I, A – II, C – III.

**C₁. 8.** a) $x_1 = 7{,}5$; $x_2 = 10{,}5$; $x_3 = 13{,}5$; $x_4 = 30{,}0$; $x_5 = 43{,}5$; $x_6 = 45{,}0$ (milioane km²); b) $\bar{x} = 25{,}0$ (milioane km²); c) $Me = 21{,}75$ (milioane km²). **9.** $\bar{x} = 9865$, $M_e = 9625$, $M_0 = 9050$. **10.** 1) 5,92 minute. 2) 6 minute. 3) Durata medie se modifică în funcție de modul de regrupare a intervalelor.

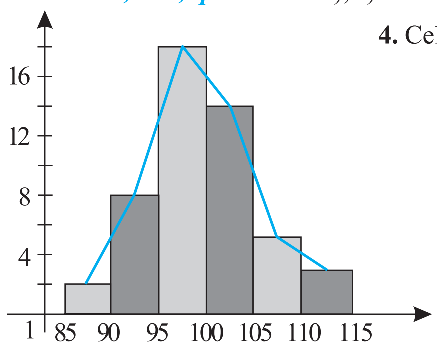
**§ 5.** ***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A. 1.** a) 13,33 %; b) 26400 u. m. **2.** 10 %. **3.** 2 250 lei. **B. 4.** a) 1 180 lei; b) 1 192,52 lei; c) 1 196,79 lei. **5.** a) 5 152,05 lei; b) 5 173,7 lei. **6.** 3500,88 lei. **C. 7.** 1590,33 u.m. **8.** 1 250 u.m.

***Profilul real.*** **A₁. 1.** a) Creștere de 1,135 ori; b) creștere de 1,1232 ori; c) creștere de 1,127 ori. Deci, varianta a) e mai convenabilă. **2.** 167,55 u.m. **3.** a) 11 235 u.m.; b) 11 298,5 u.m. Varianta b). **B₁. 4.** 2 430,64 u.m. **5.** a) 5%; b) 8,75%. **6.** a) 25 937 u.m.; b) 44 114 u.m. **C₁. 7.** 2 000 u.m.

## *Exerciții și probleme recapitulative*

***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A. 1.** b), c). **2.** Ioana Pădure – 1701,0 lei, Ana Luchian – 1734,0 lei.

**B. 3.** a)

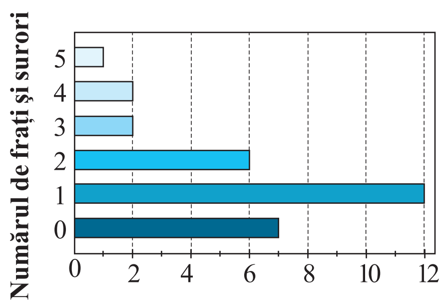



b) $\bar{x} = 99{,}6$; $Me \approx 99{,}3$; $Mo \approx 98{,}57$.

**4.** Cel puțin 24.

**C. 5.** a) $\bar{x} \approx 14{,}3$; b) 2;

c)



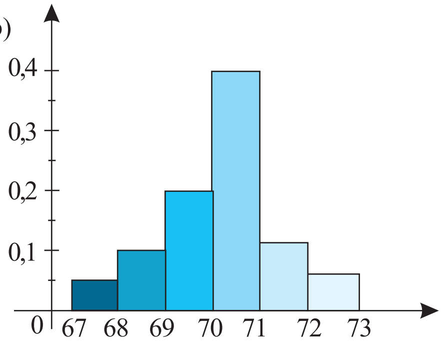

**6.** 73,92 %.

*Profilul real.* $A_1$. **1.** 1,7 m. **3.** 15427,5 u.m.

$B_1$. **4.** a)

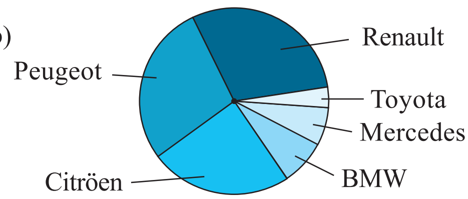
| Concentrația (%) (interval) | $x_i^*$ | Frecvența absolută ($n_i$) | Frecvența absolută cumulată | Frecvența relativă ($f_i$) |
|---|---|---|---|---|
| [67, 68) | 67,5 | 3 | 3 | 0,05 |
| [68, 69) | 68,5 | 7 | 10 | 0,12 |
| [69, 70) | 69,5 | 13 | 23 | 0,22 |
| [70, 71) | 70,5 | 25 | 48 | 0,41 |
| [71, 72) | 71,5 | 8 | 56 | 0,13 |
| [72, 73] | 72,5 | 4 | 60 | 0,07 |
| Total | | 60 | | |

b)




c) $\overline{x} \approx 70{,}17$; $Me = 70{,}3$; $Mo \approx 70{,}41$.

**5.** a) Marca autoturismului este o caracteristică statistică calitativă. b)




**6.** Cumpărătorul nu are dreptate.

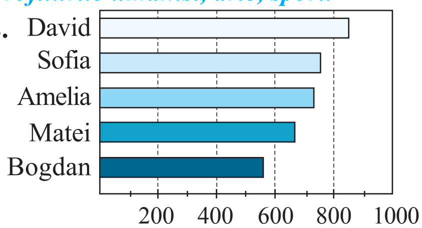
$C_1$. **7.** a) $\overline{x} \approx 7{,}62$; $Me = 8{,}4$; $Mo = 9$; b) $\approx 31\%$.

**8.** a) $6{,}9 + 1{,}1 = 8$; b) $6{,}9 \cdot \frac{11}{10} = 7{,}59$.

## *Test sumativ*

### *Profilurile umanist, arte, sport.*

**2.**

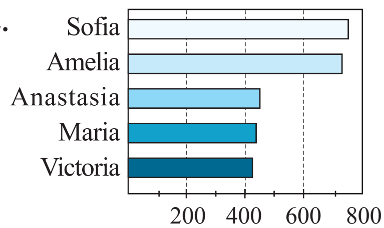



**3.** a) 8400 u.m.; b) 8354,4 u.m.

**4.** a) Timpul parcurgerii distanței de 100 m;
b) $\overline{X} \approx 9{,}9925$;
c) Usain Bolt.

*Profilul real.* **1.** b) $Me = 4{,}375$; c) $Mo = 4{,}3125$.

**2.**




**3.** a) 29000 u.m.; b) 44114,35 u.m.

**4.** 15.

# Modulul 7. Poliedre

§ 2. *Profilurile umanist, arte, sport.* A. **1.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $4\sqrt{2}$ cm. **2.** $10(5+2\sqrt{119})$ cm$^2$. **3.** 80 cm$^2$. **4.** 90°, 60°, 30°. B. **5.** a) $6\sqrt{6}$ cm, 12 cm; b) $180\sqrt{3}$ cm$^2$. **6.** a) 12 cm, $6\sqrt{5}$ cm; b) $36\sqrt{3}$ cm$^2$, 72 cm$^2$; c) $108(2+\sqrt{3})$ cm$^2$. **7.** a) $\sqrt{58}$ cm; b) $2\sqrt{29}$ cm. **8.** $[BA_1]$. **9.** $\approx 2{,}66$ kg. **10.** 22 cm$^2$. **11.** a) $2\sqrt{53}$ cm, $2\sqrt{29}$ cm; b) $16(14+3\sqrt{3})$ cm$^2$. C. **12.** a) $\arccos\frac{41}{50}$; b) $\arccos\frac{23}{50}$. **13.** a) $3\sqrt{43}$ cm$^2$; b) $(48+9\sqrt{3}+3\sqrt{43})$ cm$^2$. **14.** a) 7 cm; b) $\arcsin\frac{6}{7}$, $\arcsin\frac{2}{7}$, $\arcsin\frac{3}{7}$; c) arctg 3, arctg 2, arctg1,5.

*Profilul real.* $A_1$. **2.** $\sqrt{3}$. **3.** $6\sqrt{2}$ cm, 12 cm. **4.** a) 680 cm$^2$; b) $\frac{60}{\sqrt{97}}$ cm. $B_1$. **5.** 15 rulouri. **6.** a) $ab(1+2\sin\alpha)$; b) $b\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha}$. **7.** a) 6 cm; b) $\sqrt{39}$ cm; c) $\sqrt{111}$ cm; d) $12\sqrt{3}(2+\sqrt{13})$ cm$^2$. **8.** a) 9 cm; b) $3\sqrt{21}$ cm. **9.** a) $\arccos\frac{h^2}{a^2+h^2}$; b) $\arccos\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{a^2+h^2}}$. **10.** a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{1}{4}$; c) 0; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; f) 0. $C_1$. **11.** a) $\arccos\frac{2h^2-a^2}{2(h^2+a^2)}$; b) $a = h\sqrt{2}$. **12.** 39 cm. **13.** a) $\sqrt{2}d^2\sin 2\varphi$; b) $\frac{1}{2}d^2\sin 2\varphi$.

**§ 3. *Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **1.** 15 $cm^2$. **2.** a) 9 cm; b) arctg 1,75. **3.** a) 5 cm; b) $\sqrt{189{,}75}$ cm; c) 6 cm. **B.** **4.** 6,5 cm. **5.** arctg 2. **C.** **7.** $9(4+\sqrt{7})$ $cm^2$. **8.** a) 4 cm; b) $96\sqrt{2}$ $cm^2$.

***Profilul real.* A₁.** **1.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\text{tg}\alpha$. **2.** a) $\frac{1}{2}\sqrt{4h^2-ab}$; b) $h(a+b)$; c) $\arccos\frac{\sqrt{ab}}{2h}$; d) $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{8}$. **B₁.** **3.** $\frac{a}{4}\sqrt{a^2+b^2}$. **4.** 113 foi. **5.** d) $\frac{a}{2\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi+\text{ctg}^2\frac{\pi}{n}}$, $\frac{na^2\text{ctg}\frac{\pi}{n}}{4\cos\varphi}$. **6.** a) $VB=VC=\frac{a}{4}\sqrt{1+9\text{tg}^2\alpha}$, $VA=\frac{3a}{4\cos\alpha}$; b) $\frac{a^2}{8}(6\text{tg}\alpha+\sqrt{9\text{tg}^2\alpha-3})$; c) $\varphi=\text{arctg}\sqrt{3\text{tg}^2\alpha-1}$. **C₁.** **7.** a) $\frac{d_1\cdot d_2}{2\cos\varphi}$; b) $\frac{d_1d_2^2}{4\sqrt{d_1^2+d_2^2}}\text{tg}\varphi$.

**§ 4. *Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **1.** a) 432 $cm^2$; b) $\sqrt{119}$ cm; c) $9\sqrt{238}$ $cm^2$. **2.** a) 84 $cm^2$; b) $\sqrt{13}$ cm; c) $12{,}25\sqrt{3}$ $cm^2$. **B.** **3.** a) $\sqrt{150}$ cm; b) $220\sqrt{5}$ $cm^2$. **4.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $(15\sqrt{39}+17\sqrt{3})$ $cm^2$. **C.** **5.** $\approx 1{,}6$ m.

***Profilul real.* A₁.** **1.** a) $\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6}\text{tg}\varphi$; b) $\frac{\sqrt{3}(b-a)}{6\cos\varphi}$; c) $\frac{\sqrt{3}(b^2-a^2)}{4\cos\varphi}$. **B₁.** **2.** a) $\frac{a}{2}\sqrt{(b-a)^2\text{tg}^2\varphi+b^2}$; b) $\frac{b}{\sqrt{(b-a)^2\text{tg}^2\varphi+b^2}}$; c) $\frac{b^2-a^2}{2}\text{tg}\alpha$. **3.** 3,59 m. **C₁.** **4.** a) 120 $cm^2$; b) $48(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ $cm^2$.

**§ 5. *Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **1.** $\frac{512\sqrt{3}}{9}$ $cm^3$. **2.** 64 $cm^3$. **4.** a) $3\sqrt{38}$ cm; b) 558 $cm^2$; c) 810 $cm^3$. **B.** **6.** a) $144{,}5\sqrt{3}$ $cm^2$; b) $\frac{3893\sqrt{6}}{6}$ $cm^3$. **7.** a) 39; b) $84\sqrt{3}$ $cm^3$. **8.** 84. **9.** 94,7 $m^3$. **10.** $12\sqrt{2}$ $cm^2$. **11.** 5 cm. **C.** **13.** a) $36\sqrt{3}$ $cm^2$; b) $18\sqrt{2}$ $cm^3$. **14.** 8 cm.

***Profilul real.* A₁.** **1.** 3. **2.** $192\sqrt{6}$ $cm^3$. **3.** $162\sqrt{5951}$ $cm^3$. **4.** $144\sqrt{134}$ $cm^3$. **B₁.** **6.** $12\sqrt{3}$ $cm^3$. **7.** a) $6a^2\sin\alpha$; b) $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$. **8.** $36\sqrt{31}$ $cm^3$. **9.** a) $\frac{140\sqrt{2}}{3}$ $cm^2$; b) $\frac{700\sqrt{3}}{27}$ $cm^3$. **10.** 216 min. **11.** $8\sqrt{7}$ $cm^3$. **12.** a) $16\sqrt{39}$ $cm^2$; b) $\frac{128\sqrt{3}}{3}$ $cm^3$. **13.** a) 284 $cm^2$; b) $156\sqrt{3}$ $cm^3$. **C₁.** **14.** 60°. **15.** 162 $cm^3$. **16.** $\frac{ab\sin\gamma}{2(a+b)}\sqrt{l^2(a+b)^2-4a^2b^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}$. **17.** $\arcsin\frac{4\mathcal{V}\text{tg}\frac{\pi}{n}}{na^3}$.

### *Exerciții și probleme recapitulative*

***Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **1.** $\approx 48$ kg. **2.** $\approx 83{,}6$ min. **B.** **3.** 680 de cubuşoare. **C.** **6.** $3d$, $4d$. **7.** 10 cm, 24 cm, 26 cm.

***Profilul real.* A₁.** **1.** 0,25 cm. **2.** 0,125 cm. **B₁.** **3.** 180 $cm^3$. **4.** 64 $cm^3$. **5.** 45°. **6.** $27\,006\sqrt{3}$ $cm^3$. **C₁.** **8.** $\frac{bd(a+c)}{3}$, $\frac{abd}{3}$, $\frac{bcd}{3}$, $\frac{bd(a+c)}{3}$. **9.** a) $\frac{1}{6}a^3$; b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

### *Test sumativ*

***Profilurile umanist, arte, sport.*** **2.** a) $72(1+\sqrt{7})$ $cm^2$; b) $\frac{100\sqrt{7}}{7}$ %; c) $144\sqrt{3}$ $cm^3$. **4.** 35200 $m^3$.

***Profilul real.*** **2.** a) $\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}(1+\cos\beta)$; b) $\frac{a^3}{6}\sin^2\alpha\,\text{tg}\,\beta$. **3.** a) $10l^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; b) $\frac{38}{3}l^2\sin\alpha\cos^2\alpha$. **4.** 6048 $m^3$.

## Modulul 8. Corpuri de rotație

**§ 1. *Profilurile umanist, arte, sport.* A.** **1.** a) $16\pi$ $cm^2$; b) $16\pi$ $cm^3$. **2.** $1701\pi$ $cm^3$. **3.** 13 cm. **B.** **4.** $20\pi$ $cm^3$. **5.** 8 cm. **6.** 195151 $m^2$. **7.** 8. **8.** $8\pi$ $cm^2$. **C.** **9.** 24 şi 86. **10.** Este suficient 1 kg de vopsea.

***Profilul real.* C₁.** **3.** $\sqrt{H^2+3R^2}$. **4.** a) 10 cm; b) arccos0,8. **5.** a) 0,215 $m^3$; b) 78,5%; c) nu se va schimba. **6.** $\mathcal{V}\approx 1568$ $cm^3$. **7.** Nu.

**§2.** ***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A. 1.** a) $65\pi$ cm$^2$, $90\pi$ cm$^2$; b) $100\pi$ cm$^3$; c) 60 cm$^2$. **2.** $768\pi$ cm$^3$. **3.** a) $12{,}5\pi(1+\sqrt{2})$ cm$^2$; b) $\frac{125\pi\sqrt{2}}{12}$ cm$^3$. **B. 4.** 42 de foi. **5.** 6,5 cm. **6.** $32\pi$ cm$^2$. **7.** 34 cm; 16 cm. **C. 8.** $243\pi\sqrt{3}$ cm$^3$. **9.** $50\pi\sqrt[3]{2}$ cm$^2$.

***Profilul real.*** **A₁. 1.** a) $0{,}5\sqrt{2}R\operatorname{tg}\varphi$; b) $0{,}5\sqrt[3]{4}R\operatorname{tg}\varphi$; c) $0{,}5\sqrt{2}R\operatorname{tg}\varphi$. **2.** a) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}\left(\frac{1}{\cos\varphi}+1\right)$; b) $\frac{a^2\operatorname{tg}\varphi}{4\sin^2\alpha}$; c) $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\varphi}{24\sin^3\alpha}$. **3.** a) $\pi a^2\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)$; b) $\frac{\pi a^3\cos^2\alpha}{3\sin\alpha}$. **B₁. 4.** $8\pi$ cm$^3$. **5.** $\pi x^2$. **6.** a) $0{,}5\sqrt{2}G$; b) $\frac{\sqrt{2}\pi G^3}{12}$. **7.** 7 cm. **8.** $\frac{R^3\sqrt{R^2-2x^2}}{R^2-x^2}$. **10.** $\approx 24$ m$^2$. **11.** $\approx 4{,}15$ cm. **12.** $\frac{\pi}{4}$.

**§3.** ***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A. 1.** a) $960\pi$ cm$^2$; b) $9\,408\pi$ cm$^3$; c) $10\sqrt{10}$ cm. **2.** $27\sqrt{2}\pi$ cm$^2$, $63\pi$ cm$^3$. **B. 3.** 60°. **4.** 6 cm. **5.** $\approx 21{,}9$ litri. **6.** 14 cm. **C. 7.** 8.

***Profilul real.*** **A₁. 1.** $\approx 107$ g. **2.** 5 dm și 1 dm. **B₁. 3.** $\frac{\pi^2(R^2+r^2)(R^2+Rr+r^2)}{3(R+r)}$. **4.** a) $\pi(R+r)\sqrt{h^2+(R-r)^2}$; b) $\operatorname{arctg}\frac{h}{R-r}$; c) $\operatorname{arctg}\frac{2h\sqrt{3}}{3(R-r)}$. **5.** $\frac{19}{37}$. **6.** a) $\frac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$; b) $\frac{\pi(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha}{3}$. **7.** $\frac{37\pi R^2H}{192}$, $\frac{19\pi R^2H}{192}$, $\frac{7\pi R^2H}{192}$. **C₁. 8.** a) $\frac{H}{R-r}\left(\sqrt{\frac{R^2+r^2}{2}}-r\right)$; b) $\frac{H(\sqrt{Rr}-r)}{R-r}$.

**§4.** ***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A. 1.** $\frac{1324\pi}{3}$ cm$^3$. **B. 2.** a) $144\sqrt[3]{1\,225\pi}$ cm$^2$; b) $10\,080\pi$ cm$^3$. **3.** $36\pi$ cm$^3$. **4.** A. **C. 5.** $\frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm. **6.** $\frac{50-4\pi}{\pi}$.

***Profilul real.*** **A₁. 1.** a) $C(-3, 4)$, $R=5$; b) $C(-2, 3)$, $R=4$; c) $C\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $R=4$; d) $C\left(-1, \frac{3}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt{17}}{4}$. **2.** a) $(x-1)^2+(y-3)^2=8$; b) $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$. **3.** a) $(-4, -3)$, $(3, 4)$; b) $(-3, -4)$, $(4, -3)$. **4.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1$. **5.** a) $\frac{x}{100}^2+\frac{y^2}{36}=1$; b) $\frac{x}{100}^2+\frac{y^2}{36}=1$. **B₁. 6.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$. **7.** a) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=9$; b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1$; c) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{4}=1$. **8.** $(-6, -4\sqrt{3})$, $(-6, 4\sqrt{3})$. **9.** $F(6, 0)$; $x+6=0$. **10.** $(9, 12)$, $(9, -12)$. **11.** $(-6, 9)$, $(2, 1)$. **12.** 328 de cutii. **13.** $\frac{\sqrt{7991}}{4\sqrt{6}}$ cm. **14.** $\pi R^2\cos^2\alpha$ u.p. **15.** $\approx 814{,}7$ kg. **C₁. 17.** 73 864 kg. **18.** 558,5 tone.

## *Exerciții și probleme recapitulative*

***Profilurile umanist, arte, sport.*** **A. 1.** a) 60°; b) $32\sqrt{3}$ cm$^2$; c) $\frac{96\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ cm$^3$. **B. 2.** $\approx 2\,312$ m$^3$. **3.** $144\pi$ m$^2$, $128\pi$ m$^3$. **4.** a) 36 m$^2$; b) arccos 0,6; c) $96\pi$ m$^3$, $60\pi$ m$^2$. **6.** $6\sqrt{3}$ dm. **C. 7.** 6 cm.

***Profilul real.*** **B₁. 2.** a) $R=\frac{s}{2}(1+\cos\varphi)$, $r=\frac{s}{2}(1-\cos\varphi)$; b) $R=\frac{d}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$, $r=\frac{d}{2}\left(-1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)$. **3.** $\pi G^2$; $\frac{2\pi R(G^2-R^2)}{3}$. **4.** 14 cm. **5.** Da. **C₁. 8.** $0{,}5\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **9.** $\frac{9+\sqrt{17}}{24}\pi R^3$.

## *Test sumativ*

***Profilurile umanist, arte, sport.*** **2.** a) $252\pi$ cm$^3$; b) $\frac{1600\sqrt[3]{7}}{63}$%. **3.** b) $120\pi$ cm$^2$; c) $300\pi$ cm$^3$. **4.** $600\pi$ cm$^2$.

***Profilul real.*** **2.** $\frac{4\pi a^3H^3\sin^3\alpha}{3(a\sin\alpha+\sqrt{4H^2+a^2\sin^2\alpha})^3}$. **4.** $\approx 69{,}1$ g.

# CUPRINS

# 12

# Matematică

Manual pentru clasa a XII-a